El realismo estructural a debate: matemáticas, ontología y representación

(Structural Realism Under Debate: Mathematics, Ontology, and Representation)

Carlos M. MADRID CASADO

Recibido: 15 de octubre de 2008
Aceptado: 9 de diciembre de 2008

Abstract

The aim of this paper is to undermine *structural realism* by testing the soundness of its three main theses. The first section presents the *epistemic* and *ontic* forms of structural realism. The following section defends that if scientific theories represent the structure of the world, structural realism needs a general account of representation. Representation is the crux of structural realism. Section 3 argues that structure/ontology distinction collapses. Mathematical structures are ontology-laden. Lastly, section 4 is devoted to analyse whether there is a retention of mathematical structure across theory change.

Keywords: structural realism, retention of mathematical structure, structure/ontology distinction, scientific representation.

Resumen

El objetivo de este artículo es criticar el *realismo estructural* comprobando la consistencia de sus tres tesis principales. La primera sección presenta las formulaciones *epistémica* y *óntica* del realismo estructural. La siguiente sección defiende que si las teorías científicas representan la estructura del mundo, el realismo estructural necesita explicar qué entiende por representación. La noción de representación es la cruz del realismo estructural. La sección 3 argumenta que la distinción estructura/ontología colapsa. Las estructuras matemáticas están cargadas de ontología. Finalmente, la sección 4 está dedicada a analizar si la estructura matemática se conserva a través del cambio de teorías.

Palabras clave: realismo estructural, conservación de estructura matemática, distinción estructura/ontología, representación científica.

El realismo estructural, ¿es metafísica o epistemología?
James Ladyman (1998, p. 410)

1. Nuevos vinos en los viejos odres del realismo científico

Va ya para dos décadas que John Worrall (1989) dio carta de naturaleza a esa variante del realismo científico que él mismo bautizó como «realismo estructural». De entonces acá, este realismo científico no estándar ha cautivado la atención de la gran mayoría de filósofos realistas y antirrealistas de la ciencia. No en vano, muchos de ellos lo consideran como la versión de realismo científico más defendible, dado que se encuentra a medio camino entre el realismo clásico y el instrumentalismo. En principio, el realismo estructural nos ofrece –empleando la expresión de Worrall (1989, p. 99) que ha hecho fortuna– «lo mejor de ambos mundos».

En efecto, el realismo estructural pretende garantizar, simultáneamente, la inferencia realista a la verdad como mejor explicación del éxito de la ciencia y la inducción pesimista antirrealista a partir de la historia de la ciencia. Por una parte, el realista estructural defiende, con Putnam (1975), que el realismo es la única filosofía que no hace del éxito de la ciencia un milagro. Si las teorías científicas no fueran aproximadamente verdaderas, sería milagroso que realizaran predicciones tan acertadas. La verdad constituye la mejor explicación del éxito científico. Pero, por otra parte, el realista estructural reconoce, siguiendo a Laudan (1981), que a lo largo de la historia de la ciencia múltiples teorías, que en su momento fueron consideradas como verdaderas a la luz de su éxito, han sido posteriormente refutadas y abandonadas definitivamente. Teorías notablemente útiles y efectivas han terminado por ser reemplazadas por otras. Las revoluciones científicas han desencadenado cambios radicales en la esfera teórica.

Ahora bien, la pregunta es: ¿cómo acomodar, a un mismo tiempo, la «inferencia a la mejor explicación» y la «meta-inducción pesimista»? Worrall (1989) encontró la respuesta en Poincaré. Según Worrall (1989, p. 117), Poincaré postuló una suerte de «realismo *sintáctico* o *estructural*» bien diferente del instrumentalismo antirrealista que tradicionalmente asociamos con él. Estudiando la historia de la óptica matemática, Poincaré constató la conservación de las ecuaciones ópticas desde Fresnel a Maxwell. Y, lo que es más importante, se percató de que las ecuaciones de la física matemática expresan relaciones y, si las ecuaciones siguen siendo válidas, es porque las relaciones siguen siendo verdaderas. A través del cambio científico, como ejemplifica en óptica la pervivencia de las ecuaciones desde Fresnel a Maxwell o en física la existencia de casos límite, se conserva la estructura matemática. Y si las teorías nuevas retienen la estructura matemática de las teorías antiguas, es porque las estructuras matemáticas de las teorías científicas describen fielmente cómo se relacionan entre sí las entidades reales del mundo. Parafraseando a Poincaré, Worrall (1989, p. 118) asevera que «las ecuaciones expresan relaciones y si las ecuaciones siguen siendo verdaderas es porque las relaciones siguen siendo reales». Y concluye: «hay una continuidad o acumulación en el cambio, pero la continuidad es de la forma o estructura, no del contenido» (Worrall 1989, p. 117). En otras palabras, en la historia de la ciencia existe una continuidad en la estructura matemática, aunque no necesariamente en la ontología.

Ésta es la clave. Worrall da la razón a los antirrealistas en que la ontología no se conserva a través del cambio de teorías, porque la historia de la ciencia nos aporta suficientes ejemplos de entidades teóricas que un día fueron útiles y, al otro, desechadas. Pero, al mismo tiempo, Worrall (1994, p. 336) da buenas noticias al realista: «El realismo estructural entresaca una inducción optimista de la historia del cambio teórico en ciencia, pero es una inducción optimista con respecto al descubrimiento de la estructura matemática en vez de la ontología individual». El éxito de la ciencia se explica, precisamente, porque las teorías posteriores retienen la estructura matemática de las teorías anteriores, cuyas relaciones siguen siendo verdad, aunque la ontología asociada (los *relata*) deje de serlo. Gracias a la preservación de la estructura matemática a través del cambio teórico, el realista estructural puede desactivar la inducción pesimista (no comprometiéndose con la creencia en la ontología de las teorías) y, a la vez, legitimar la inferencia a la verdad como mejor explicación del éxito de la ciencia. La enorme capacidad predictiva de la ciencia se explica porque la estructura matemática de las teorías científicas refleja la estructura del mundo. Worrall defiende una suerte de realismo de teorías (estructuras) sin realismo de entidades. Sólo conocemos las relaciones entre cosas, no las cosas mismas. En el fondo, como apunta Ladyman (2007), esta idea está en germen en Poincaré, así como en Duhem o Russell.

