¿Es la Matemática un lenguaje?[1]

DANIEL QUESADA
(Universidad Autónoma de Barcelona)

Es sorprendente el número de personas dedicadas a la ciencia que dan por presupuesta una respuesta afirmativa a la pregunta del título. Esta actitud es, me parece, especialmente pronunciada entre los físicos. Creo que es fácil comprobar cómo *ellos* se sorprenden de que algo así pueda preguntarse seriamente («esperemos que sí»; «¿qué otra cosa puede ser»).

Sin embargo, diversas cosas pueden estarse preguntando al usar la oración interrogativa «¿es la Matemática un lenguaje?». Incluso, como veremos, puede estarse apuntando a una cuestión profunda acerca de la naturaleza de la Matemática y de las capacidades cognitivas relacionadas con ella que está totalmente abierta en la actualidad. Voy aquí a abordar todas esas posibles cuestiones (al menos todas las que se me ocurren) sucesivamente.

1. Lenguaje y teoría

Para empezar necesitamos una cierta noción de lenguaje. No una noción muy técnica o precisa. Basta con reconocer que un lenguaje tiene:

i) un conjunto de items básicos discretos, es decir, un *vocabulario;*

ii) una *sintaxis*, es decir, tales items tienen un determinado *poder combinatorio;* no vale cualquier secuencia de ellos (este rasgo diferencia, por ejemplo, un lenguaje de un sistema de numeración; si admitimos cualquier secuencia de unos y ceros, pongamos por caso, no tenemos un lenguaje);

iii) determinadas secuencias de esos items, entre las que están sintácticamente bien formadas tienen un «alcance semántico», es decir, se usan

1. Este artículo es una versión revisada y ligeramente ampliada de una charla dada en la Universidad Autónoma de Barcelona en la primavera de 1989, y parte de la «ligereza expositiva» de la versión hablada se podrá detectar en la versión escrita. Agradezco a Walter Meyerstein y a Josep Montserrat Torrens el tema, el impulso y la oportunidad para abordar aquél.

para hablar sobre objetos, en general distintos a los propios items o secuencias[2]

A la noción de lenguaje pertenece esencialmente la de aserción correcta o incorrecta, verdadera o falsa (posibles distinciones entre estos dos pares de nociones no son aquí pertinentes). Es decir, a un lenguaje pertenecen también los enunciados *falsos*. Sin embargo, cuando hablamos de la Matemática nos referimos al conjunto de proposiciones que la constituyen, los teoremas de las teorías matemáticas; y éstos, según creemos, son todos ellos *verdaderos*.

Lo que tenemos aquí es el contraste entre un *lenguaje* y una *teoría*. Un lenguaje (por ejemplo, un lenguaje natural) consta, entre otras cosas, de un conjunto de enunciados, oraciones que pueden ser verdaderas *o* falsas. Una teoría, en especial una teoría matemática, consta de un conjunto de enunciados o proposiciones expresados *en* un lenguaje que son verdaderos (o eso es lo que esperamos). Lo decisivo en el contraste es que no «expulsamos» de un lenguaje un enunciado por el hecho de que sea falso, y en cambio sí lo «expulsamos» de una teoría en ese mismo caso.

Por lo tanto, en el sentido más inmediato de los términos de la pregunta, una teoría matemática no constituye un lenguaje, ni tampoco el conjunto de tales teorías; en este sentido, la Matemática *no* es un lenguaje, y ello es, además, obvio.

2. **Lenguaje y vocabularios especiales**

La respuesta anterior, aun siendo verdadera y clarificadora frente a cierto tipo de confusión elemental, difícilmente podrá satisfacer a los que se hacen la pregunta o los que presuponen una respuesta verdadera. Lo más probable es que sientan que la «verdadera cuestión» queda sin tocar en el comentario anterior. Pues bien, quizá estemos ahora en condiciones de llegar a una nueva y mejor formulación: «¿Es el lenguaje matemático un lenguaje especial diferente del lenguaje natural?».

La respuesta a esta pregunta debe ser, según creo: por un lado —el trivial o menos interesante— sí, por el otro más bien parece que no.