El realismo estructural *á la* Worrall es de carácter epistemológico, por cuanto el punto de vista de Worrall es que sólo podemos conocer la estructura o forma del mundo, no su contenido o mobiliario. Las teorías científicas sólo nos informan de la estructura del mundo, permaneciendo la naturaleza del mundo (las entidades físicas) oculta (Cei & French 2006, p. 634). La ontología del mundo es incognoscible. En cambio, frente a este «realismo estructural epistémico», el realismo estructural de nuestro tiempo –liderado por Steven French y James Ladyman– toma partido por una posición ontológica y metafísica (French & Ladyman 2003, p. 31). Este «realismo estructural óntico» abraza –por decirlo con Psillos (2006, p. 561)– un «estructuralismo óntico», que consiste en creer que «todo lo que *hay* es estructura» y que «nuestras teorías científicas son capaces de capturar las estructuras *existentes* en el mundo» (Da Costa & French 2003, p. 189). El realismo estructural *á la* French y Ladyman asume que las estructuras son sustancias ontológicas primitivas. El mundo posee estructura (matemática, se entiende); y las relaciones y las estructuras son más reales que los objetos y las propiedades.

En cualquier caso, como subraya Psillos (1995, p. 20), la variedad óntica y la variedad epistémica concuerdan en tres tesis básicas del realismo estructural (RE):

(RE_1) Las teorías científicas nos desvelan, por medio de su estructura matemática, la estructura de la realidad.

(RE_2) Una estructura matemática es compatible con diferentes ontologías.

(RE_3) Las estructuras matemáticas sobreviven al cambio de teorías.

Además, el realismo estructural epistémico (REE) hace suya la siguiente tesis epistemológica: (REE_4) Conocemos la estructura del mundo, pero no sus componentes (ontología). A diferencia, el realismo estructural óntico (REO) sustenta esta otra tesis ontológica: (REO_4) La ontología del mundo no es radicalmente incognoscible, puesto que en esencia consiste en estructuras que podemos conocer.

El objetivo de este artículo es sacar a la luz y criticar tres pilares o presupuestos fundamentales del realismo estructural. Tanto la formulación epistémica como la óntica se sustentan en tres postulados no escritos. Tres hipótesis que, si el realista estructural no argumenta correctamente, son gratuitas. A saber:

En primer lugar, (RE_1) da por bueno que la estructura matemática de la teoría es capaz de representar, en sentido realista, la estructura del mundo. En §2 vamos a argumentar que la noción de representación es la cruz del realismo estructural. El realista estructural precisa de una relación de representación fuerte –por ejemplo, de isomorfismo– entre la estructura de la teoría y la estructura del mundo para poder garantizar la inferencia realista («las teorías *capturan* la estructura del mundo»). El análisis de los modelos matemáticos de la Mecánica Cuántica nos llevará a concluir que esta clase de representación no es, ni mucho menos, el caso.

En segundo lugar, (RE_2) y, por extensión, (REE_4) y (REO_4), se basan en que podemos distinguir con precisión la forma o estructura de nuestras teorías de su contenido u ontología. En §3 vamos a mantener que la distinción estructura/ontología (forma/contenido, formalismo/interpretación) no es clara ni distinta. Esta distinción, tal y como la emplean los realistas estructurales, colapsa. No existe un corte limpio entre la estructura y la ontología de nuestras teorías, esto es, entre el formalismo matemático y la interpretación física. Para mostrarlo, estudiaremos, una vez más, los modelos de la Mecánica Cuántica.

Por último, en tercer lugar, (RE_3) da por hecho que existe una continuidad matemática en la historia de las teorías científicas. En §4 argumentaremos que la historia de la ciencia aporta numerosos episodios en que la estructura matemática no se ha conservado y se ha perdido. Tomando como caso de estudio la evolución histórica de las estructuras matemáticas de la Mecánica Cuántica, comprobaremos cómo hay pérdidas irremediables de estructura.

2. La cruz del realismo estructural: la representación

Aceptemos, por el momento, las tesis (RE_3) y (RE_2), es decir, que la estructura matemática se conserva a través del cambio científico y que diferentes ontologías son compatibles con una misma estructura matemática. Y centrémonos en estudiar la validez de la tesis (RE_1), esto es, si la teoría captura la estructura de la realidad, si la estructura matemática nos revela la estructura del mundo.

Dentro de la concepción semántica de la ciencia, que concibe las teorías científicas como conjuntos de modelos, el estructuralismo (sea realista o empirista) es la corriente que sostiene que las teorías y los modelos nos informan de la estructura del mundo. El estructuralismo realista añade, además, que nos informan de la estructura completa (observable e inobservable) de la realidad. Por tanto, de acuerdo con French y Saatsi (2006, p. 556), «el realismo estructural es la concepción de que nuestras mejores teorías *representan* el mundo de modo aproximadamente correcto» (cursivas mías). O, como precisa Chakravartty (1998, p. 407), «la concepción de que la mayoría de las estructuras de las teorías físicas fundamentales *representan* correctamente las relaciones entre los objetos del mundo natural» (cursivas mías). Si las teorías científicas no *representasen* la estructura de la realidad, el éxito de la ciencia sería un milagro. Pero, ¿qué significa «*representar la estructura del mundo*»? ¿Cómo puede una estructura matemática representar algo que no es abstracto? La noción de representación supone un serio problema para el realismo estructural.[1]