Comencemos por el lado del *sí*. Es obvio que en Matemáticas se utilizan una serie de términos especiales: *raíz cuadrada, logaritmo, polinomio, transformación lineal, función trigonométrica, vector, número real, integral, ecuación diferencial, espacio de Hilbert, curva de Gauss, serie de Fourrier*. E

---

2. Lo anterior es un ejemplo de «lenguaje externamente concebido» o «lenguaje-E» en la terminología de CHOMSKY: cf. *Knowledge of Language*, pp. 17-20, y «*Cambios de perspectiva sobre el conocimiento y el uso del lenguaje*», p. 18. Contrariamente a Chomsky creo que ésta (cuando se la concibe debidamente) es la noción correcta de lenguaje. Para una defensa de esta opinión y una convencente crítica de la noción chomskyana de lenguaje remito a GARCÍA-CARPINTERO: *Mente y Lenguaje*.

igualmente obvio es que una serie de términos que la Matemática comparte con el lenguaje natural tienen un significado que tiene muy poco o nada que ver con sus homónimos en éste: *radio, parábola, congruencia, función, límite, grupo, campo, anillo, retículo, matriz.*

Pasemos ahora a ver las razones del *no*. A veces, sobre todo en los libros malos de filosofía (o hasta en pasajes malos de libros aceptables o buenos), se habla como si el lenguaje de las teorías matemáticas fuera un lenguaje formal de la lógica. Esto querría decir que un lenguaje matemático es, por un lado, un lenguaje no interpretado (cuyos predicados son simplemente letras de predicado a las que hay que proporcionar una interpretación) y por otro un lenguaje con una sintaxis como la de un lenguaje de la lógica, especialmente el lenguaje de primer orden.

Esto es, naturalmente, falso. Basta abrir un libro de Matemáticas para cerciorarse de ello. Esos libros están escritos en inglés, francés, alemán, etc. En todo caso un lenguaje interpretado y con la sintaxis de un lenguaje natural, aunque abunden ciertos giros que en el habla común no son (tan) frecuentes.

Valorando pues las peculiaridades del vocabulario y teniendo en cuenta lo que acabamos de reconocer, no parece que estemos llegando a una conclusión especialmente excitante. Parece que el *lenguaje matemático* tiene un *status* similar al *lenguaje gastronómico*. En efecto, también en este último es abundante la «terminología técnica»: *reogado, sofrito, estofado, paella, budín, pasta quebrada, mayonesa, bechamel, salsa holandesa, alioli, crema pastelera*. Además, también encontramos términos utilizados en un sentido distinto a sus homónimos del lenguaje común: *guarnición, timbal, chateaubriand.* Por último, puede añadirse que, análogamente al caso del vocabulario gastronómico, en la Matemática tampoco es clara la frontera entre el lenguaje especializado y el común, como lo ponen de manifiesto términos como: *número, suma, recta, curva, paralela, triángulo, pirámide, círculo, ángulo, permutación.* Y hasta: *finito* e *infinito*.

Vista esta situación, parece que deberíamos ser remisos en dar una respuesta afirmativa a la pregunta («¿es el lenguaje matemático un lenguaje especial diferente del lenguaje natural?»), pues ya hemos visto que la noción de lenguaje abarca algo más que un vocabulario.

3. **Replanteamiento de la cuestión**

Resumamos las conclusiones a que hemos llegado hasta aquí. La Matemática *no* es un lenguaje, en el sentido de que la primera es un conjunto de teorías y una teoría se contrapone, en un sentido claro, a un lenguaje. Una teoría se formula *en* un lenguaje y no pertenece al concepto de teoría el que los enunciados o proposiciones que la componen sean algunos verdaderos y otros falsos, cuando sí es algo constitutivo de la noción de lenguaje el que podamos hacer aserciones verdaderas y aserciones falsas.

Tampoco parece ser el lenguaje de la Matemática un lenguaje especial que poco tiene que ver con el lenguaje natural. Según parece, «el» lenguaje de las teorías matemáticas no existe independientemente de las lenguas naturales (es sintácticamente inglés, francés, alemán, español...). Por lo visto hasta aquí, únicamente es claro que tiene un componente terminológico especializado, aunque incluso en este respecto la frontera con el lenguaje común es completamente nítida. En definitiva, si no decimos que la gastronomía es un lenguaje por el mero hecho de que tenga una terminología especializada y técnica, parece que tampoco debiéramos decir que la Matemática es un lenguaje. Y esto a pesar de que tal componente terminológico sea mucho mayor en la Matemática que en la gastronomía. No son cuestiones de cantidad las que aquí se ventilan.