La tentación pitagórica consiste en cortar por lo sano y replicar directamente, sin precaución alguna, que la estructura matemática de la teoría simplemente está copiando o reflejando la propia estructura matemática del mundo, como si la reali-

[1] De hecho, Van Fraassen (2006, pp. 536-539) acepta que el empirismo constructivo comparte este problema con el realismo estructural, puesto que su propia posición consiste en un estructuralismo empirista: un modelo es empíricamente adecuado si y sólo si *representa* la estructura de las apariencias. Van Fraassen (2002, p. 252) defiende que, si adoptamos su postura empirista, el problema puede solucionarse fácilmente: la estructura de la teoría no está representando la estructura del mundo, ni siquiera la estructura de las apariencias (algo que tampoco es abstracto), sino simplemente la estructura del modelo abstracto de los datos empíricos, que el científico elabora registrando sus observaciones. Ahora bien, esto no resuelve el problema, sino que únicamente lo desplaza: ¿cómo *representan* los modelos de los datos la estructura de los fenómenos? El estructuralismo, sea de corte empirista o realista, necesita –como señalan Brading y Landry (2006, p. 578)– precisar bien qué entiende por *representación*.

dad estuviera escrita en caracteres matemáticos. Pero el realista estructural puede hacerlo mucho mejor. Cuando afirma que la teoría representa el mundo quiere decir que la teoría y el mundo comparten, en cierto grado, la misma estructura. De otra manera: la estructura (matemática) de la teoría y la estructura (matematizable) del mundo son (parcialmente) isomorfas (French 2000 y 2003; Bueno, French y Ladyman 2002; Da Costa y French 2003). Ahora bien, ¿no nos conducirá este postulado de isomorfismo estructural entre la teoría y el mundo a un callejón sin salida?

Para contestar, vamos a detenernos en el estudio del periodo fundacional de la Mecánica Cuántica, analizando la construcción del formalismo y la interpretación canónicas, desde 1925 hasta 1932, cuando quedan cerrados en sus líneas principales. Partiendo de la Mecánica Matricial de Heisenberg-Born-Jordan y de la Mecánica Ondulatoria de Schrödinger, vamos a comprobar cómo la cuestión de la equivalencia empírica y matemática, aunque no ontológica, entre ambas mecánicas cuánticas sirvió de acicate para el desarrollo de toda una serie de nuevas estructuras por parte de Dirac y Von Neumann. Este caso histórico estrella nos va a servir de piedra de toque del realismo estructural.

Aunque se apuntó éxitos importantes gracias a Planck, Einstein y Bohr, la Teoría Cuántica Antigua era momentánea y provisional, por cuanto fracasaba en presentar una axiomática coherente independiente de las teorías clásicas. En 1925, Werner Heisenberg sentó las bases de la Mecánica Matricial (a partir de ahora, MM). Heisenberg insistía en que las órbitas de los electrones en el átomo eran inobservables; pero que, a partir de la radiación emitida por el átomo, podían deducirse las frecuencias y las amplitudes de los electrones. Este conjunto de números observables podía considerarse como una descripción del estado del sistema dentro de la nueva mecánica, aunque ya no fuera posible interpretarlo en el sentido de una trayectoria. Por así decirlo: los coeficientes de Fourier –frecuencias y amplitudes– se habían independizado. Heisenberg obtuvo la magnitud cuántica (Q ó P) que había que sustituir por cada magnitud clásica (q ó p); y comprobó que, a diferencia de las clásicas, las magnitudes cuánticas generalmente no conmutaban ($QP \neq PQ$ pero $qp = pq$). Varios meses después, Max Born y Pascual Jordan reconocerían que los conjuntos de números heisenbergianos Q y P se comportaban como matrices matemáticas, pese a que el propio Heisenberg no sabía lo que era una matriz según confesó: «ahora los ilustrados matemáticos de Gotinga hablan mucho de matrices hermíticas, pero yo ni siquiera sé lo que es una matriz» (Bombal 1999, p. 125). Trabajando codo con codo, los «Tres Hombres» darían con la llamada «condición cuántica exacta»: $PQ - QP = (h/2\pi i)I$; única ecuación de MM en que entraba en juego la constante de Planck h. Felizmente, a principios de 1926, Wolfgang Pauli dedujo el espectro del átomo de hidrógeno dentro del marco matricial. Pero la labor de Heisenberg-Born-Jordan sufrió una fría acogida, a causa de su mística aunque inspirada matemática.

Al igual que gran parte de la vieja escuela, pero a diferencia de los jóvenes físicos y matemáticos de Gotinga y Copenhague, Erwin Schrödinger no se sentía especialmente cómodo con la Mecánica Cuántica de Heisenberg-Born-Jordan. Buscando una teoría más intuitiva y visualizable, que sólo empleara las herramientas matemáticas de toda la vida (es decir, las ecuaciones diferenciales de siempre, en lugar de las misteriosas matrices), Schrödinger descubrió su celebrada ecuación de ondas en la Navidad de 1925. Con los primeros meses de 1926, los cuatro artículos que constituyeron el núcleo de la Mecánica Ondulatoria (a partir de ahora, MO) vieron la luz. Schrödinger concibió el movimiento del electrón como si se tratara de un movimiento ondulatorio, cuya función de onda Ψ sería la encargada de describir el estado del sistema. Reemplazó las ecuaciones fundamentales de la mecánica y las viejas condiciones cuánticas por una ecuación diferencial de ondas, de la que logró deducir los niveles energéticos del átomo de hidrógeno. Haciendo caso omiso de los prejuicios positivistas de Heisenberg, Schrödinger ofreció una interpretación física acorde con el formalismo matemático, y que parecía bastante natural: la concepción de los electrones como ondas materiales. Si había una ecuación de ondas, tenía que haber ondas. Los trabajos de Schrödinger tuvieron una acogida excepcional.