Las conclusiones son hasta aquí, aunque correctas, más bien poco interesantes, tanto desde un punto de vista científico como filosófico.

¿Es esto todo? Cuando estamos ante una cuestión que personas inteligentes suscitan o conclusiones que personas inteligentes sostienen y nos parece que la cuestión es poco interesante o que, en todo caso, su respuesta es bastante obvia y además contraria a la que tales personas tienen por correcta, lo metodológicamente adecuado es considerar cuidadosamente ante cuál de las dos situaciones siguientes nos encontramos:

i) la pregunta y/o su errónea respuesta usual se basan en malentendidos;

ii) la pregunta, aunque seguramente no bien formulada, apunta a una cuestión importante y profunda cuya solución es ciertamente complicada.

Pues bien, en el presente caso hay, a mi parecer, parte de las dos cosas. Creo que, entre los que se hacen las anteriores preguntas (y aún más entre los que dan por supuesta una respuesta afirmativa) hay generalmente un buen número de malentendidos y confusiones. Pero también creo que tras éstos late una genuina cuestión de interés filosófico-científico. El próximo paso es indagar cuál pueda ser ésta.

Como he dicho, a la noción de lenguaje pertenecen (como mínimo) tres componentes: vocabulario, sintaxis y semántica. Hemos visto que los dos primeros no nos llevan a una respuesta afirmativa de la pregunta original o de la reformulación realizada posteriormente. Es hora de prestar atención al componente semántico.

El nuevo enfoque de la cuestión proviene de reflexionar sobre cierto carácter distintivo —en apariencia cuando menos— de las proposiciones matemáticas. Este estriba en que las proposiciones matemáticas son *necesarias*, es decir, si verdaderas, *necesariamente verdaderas.* Al menos esto es lo que la mayoría de los filósofos y matemáticos han pensado sobre ellas.

Que son necesariamente verdaderas quiere decir que no podrían ser falsas (lo último, claro está, es sólo una paráfrasis). Pero, ¿de dónde les viene a las proposiciones matemáticas su carácter necesario? ¿por qué no podrían ser falsas? Pues bien, bien pudiera ser que la cuestión realmente interesante que late tras formulaciones quizás ingenuas o inadecuadas surja de un intento de contestar estas preguntas de una manera determinada: las proposiciones matemáticas «tratan de» signos, y por tanto son, por su «materia» , lingüísticas[3].

Esta idea es muy sorprendente. ¿No es obvio que las proposiciones matemáticas tratan de entidades abstractas, ideales si se quiere, extralingüísticas? Entidades como números, figuras geométricas, «áreas en el límite» o estructuras de diversos tipos. ¿En qué sentido, pues, cabría sostener que tratan de signos?

Aquí quisiera reformular estos interrogantes dando una forma más amplia a la pregunta. La interesante cuestión que nos ocupará en lo sucesivo es:

¿Hay algún sentido preciso en que estemos justificados en afirmar que las proposiciones matemáticas son «verdades lingüísticas» o, cuando menos, verdades conceptuales?

4. El programa finitista

El intento histórico más serio de justificar una respuesta afirmativa a esta pregunta es el programa finitista de Hilbert. Por tanto, deberé hablar ahora de este programa. Me limitaré en adelante exclusivamente a la Aritmética, y ello por varias razones. En primer lugar, porque es allí donde el programa experimentó un mayor desarrollo. Pero, en segundo lugar, también porque el programa mismo implicaba que la resolución de la cuestión en la Aritmética era crucial para la resolución en otras áreas de la Matemática. En el análisis se debería proceder basándose en las construcciones aritméticas y en una parte de la teoría de conjuntos, y la extensión del programa a la geometría debería proceder, supongo, por la vía de la geometría analítica (ignoro cómo los proponentes del programa pensaban aplicarlo al álgebra).

El programa de Hilbert tiene una *motivación epistemológica* que nos es muy familiar en la historia de la filosofía. Es un programa motivado por dudas «cartesianas», es decir, dudas radicales, excesivas, por cuanto buscan *certeza*, garantía de verdad, absoluta seguridad epistémica. Las paradojas de la teoría de conjuntos, descubiertas en los últimos años del siglo XIX y principios del XX eran para Hilbert indicio de lo que puede ocurrir cuando métodos (sobre todo métodos de prueba) que son adecuados para

3. Debo esta sugerencia a Manuel García-Carpintero. También he de agradecerle un buen número de aclaraciones y sugerencias sobre lo que se trata en el resto del artículo. En particular, me he apoyado en la exposición del programa finitista hilbertiano que él hace en escritos inéditos.

dominios finitos se utilizan también en dominios infinitos o transfinitos, en casos, pues, para los que no fueron pensados.

Esta situación es análoga a la que nos explica Kant con respecto a las ideas de la razón, las cuales, extrapoladas a partir de los ámbitos en que producen juicios razonables dan lugar a antinomias. (Esta no es, en absoluto, la única analogía que puede hacerse entre las ideas de Hilbert y las de Kant).

Pues bien, el programa de Hilbert se proponía demostrar la corrección de los enunciados matemáticos (en primer lugar los aritméticos, mostrando que lo que puede probarse en matemáticas es verdadero, y ello apoyándose en la diferenciación entre:

a) Enunciados con contenido semántico (con valor veritativo), a saber, enunciados finitistas demostrados mediante métodos considerados seguros, los métodos finitistas;

b) Enunciados ideales sin contenido semántico pero que cumplen una útil función instrumental en la prueba de los enunciados con contenido en la matemática tal como se la practica usualmente.

De este modo, el programa de Hilbert tenía características de un *programa instrumentalista,* es decir, el tipo de programa de interpretación filosófica de los enunciados de las teorías científicas según el cual éstos no son realmente enunciados de los que quepa inquirir por su verdad o falsedad, sino que son «herramientas de cálculo», esto es, sirven como útiles para derivar verdaderos enunciados con contenido semántico (enunciados observacionales, en el caso de las teorías físicas). Ahora bien, el programa era moderado en ese sentido, porque se admite que hay verdaderos enunciados —los del tipo a)— que forman parte de las teorías matemáticas.

En el caso del programa de Hilbert, los enunciados ideales son precisamente los enunciados que de algún modo contienen referencias a lo transfinito. Estos carecen pues de valor veritativo, no son ni verdaderos ni falsos; nos servimos de ellos —por ejemplo, los enunciados de la Aritmética de Peano (ADP en adelante)— esencialmente por comodidad.

Para demostrar que estos enunciados son *inocuos*, que no pueden conducirnos a contradicciones, es preciso demostrar la corrección del modo en que se derivan utilizando los métodos de prueba seguros, los métodos finitistas.

El programa de Hilbert era hasta cierto punto un programa abierto que dejaba sin precisar cuáles eran exactamente los enunciados finitistas y los métodos de prueba finitistas. Por un lado, es claro que los primeros incluyen ecuaciones entre los valores de *determinadas funciones:*

$$4 + 7 = 11 \qquad\qquad 8 \times 5^2 = 200$$

Hilbert describió los enunciados finitistas de modo que se incluían los que expresan proposiciones decidibles acerca de configuraciones finitas.

Pero no estaba claro qué funciones eran admisibles. Piénsese que los conceptos de decidibilidad y de función recursiva sólo fueron precisados con posterioridad a la formulación del programa, y ello precisamente como resultado del trabajo motivado en gran parte por su realización. Es por ello por lo que era un programa abierto en cierta medida.

Aún más, ni siquiera era en principio claro lo que un finitista había de entender por *función.* Todos los conceptos de la Aritmética y, por extensión, de la Matemática, debían ser revisados.

Las dificultades eran realmente extraordinarias pues entre los enunciados con contenido semántico (los que tienen valor veritativo) deben incluirse, si es que ha de haber una parte de la Aritmética que tenga tal contenido con un mínimo de interés, generalizaciones universales de enunciados decidibles como los anteriores. Consideremos un ejemplo:

$$(1) \qquad \forall x\ \forall y\ (x+y=y+x)$$

La dificultad que este enunciado planteaba a un finitista es que no podía interpretarse como lo hacemos habitualmente, es decir, suponiendo que hace referencia a la totalidad (infinita, claro está) de los números naturales.