Así pues, el panorama que se les presentaba a los físicos cuánticos a comienzos de la primavera de 1926 difícilmente podía resultar más paradójico: disponían de dos mecánicas (matricial y ondulatoria) que salvaban los mismos fenómenos, pese a que cada una de ellas utilizaba enfoques muy diferentes (algebraico *vs.* analítico) y proyectaba una concepción muy distinta del microcosmos (discontinua *vs.* continua). En efecto, mientras que MM se constituía, según sus creadores, como una «verdadera teoría del discontinuo», que acentuaba una concepción corpuscular del átomo; MO surgía como una «nueva física del continuo», que abrazaba una visión ondulatoria del átomo (Jammer 1989, p. 270). Schrödinger (1982, pp. 45-46) constataba que los formalismos y las interpretaciones (las estructuras y las ontologías) no podían ser más dispares:

> En el trabajo de Heisenberg las variables clásicas continuas son reemplazadas por conjuntos discretos de magnitudes numéricas (matrices), que dependen de un par de índices enteros y están definidos por ecuaciones algebraicas. Los propios autores describen la teoría como una «verdadera teoría del discontinuo». Por su parte, la Mecánica Ondulatoria muestra justamente la tendencia contraria; es un paso desde la mecánica clásica de partículas hacia una *teoría del continuo*. En lugar de un proceso descrito en términos de un número finito de variables dependientes de una cantidad finita de ecuaciones diferenciales, tenemos una suerte de campo continuo en un espacio de configuración gobernado por una única ecuación en derivadas parciales deducida de un principio de acción.

Si Schrödinger (1982, p. 46) calificaba la Mecánica de Matrices de «contraintuitiva», Heisenberg escribía en carta privada a Pauli: «cuanto más pienso en los aspectos físicos de la Mecánica de Ondas, más repulsiva me parece [...] en otras palabras: es una mierda [*sic*]» (Fernández-Rañada 2004, p. 90). Y, sin embargo, MM y MO explicaban y predecían los mismos fenómenos. Por ejemplo: ambas mecánicas arrojaban los mismos valores energéticos para el átomo de hidrógeno. De otra manera, MM y MO eran empíricamente equivalentes. Pero, ¿por qué? Schrödinger, Eckart y Pauli tuvieron, casi simultáneamente, la misma idea feliz: MM y MO son empíricamente equivalentes porque son matemáticamente equivalentes. La equivalencia matemática explicaría, desde luego, la equivalencia empírica. En palabras de Schrödinger (1982, p. 45):

> Considerando las extraordinarias diferencias entre los puntos de partida y los conceptos de la Mecánica Cuántica de Heisenberg y la teoría que ha sido designada como Mecánica "Ondulatoria" o "Física", y ha sido descrita aquí, es muy extraño que estas dos teorías nuevas concuerden *cada una con la otra* con respecto a los hechos conocidos en que difieren de la Teoría Cuántica Antigua. [...] En realidad, esto es muy remarcable, porque los puntos de partida, las presentaciones, los métodos y, de hecho, todo el aparato matemático parecen fundamentalmente diferentes. […] En lo que sigue, la íntima *conexión interna* entre la Mecánica Cuántica de Heisenberg y mi Mecánica Ondulatoria será desvelada. Desde la base formal matemática, uno bien podría hablar de la *identidad* de las dos teorías.

Las pruebas de equivalencia matemática entre MM y MO ideadas por Schrödinger, Eckart y Pauli son prácticamente similares; pero, pese a lo que comúnmente se admite, no son del todo correctas (Muller 1998a y 1998b; Madrid Casado 2006, 2007 y 2008). Estos físicos demuestran –con gran dificultad– que MO$\rightarrow$MM, pero no que MM$\rightarrow$MO. En otros términos: prueban que MO está contenida en MM, pero no que MM está contenida en MO. Los tres logran mostrar cómo construir las matrices Q y P a partir de las funciones de onda Ψ; pero no son capaces de recorrer el camino inverso, es decir, de recuperar las funciones de onda Ψ a partir de las matrices numéricas Q y P.

Durante el otoño de 1926, estudiando la relación entre ambas teorías, P.A.M. Dirac descubre que MM y MO no son sino dos casos particulares de una estructura formal mucho más general: la Teoría de las Transformaciones. Dirac (1927) prueba que MM y MO son dos representaciones o imágenes del álgebra cuántica, esto es, del álgebra no conmutativa formada por las magnitudes cuánticas o *q-numbers*, según se vean como matrices o como operadores de onda. Por decirlo en términos lógicos, MM y MO son dos modelos del álgebra cuántica (MQ): MM $\models$ MQ y MO $\models$ MQ. Pero existen muchas más representaciones o imágenes posibles (por ejemplo, la representación de momentos o la representación de Dirac). ¿Son todas equivalentes entre sí? En particular, ¿lo son la matricial y la ondulatoria? Es decir, por decirlo otra vez en términos lógicos, ¿es el álgebra cuántica categórica, esto es, son todos sus modelos –en concreto, el matricial y el ondulatorio- equivalentes entre sí: $\vdash MM \leftrightarrow MO$? Dirac (1930), al igual que Weyl (1928), lo conjetura; pero son Marshall Stone (1930) y, en rigor, John von Neumann (1931) quienes lo demostrarán tiempo después: todas las soluciones de $PQ - QP = (h/2\pi i)I$ son, esencialmente, idénticas. Pero, aún más, en su intento por unificar MM y MO, Dirac recurre a una ficción matemática conocida como «función delta de Dirac», un extraño ente matemático que a Von Neumann le parecía absurdo y cuyo triste sino fue tener que esperar hasta 1950 para encontrar una base matemática consistente dentro de la Teoría de Distribuciones.