Con la ventaja que nos da la mirada retrospectiva, podemos indicar del modo siguiente —siquiera sea vagamente— el camino (o, al menos, uno de ellos) que se proponía recorrer el finitista para realizar ese difícil programa.

El punto de partida era ontológicamente el siguiente: los enunciados finitistas, en último término, «hablan de» *signos y configuraciones finitas de signos,* tomados éstos como tipos, no como ejemplares. La materia de la Aritmética, según esto, serían signos. Ciertas secuencias finitas de signos-tipo[4] podían ser tomados como la secuencia de los *números naturales.* Por ejemplo, la secuencia:

$$|,\ ||,\ |||,\ ||||,\ |||||\ldots\ldots$$

La seguridad epistemológica de los métodos finitistas provendría precisamente de que sus objetos son «representables a la intuición», dicho en terminología kantiana, es decir, representaciones individuales.

Una *función* en el sentido finitísticamente aceptable de A en B, es decir del tipo de objeto A en el tipo de objeto B es un procedimiento para construir un objeto de tipo B a partir de un objeto cualquiera de tipo A. Funciones aceptables finitísticamente serían la *identidad,* las funciones *constantes* y la *composición* (funciones compuestas).

---

4. Hilbert habla a veces como si hubiera que considerar los signos como ejemplares y no como tipos, pero esto es descabellado ($|$ no sería en ningún caso un número distinto de $|$).

Para el caso del tipo de objetos N, el de los números o, lo que era lo mismo, secuencias finitas de signos, la construcción central sería la llamada *recursión primitiva*[5].

Podría darse entonces sentido finitista (es decir, sin suponer la totalidad infinita de los números ni ninguna otra totalidad infinita) a afirmaciones como (1) o, más en general, a enunciados que respondan al esquema:

$$\forall x(\varphi(x) \rightarrow \Psi(x)).$$

En efecto, una proposición de ese tipo es verdadera si, dado un objeto *a* del tipo N cualquiera para el que podamos probar $\varphi(a)$, podemos construir una prueba $\Psi(a)$ de por los métodos de construcción admitidos.

No es éste el lugar para entrar en mayores detalles sobre el contenido matemático del programa finitista. Debemos preocuparnos más bien de su destino[6].

Con algunas matizaciones puede decirse que el *programa de Hilbert*, tal como éste se concebía originalmente, fue *refutado* por el teorema (o los teoremas) de incompletud de Gödel. Las matizaciones son importantes, pero, en todo caso, lo cierto es que el interés en el programa de Hilbert decayó espectacularmente después de 1930 (cuando Gödel probó sus teoremas).

Sin embargo, como he dicho, el programa de Hilbert fue el intento más serio de justificar una respuesta a la pregunta: ¿son lingüísticas o conceptuales las verdades matemáticas? Y aún quisiera aquí hacer una afirmación más fuerte: tal programa ha sido el intento más serio de indicar el camino por el que la Matemática, supuesto reino de verdades eternas acerca de entidades u objetos ideales —como los números—, podría reconocerse como fruto de la interacción de un sujeto con capacidades cognitivas como las del ser humano en su entorno.

Por ello, aunque el programa original de Hilbert esté refutado (vamos a suponer que lo está) *alguna versión* del programa debe seguir en vigor si hemos de comprender las Matemáticas desde un punto de vista naturalista. A este respecto es conveniente recordar las penetrantes palabras de Bertrand Russell: «La doctrina finitista, si es que ha de ser refutada, sólo puede serlo por una doctrina del conocimiento completa»[7].

Voy aquí a hablar únicamente de dos de las cuestiones implicadas en la

5. Para esta noción consúltese, por ejemplo, el capítulo 7 de BOOLOS y JEFFREY: *Computability and Logic.*

6. Para una exposición elemental del programa puede consultarse el capítulo 4 de KÖRNER: *Introducción a la filosofía de la matemática.* Una exposición crítica de los problemas fundamentales del programa muy iluminadora es la de TAIT, W. en *«Finitism»*. Sobre las realizaciones del programa y su estado actual cf. SIEG, W.: *«Hilbert Program Sixty Years Later»* y SIMPSON, S.: *«Partial Realizations of Hilbert's Program»*. Una importante y reciente defensa del programa es la de DETLEFSEN en *Hilbert's Program.*

7. Introducción a la segunda edición (1937) de *Principles of Mathematics*, p. VII.

posibilidad de reformular de manera fructífera el programa finitista. En esta sección trataré brevemente del problema de «rodear» el escollo de Gödel y en la siguiente abordaré la cuestión de si los números son objetos o de si son representaciones individuales.