Para Von Neumann (1927), prometedor discípulo de Hilbert, la relación entre ambas mecánicas no debía plantearse a través de la Teoría de las Transformaciones sino por medio de la Teoría de Operadores y el Análisis Funcional. Tras cinco años de arduo trabajo, Von Neumann (1932) construye la primera prueba de equivalencia matemática rigurosa y completa, unificando MM y MO en una Mecánica Cuántica muy general, cuyo marco matemático es la estructura abstracta que denominó «espacio de Hilbert» en honor a su maestro. Tras introducir su definición axiomática, Von Neumann reconstruye MM y MO como sendos cálculos de operadores sobre espacios de Hilbert (respectivamente, sobre el espacio de las sucesiones de cuadrado sumable –las columnas de las matrices– y sobre el espacio de las funciones de cuadrado integrable –las funciones de onda–). Y, a continuación, demuestra que la Mecánica de Heisenberg (centrada en matrices y sumas) y la Mecánica de Schrödinger (centrada en funciones e integrales) son matemáticamente equivalentes al no ser más que dos cálculos de operadores isomorfos sobre dos espacios de Hilbert isomorfos (isométricos). La estructura de la Mecánica Cuántica era, por ende, solidaria de la del espacio de Hilbert.

En resumidas cuentas, MM y MO son empíricamente equivalentes porque son matemáticamente equivalentes, al constituir dos realizaciones isomorfas de la misma estructura abstracta (el espacio de Hilbert). Sin embargo, como fue dicho, a pesar de esta relación sintáctica de isomorfismo que media entre sus estructuras matemáticas, cuando miramos al mundo alternativamente desde MM o MO aparecen diferencias semánticas irreconciliables (discontinuidad / continuidad, corpúsculos / ondas, etc). Las estructuras que MM y MO prescriben a la realidad no son, ni mucho menos, equivalentes (isomorfas). En efecto, MM proyecta sobre el mundo una estructura discreta, dado que su realización del espacio de Hilbert –el espacio de las sucesiones de cuadrado sumable– es discreta, lo que llevaba a Born y Jordan a referirse a MM como una «verdadera teoría del discontinuo» y acentuaba una visión corpuscular del mundo atómico. En cambio, MO proyecta sobre la realidad una estructura continua, dado que su realización del espacio de Hilbert –el espacio de las funciones de cuadrado integrable– es continua, lo que provocaba que Schrödinger hablara de MO como de una «nueva física del continuo» y se asociaba con una concepción ondulatoria del microcosmos.

Ahora bien, atención, desde el punto de vista del realista estructural, la estructura matemática de la teoría captura isomórficamente la estructura óntica de la realidad, aunque quizás no su ontología. Por tanto, si dos teorías son matemáticamente equivalentes, es decir, si sus estructuras matemáticas son isomorfas, el realista estructura tiene que esperar que sus estructuras ónticas también lo sean, esto es, que ambas teorías nos ofrezcan una misma estructura de la realidad, aunque seguidamente puedan divergir en el mobiliario que le atribuyen. Pero, hete aquí, que las estructuras matemáticas de MM y MO son isomorfas y, sin embargo, las estructuras que MM y MO proyectan sobre la realidad no lo son ni pueden serlo, porque presentan distinta cardinalidad. Una es discreta y otra es continua. A pesar de su equivalencia matemática, MM y MO prescriben estructuras ónticas incompatibles. MM y MO no son *estructuralmente equivalentes*.

Worrall (1994) y Ladyman (1998) remarcan que, de acuerdo con el realismo estructural, las teorías científicas capturan la estructura del mundo, pero que capturar la estructura del mundo es compatible con introducir ontologías radicalmente distintas, porque una misma estructura puede ser instanciada de diferentes maneras. Sin embargo, hay que advertir que nuestra argumentación funciona sin necesidad de comprometer a los realistas estructurales con la creencia en determinadas ontologías (en cuyo caso, habríamos insistido en que las ontologías de MM y MO no casan: partículas *adversus* ondas). Nos basta con forzar al realista estructural a que reconozca que las estructuras ónticas de MM y MO no son isomorfas, porque una es discreta y otra es continua, como herencia de las estructuras matemáticas respectivas. Por encima de que MM y MO nos dibujen un mundo poblado de corpúsculos u ondas respectivamente, ambas teorías ya nos están presentando dos mundos estructuralmente incompatibles (discreto *adversus* continuo). Las estructuras matemáticas de MM y MO son equivalentes, pero sus estructuras ónticas y, yendo más allá, sus ontologías no lo son, es más, son contradictorias.

En suma, la noción de representación supone un problema para el realista estructural si se concibe en términos de isomorfismo. De hecho, los propios Bueno, French y Ladyman (2002, p. 503) reconocen que el «argumento de la cardinalidad» es una amenaza seria. Y, ¿qué sucede si interpretamos la noción de representación de un modo más débil? Retomando la propuesta pionera de Mundy (1986), Bueno, French y Ladyman (2002) conciben la relación de representación como homomorfismo (parcial). La objeción es, como asegura Psillos (2001, pp. S13-S16), que esta noción es demasiado débil para legitimar la inferencia realista. En efecto, mientras que un isomorfismo es bidireccional, un homomorfismo es unidireccional. Los homomorfismos proyectan las propiedades del dominio en el rango o recorrido;

pero, a diferencia de los isomorfismos, no garantizan que las propiedades del rango o recorrido se conserven en el dominio. Si la relación entre la teoría (dominio) y el mundo (recorrido) se caracteriza empleando homomorfismos, se garantiza la deducción de arriba abajo (teoría $\rightarrow$ mundo) pero no de abajo arriba (mundo $\rightarrow$ teoría), con lo que la inferencia realista estructural («la teoría captura la estructura del mundo») es ilegítima. El mundo podría tener mucha más estructura que la teoría. Sin una relación representacional fuerte (de isomorfismo), los realistas estructurales tienen muy difícil establecer cualquier clase de inferencia sobre la estructura óntica del mundo a partir de la estructura matemática de nuestras teorías.

3. La distinción estructura/naturaleza y la carga ontológica de las matemáticas

La argumentación que hemos expuesto en la anterior sección encierra la pista que nos va a guiar para poner en entredicho la tesis (RE_2) y la propia distinción estructura/naturaleza en que se fundamenta. Fue Worrall (1989, p. 117) quien acuñó esta distinción analizando, de la mano de Poincaré, la evolución de las ecuaciones en óptica: «Fresnel identificó de modo completamente erróneo la *naturaleza* de la luz, pero no es ningún milagro que su teoría disfrutase del éxito empírico predictivo que tuvo; no es ningún milagro, porque la teoría de Fresnel, como lo vio la ciencia posterior, atribuyó a la luz la *estructura* correcta». El realismo estructural acepta, por principio, que podemos distinguir, separar y disociar una estructura y una naturaleza (ontología) en las teorías científicas. La estructura sería el formalismo matemático de la teoría; y la ontología o naturaleza vendría dada por la interpretación física de la teoría, por la colección de entidades teóricas. En el ejemplo de Worrall-Poincaré, la estructura estaría representada por las ecuaciones matemáticas de la óptica; y la ontología, por su parte, por la concepción corpuscular u ondulatoria de la luz. Ahora bien, ¿es siempre posible demarcar con precisión la estructura de la ontología?

A nuestro entender, no existe un corte limpio entre ambas y, en consecuencia, no se puede ser realista con respecto a las estructuras y, al tiempo, antirrealista con respecto a los objetos que contienen. El «semirrealismo», como lo denomina Anjan Chakravartty (1998), es altamente inestable; porque el realismo acerca de las estructuras teóricas implica, naturalmente, el realismo acerca de las entidades. Por decirlo en términos escolásticos: la forma es inseparable de la materia. Uno no puede creer que ciertas relaciones estructurales son reales a menos que también acepte que ciertas cosas están relacionadas: si una relación es cierta, los elementos de que se predica han de existir. No es posible que las estructuras se mantengan y, simultáneamente, las entidades vengan y vayan con total libertad. La distinción entre la verdad de las relaciones y la verdad acerca de los *relata* no marcha: «si dos teorías poseen la misma estructura, o la estructura de una teoría se preserva en una segunda, las entidades teóricas invocadas por la primera pueden ser transportadas en contrapartidas de la segunda» (Chakravartty 1998, pp. 401-402). El realismo de estructuras implica, correctamente entendido, el realismo de entidades.

Pero aún hay más: la ocurrencia del realista estructural de que lo que se conserva a través del cambio científico es la estructura matemática –las ecuaciones se preservan o sobreviven como casos límite– y no su contenido, siendo diferentes ontologías compatibles con una misma estructura, dista de ser cierta, ya que toda estructura matemática conlleva aparejada una *carga ontológica*. La estructura matemática no puede separarse de la ontología física, porque no existe algo así como una neutralidad ontológica de las matemáticas. Ningún lenguaje –ni siquiera el matemático– es neutro en la descripción del mundo. No es lo mismo que los elementos estructurales de la Mecánica Cuántica sean –como en MM– matrices discretas, que remiten a una ontología discontinua o corpuscular, o que sean –como en MO– funciones continuas, que remiten a una ontología continua u ondulatoria. El formalismo condiciona e, incluso, determina la interpretación, porque el aparato matemático empleado arrastra un *peso ontológico*.

No cualquier interpretación es compatible con un formalismo. Nuestro caso de estudio nos aporta un ejemplo estrella: ¿Por qué Schrödinger propuso una interpretación ondulatoria del formalismo de MO? Porque si había una ecuación de ondas, tenía que haber ondas; así como recíprocamente: si había ondas, tenía que haber una ecuación de ondas. La historia de la Mecánica Cuántica nos ofrece mil y un ejemplos de esta fértil dialéctica. Muchas veces, el formalismo sugiere la interpretación. Por ejemplo: en la formulación de la Mecánica Cuántica obra de Feynman, la utilización de la herramienta matemática conocida como integral de camino prácticamente sugiere la interpretación como suma de historias. Otro ejemplo: en la Mecánica Bohmiana, la propiedad de existencia y unicidad global de solución de la ecuación de puntos-guía, que implica que las trayectorias no pueden cortarse ni fusionarse, precisamente posibilita la interpretación realista y determinista. Otras veces, en cambio, la búsqueda o la defensa de una determinada interpretación sugiere qué modificaciones introducir en el formalismo. A día de hoy, con el espectacular desarrollo de la física teórica, no es posible discernir cuándo dejamos de hacer matemáticas y comenzamos a hacer física. No en vano, 2/3 de un físico teórico de nuestro tiempo son de matemático puro.

En suma, la distinción estructura/ontología no se sostiene, porque «ambas forman un continuo» (Psillos 1995, p. 31, y 1999, p. 157). La *carga ontológica* de las matemáticas no es despreciable y, por consiguiente, la propia posibilidad de discernir la estructura matemática de la ontología de las teorías físicas, como si existiera una frontera o fueran dos mundos independientes, parece un espejismo. Es más, la propia distinción estructura/ontología o, por decirlo en términos más físicos, formalismo/interpretación fue introducida por Heisenberg en el contexto de nuestro caso de estudio. Muller (1997b, pp. 242-243) especula que Heisenberg la introdujo para defender MM frente a MO. Cuando los mecánicos matriciales se sintieron atraídos por la más manejable MO, Heisenberg afirmó, para no dar su brazo a torcer y abandonar la compleja MM, que aceptaban el formalismo de Schrödinger pero no su interpretación ondulatoria, prefiriendo la interpretación estadística de Born. Pero la prueba de que no había ni hay un corte claro entre el formalismo y la interpretación, es que esta última interpretación no dejaba inalterado el formalismo, puesto que introducía espacios y medidas de probabilidad, esto es, nueva estructura matemática. De hecho, Muller (1997b, p. 244) concluye: «Distinción formalismo/interpretación, descansa en paz».