Respecto a la primera cuestión, supongamos que concretamos así el programa finitista:

— Sea ADP (la Aritmética de Peano en primer orden) el sistema ideal mínimo para la formalización de las pruebas de la Aritmética.

— Sea ARP (la Aritmética recursivo-primitiva) la teoría que formaliza el razonamiento finitista. ARP actúa como metateoría con respecto a ADP.

¿Refuta entonces el teorema de Gödel el programa finitista? El segundo teorema de Gödel establece, aplicado al presente caso, que un cierto enunciado que afirma la consistencia de ADP no es demostrable en ADP. Con ciertos supuestos adicionales establece que ningún enunciado que afirme la consistencia de ADP es demostrable en ADP.

En esta segunda versión más fuerte el teorema refuta el programa finitista. En efecto, el programa finitista —en la versión enunciada— pretende demostrar la consistencia de ADP en ARP. Como cualquier teorema de ARP (metateoría) es expresable (y demostrable) mediante un teorema de ADP (teoría), si hubiera un teorema de ARP que expresara la consistencia de ADP habría uno en ADP que demostraría esa consistencia, contra el teorema de Gödel (en la versión fuerte).

Una posible escapatoria consiste en tratar de razonar por qué no se aplicarían al presente caso las condiciones que hacen pasar de la versión más débil a la más fuerte del teorema[8]. Otra salida posible sería encontrar razones para pensar que el sistema ideal mínimo es «menos potente» que ADP, una Aritmética reducida por consideraciones de complejidad computacional; el problema sería entonces determinar qué limitaciones de este tipo podrían estar aquí justificadas.

5. Reformulación de programas: la complejidad de una respuesta

Pasemos ahora a la segunda cuestión. Como hemos dicho, Hilbert concibió los números como representaciones individuales, concretamente, signos-tipo. Según esto, no cualquier secuencia específica de signos puede representar la secuencia de los números; concretamente, las secuencias de letras del alfabeto no valdrían, pues, por ejemplo, «abc» y «cab» son signos distintos (también considerados como tipos, que es lo pertinente) pero

8. Esta es la vía que se propone en DETLEFSEN (1986).

el número correspondiente habría de ser el mismo[9]. De modo que debemos restringirnos a secuencias construidas con un único elemento, por ejemplo «|». Pero ¿cómo justificar esta restricción? O, más explícitamente, ¿cómo entender nuestra comprensión del concepto de número, o de los números particulares, en relación con ella?

W. Tait ha ofrecido —en el importante artículo mencionado anteriormente— una alternativa que puede llevar a consideraciones sobre los números a mi parecer mucho más iluminadoras. Según su diagnóstico, las dificultades provendrían precisamente de la concepción de los números como representaciones individuales en el programa finitista original. Este diagnóstico se comprenderá mejor con la exposición del análisis alternativo que propone Tait.

Según Tait, la noción básica de la Aritmética es la de *secuencia finita* o, lo que viene a ser lo mismo, la de *iteración* de la operación de añadir un objeto a una serie de objetos a partir de «cero objetos» (una situación en que no hay ningún objeto). Haciendo jugar a esta noción el papel fundamental adecuado, la reconstrucción del proceso cognitivo que lleva a la formación del concepto de número sería a grandes rasgos la siguiente. A partir de la presentación de objetos físicos en el entorno, el sujeto empieza a «ver» unos determinados objetos *como una secuencia*, es decir, comienza a discernir secuencias (nótese que los elementos de las secuencias son objetos *físicos* cualesquiera, dentro de los que pueden ser objeto de experiencia «cotidiana»). Hacer esto es captar la *forma* de esas secuencias o, dicho de otro modo, adquirir la noción de *secuencia* (finita), es decir, de iteración finita de una operación de añadir siempre «lo mismo» (en un sentido diferente al de identidad, es decir, una unidad)[10]. Me atreveré a sugerir, por mi parte, que en la «aprehensión» de esa forma, o en la adquisición de esa noción, tienen mucho que ver las *palabras de número* o sistema estructurado de denominaciones (de los números).

En todo caso, lo que resulta de todo esto es que cada número individual, al igual que la noción general de número, no es una representación individual[11], sino un *concepto de conceptos*: el (concepto de) 3, por ejemplo,

---

9. La relación entre números y signos, cuando disponemos del concepto de número, resulta ulteriormente iluminada por el método de aritmetización de la sintaxis propuesto por primera vez por Gödel que reduce la teoría de los signos a la de los números y además lo hace de un modo finitistamente aceptable, a saber, por razonamiento primitivo recursivo.

10. Tait llama a esta noción la *forma Número*, utilizando terminología platónica. En realidad, su alternativa, tal como él la concibe, está impregnada de platonismo. Creo que ese platonismo no es inevitable. Uno podría adoptar una postura más «aristotélica», viendo la captación de la noción de secuencia como la «aprehensión» de un tipo de entidad, algo uniforme presente en la realidad con la que el sujeto interacciona causalmente. El aire «cognitivista» de mi exposición se aparta también de las ideas de Tait.

11. Dicho en la terminología kantiana (pero corrigiendo también a Kant al respec-

es «lo que ocupa el lugar de *a* (aquí un objeto concreto o quizás un signo) en una estructura que es como la estructura *E* (aquí una estructura, quizás de signos)».

Ahora bien, si los números, en lugar de ser objetos individuales son conceptos de «segundo orden» (conceptos de conceptos), las afirmaciones sobre los números serán afirmaciones sobre tales conceptos; en cierto sentido, pues, afirmaciones de «tercer orden». Esto podría abrir la inesperada posibilidad de establecer un puente entre el programa finitista de filosofía de la Matemática y el programa logicista, tradicionalmente presentados como programas rivales e incompatibles. En efecto, investigaciones actuales que pretenden revivir el programa logicista, renunciando a la idea fregeana de que los números son objetos[12], analizan la «forma lógica» de los enunciados sobre números en términos de un lenguaje lógico de tercer orden[13]. Así, según H. Hodes, un enunciado como (2) tendría la forma lógica (3):

(2) 4 es un número par

(3) (Par X)($\exists$4x)Xx)

Podríamos leer así (3): «Tienen la propiedad (de orden 3) de ser par las propiedades (de orden 1) que tienen la propiedad (de orden 2) de que exactamente cuatro objetos las tienen (es decir, exactamente cuatro objetos tie-

---

to): un número no es un objeto de la intuición; el contraste entre la posición de Hilbert y la propuesta de Tait es que no se capta primero una intuición, sino un concepto del entendimiento: la noción de secuencia o de iteración de una operación de añadir. Dadas las conexiones entre el programa hilbertiano y las ideas kantianas no es descabellado describir la situación en la terminología kantiana y puede servir para comprender el contraste de posiciones a los que la conocen y la encuentran útil.

12. En un artículo ya clásico, «*What Numbers Could Not Be*», Benacerraf argumentó convincentemente contra la idea de que los números son objetos. Frege se vio llevado (tal vez a su pesar, según indicios) a sostener esta idea en parte por dificultades en el desarrollo de su programa logicista de fundamentación de la Aritmética: cf. las secciones cruciales al respecto de *Fundamentos de la aritmética*, (62-68). En un artículo de gran interés, «*Logicism and the Ontological Commitments of Arithmetic*», H. Hodes examina críticamente los vericuetos de la trayectoria intelectual de Frege en esos decisivos momentos y explora las posibilidades de un logicismo renovado que evitara las trampas en que cayó Frege. Es a las ideas presentadas en este artículo a las que sobre todo me refiero en el texto. Como ahí insinúo, creo que bien pudiera suceder que el futuro de la filosofía de la Matemática esté en una conciliación del tipo de logicismo renovado propuesto por Hodes con un finitismo modificado en el sentido apuntado anteriormente.

13. En este sentido, pues, habría que matizar (aunque no cambiar) las conclusiones de la sección 2. El lenguaje sobre números es el lenguaje natural, pero la «forma lógica» de esa parte del lenguaje natural —por contraste con otras partes más simples— la daría un lenguaje de tercer orden.

nen esas propiedades de orden 1». (Se obtiene una lectura más «conceptualista», substituyendo «propiedad» por «concepto»).