Desde las filas del realismo estructural, French y Ladyman (2003, p. 37) responden las críticas divorciando radicalmente el realismo estructural de cualquier compromiso con ontologías de individuos: «una formulación del realismo adecuada a la física precisa estar construida sobre la base de una ontología alternativa que reemplace la noción de objeto por la de estructura». El mundo no consistiría en objetos, sino sólo en estructuras. Pero, entonces, como apunta Van Fraassen (2007, p. 55): «¿Tiene sentido concebir una estructura que no es estructura de algo? *Una estructura de nada es nada*». Aún más, retraduciendo, ¿tiene algún sentido pensar que el formalismo sin interpretar sea el entero responsable del éxito de las teorías científicas?

En resumidas cuentas, el estatus ontológico de los formalismos matemáticos está muy lejos de ser claro. Por ejemplo, centrándonos otra vez en la Mecánica Cuántica, ¿por qué la utilidad debería ser un argumento para creer en la existencia de algo así como los espacios multidimensionales de Hilbert en la realidad? Sin embargo, repetimos, el problema no es tanto si existen los espacios de Hilbert de la Mecánica Cuántica, sino sobre qué espacio de Hilbert (el discreto de la Mecánica Matricial o el continuo de la Mecánica Ondulatoria) somos realistas, porque cada uno de ellos conlleva –pese a ser matemáticamente equivalentes– una *carga ontológica* muy distinta (discreto/continuo, corpúsculos/ondas). Confiado en la realidad de la estructura abstracta del espacio de Hilbert, el realista estructural no tiene más opción que ser realista tanto con respecto a la realización discreta como con respecto a la continua; a la manera que el matemático formalista, que trabaja clausurado en su sistema axiomático, no tiene más que aceptar que los números reales poseen tanto modelos estándar como modelos numerables no estándar (paradoja de Skolem). Pero este paso entraña numerosas dificultades, porque no hay una única imagen o representación del mundo cuántico asociada con ambos tipos de estructura (dualidad onda-corpúsculo). El famoso argumento de la teoría de modelos *á la* Putnam funciona, por así decir, contra el realismo estructural. No basta con aferrarse al formalismo cuántico y afirmar que las estructuras que éste satisface son las únicas en que cree el realista estructural, porque el formalismo cuántico no establece qué interpretación es la correcta. Con más precisión: cada estructura que satisface el formalismo sugiere una determinada interpretación, conlleva una cierta subestructura óntica distinta. Afirmar con Worrall (1998, p. 123) que «el realista estructural simplemente asevera que la estructura del universo es (probablemente) alguna como la mecánico-cuántica» no es decir mucho a favor del realismo.

4. La proliferación de estructuras y la inconmensurabilidad de las matemáticas

Sólo nos resta examinar si la tesis (RE_3) del realismo estructural es plausible. La continuidad de las estructuras matemáticas, que postula la tesis antedicha, se materializa mediante dos mecanismos: o bien las ecuaciones matemáticas se preservan intactas de una teoría a otra, o bien sobreviven como casos límite. La historia de la física nos ofrece, es cierto, muchos casos de conservación de la estructura matemática: aparte del ejemplo de Worrall relativo a la preservación de las ecuaciones ópticas de Fresnel a Maxwell, la Mecánica Clásica se recupera como caso límite de la Teoría de la Relatividad (cuando las velocidades son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz). Y, por su parte, en la transición desde las Mecánicas Cuánticas de Heisenberg o Schrödinger a la Mecánica Cuántica de Von Neumann puede verse una continuidad en la pervivencia de la estructura matemática subyacente al espacio de Hilbert.

De hecho, esta conservación de la estructura matemática, que tanto gusta al realista estructural, puede hacerse extensible a las modernas reformulaciones de la Mecánica Cuántica de Dirac, llevadas a cabo empleando los «espacios de Hilbert aparejados o enjarciados», que constituyen una ampliación o generalización de los espacios de Hilbert clásicos. En efecto, con el paso del tiempo, allá por los años 50 y 60, gracias a los trabajos de Schwartz y Grothendieck en Análisis Funcional, las funciones delta adquirieron carta de naturaleza matemática al ser formalizadas como distribuciones. Así, el formalismo de Dirac logró adquirir una sólida fundamentación matemática, dentro de los «espacios enjarciados o aparejados de Hilbert» o «tripletes de Gelfand», que fueron aplicados a la teoría cuántica por Arno Bohm (1966), Roberts (1966) y Melsheimer (1972). El proyecto consistió en ligar lo mejor del formalismo de Von Neumann (el riguroso espacio de Hilbert) y lo mejor del formalismo de Dirac (la útil función delta) dentro de una estructura matemática consistente. Con este fin, se procuró ir más allá del espacio de Hilbert de cara a incorporar objetos tan singulares como la función delta, pero sin perder al mismo tiempo su buena geometría. La solución fue considerar una estructura alrededor del espacio de Hilbert siguiendo el espíritu de la Teoría de Distribuciones: se toma el espacio de Hilbert usual y se equipa con otros dos espacios, uno más pequeño y otro más grande, que contienen respectivamente a todas las funciones *buenas* (funciones *test*) y a todas las funciones *malas* (funciones *singulares*, como la distribución δ de Dirac). Al conjunto de estos tres espacios es a lo que se denomina espacio «enjarciado» o «equipado» de Hilbert (Gadella & Gómez 2002).