No es éste el lugar de entrar en el significado o en la justificación de estas afirmaciones, ni de concretar en la posible (e intelectualmente excitante) conexión entre el programa finitista y el programa logicista. Más directamente pertinente es mencionar también que la nueva tesis logicista propuesta por Hodes es que los enunciados matemáticos verdaderos son *verdades lógicas* de un lenguaje de orden superior. Si esto pudiera defenderse, sería entonces posible dar la siguiente respuesta afirmativa a la pregunta que se planteó al final de la sección 3: «Sí, las verdades matemáticas son verdades en virtud del significado (verdades conceptuales en un cierto sentido), puesto que son verdades lógicas»[14].

De la perspectiva actual resulta por tanto que el intento de dar una respuesta fundamentada a la mencionada pregunta —la interesante pregunta con la que finalmente sustituimos la pregunta original que da nombre a este artículo— implica una complejísima tarea en la que se combinan investigaciones matemáticas, conceptuales y empíricas.

El turno de la investigación empírica llega cuando se ha llegado a una base más o menos firme como resultado de la investigación conceptual. Si ésta establece que en la base del concepto de número está el de secuencia finita, es la psicología cognitiva la que ha de investigar en primer lugar el modo en que se forma la noción de secuencia finita a partir de la experiencia de secuencias finitas de objetos físicos (¿utilizando quizás modelos conexionistas?) completando así empíricamente lo que con Hodes podríamos llamar la «microestructura de nuestro acceso a los números».

En definitiva, la resolución del importante problema de comprender cómo seres con nuestras capacidades cognitivas en el entorno en que están situados llegan a «levantar el edificio de la Matemática» implica la siguiente «división del trabajo». La tarea filosófico-matemática (de «fundamentación» de la Matemática) es indicar las nociones que sirven para reconstruir finitísticamente la Matemática y probar los resultados matemáticos pertinentes, suministrando así la «materia» (a saber, dichas nociones) para la investigación cognitiva. El trabajo filosófico más general es, como hemos visto, asistir al proceso con clarificaciones conceptuales y enlazar la reconstrucción finitista con un programa semántico y epistemológico más general.

Claro que, si se ha entendido el espíritu naturalista dentro del que propongo esa tarea, se habrá inferido que la semántica y la epistemología que propugno está también en clave naturalista y que se apartan, también respecto de la Matemática, de la empresa de buscar la certeza cartesiana. Pero así es, y así es como debe ser.

---

14. Naturalmente, esta respuesta lleva también implícita una determinada posición sobre la naturaleza de las verdades lógicas.

BIBLIOGRAFIA

BENACERRAF, P.: «What Numbers Could Not Be», *Philosophical Review*, 74, pp. 47-73.

BOOLOS, G., y JEFFREY, R.: *Computability and Logic*, Cambridge: Cambridge University Press, 1980, 2.ª ed.

CHOMSKY, N.: «Cambios de perspectiva sobre el conocimiento y el uso del lenguaje», *Teorema*, 15, 1985, pp. 11-71.

CHOMSKY, N.: *Knowledge of Language*, Nueva York: Praeger, 1986.

DETLEFSEN, M.: *Hilbert's Program*, Dordrecht: Reidel, 1986.

FREGE, G.: *Fundamentos de la aritmética*, Barcelona: Laia, 1972.

GARCÍA-CARPINTERO, M.: *Mente y lenguaje. Una crítica a la concepción de la teoría del lenguaje de Chomsky*. En preparación.

HODES, H.: «Logicism and the Ontological Commitments of Arithmetic», *Journal of Philosophy*, 81, 1984, pp. 123-149.

KÖRNER, S.: *Introducción a la filosofía de la matemática*, México: Siglo XXI, 1967.

RUSSELL, B.: *The Principles of Mathematics*, Londres: Allen and Unwin, 1964.

SIEG, W.: «Hilbert Program Sixty Years Later», *Journal of Symbolic Logic*, 53, 1988, pp. 338-348.

SIMPSON, S.: «Partial Realizations of Hilbert's Program», *Journal of Symbolic Logic*, 53, 1988.

TAIT, W. W.: «Finitism», *Journal of Philosophy*, 78, 1981, pp. 524-546.