Sin embargo, esta continuidad matemática tan querida por el realista estructural salta por los aires cuando simplemente tomamos en consideración la Teoría Cuántica de Weyl, cuya estructura es la teoría de grupos, o las Teorías Cuánticas de Campos, en donde existen múltiples representaciones sobre espacios de Hilbert no equivalentes entre sí. En efecto, en la física de partículas elementales, los físicos emplean paralelamente las estructuras de la teoría de grupos que Weyl (1928) y Wigner (1931) introdujeron de espaldas a la teoría de espacios de Hilbert que postuló Von Neumann (1927 y 1932), considerando que la teoría de representación de grupos mediante transformaciones lineales (la parte más importante matemáticamente de la teoría de grupos) era totalmente necesaria para describir adecuadamente las relaciones mecánico-cuánticas. Y en la Teoría Cuántica de Campos, aparecen –al existir infinitos grados de libertad– espacios de Hilbert no isomorfos entre sí, con propiedades estructuralmente incompatibles (Summers 2006). Por consiguiente, existen pérdidas de estructura en la historia de la física, y éstas pueden ser de dos clases: *débiles* y *fuertes*. Hay una pérdida *débil* de estructura cuando, al proliferar nuevas estructuras matemáticas a partir de un tronco común, se pierde la equivalencia (el isomorfismo entre las estructuras). A ojos del realista estructural, esta patología es realmente grave; por cuanto, desde su óptica, sólo conocemos el mundo salvo isomorfismo y, si se pierde la isomorfía, el mundo se vuelve esquizofrénico. El realista estructural necesita un único formalismo, que unifique todas las estructuras, algo que no ocurre en el ámbito de la Teoría Cuántica de Campos. Y hay una pérdida *fuerte* de estructura cuando aparecen simultáneamente estructuras de raigambre matemática completamente distinta para un mismo dominio, como las formulaciones de Von Neumann y Weyl-Wigner en Mecánica Cuántica, y que por tanto son inconmensurables matemáticamente.

5. Balance: las fisuras del realismo estructural

Nuestro objetivo era decidir la validez de los tres principios fundamentales del realismo estructural. Nuestro estudio ha intentado argumentar que la estructura matemática de las teorías científicas no captura la estructura *metafísica* del mundo (RE_1), que las estructuras no pueden separarse de las ontologías (RE_2) y que existen pérdidas de estructuras en el cambio de teorías (RE_3). Además, hemos pergeñado una idea que atenta directamente contra la viabilidad del realismo estructural: la carga ontológica de la matemática. En efecto, si toda estructura matemática porta un peso ontológico, el realismo de estructuras no es sino un realismo de teorías disfrazado.

En el fondo, a nuestro entender, pese a su apariencia de novedad, el realismo estructural degenera en un realismo científico estándar, que resucita o hereda los principales defectos que lastran el realismo clásico. En especial, la invocación al «fantasma» de la representación. Con otras palabras, la dependencia crónica de cierta dosis de representacionismo entre la teoría y el mundo, aunque ahora sólo sea (supuestamente) a un nivel estructural. Si los realistas estructurales no aclaran la noción de representación, la defunción del realismo estructural será cuestión de tiempo. Y si prescinden de ella, el deslizamiento hacia un empirismo estructural será inevitable.

Referencias bibliográficas

BOHM, A. (1966): «Rigged Hilbert Space and Mathematical Description of Physical Systems», *Lectures in Theoretical Physics*, 94, pp. 1-88.

BOMBAL, F. (1999): «Los modelos matemáticos de la Mecánica Cuántica», en *La Ciencia en el siglo XX. Seminario "Orotava" de Historia de la Ciencia*, Consejería de Educación del Gobierno de Canarias, Islas Canarias, pp. 115-146.

BRADING, K. & LANDRY, E. (2006): «Scientific Structuralism: Presentation and Representation», *Philosophy of Science*, 73, pp. 571-581.

BUENO, O., FRENCH, S. & LADYMAN, J. (2002): «On representing the relationship between the mathematical and the empirical», *Philosophy of Science*, 69, pp. 497-518.

CEI, A. & FRENCH, S. (2006): «Looking for Structure in all the Wrong Places: Ramsey Sentences, Multiple Realizability, and Structural Realism», *Studies in History and Philosophy of Science*, 37, pp. 633-655.

CHAKRAVARTTY, A. (1999): «Semirealism», *Studies in History and Philosophy of Science*, 29, pp. 391-408.

DA COSTA, N. & FRENCH, S. (2003): *Science and Partial Truth*, Oxford University Press, Oxford.

DIRAC, P. A. M. (1927): «The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics», *Proc. R. Soc. London*, A113, pp. 621-641.

DIRAC, P. A. M. (1930): *The Principles of Quantum Mechanics,* Clarendon Press, Oxford.

FERNÁNDEZ-RAÑADA, A. (2004): *Ciencia, incertidumbre y conciencia. Heisenberg,* Editorial Nivola, Madrid.

FRENCH, S. (2000): «The Reasonable Effectiveness of Mathematics: Partial Structures and the Application of Group Theory to Physics», *Synthese*, 125, pp. 103-20.

FRENCH, S. (2003): «A Model-Theoretic Account of Scientific Representation (Or, I Don't Know Much About Art… But I Know It Involves Isomorphism)», *Philosophy of Science*, 70, pp. 1472-1483.

FRENCH, S. & LADYMAN, J. (2003): «Remodelling Structural Realism: Quantum Physics and the Metaphysics of Structure», *Synthese*, 136, pp. 31-56.

FRENCH, S. & SAATSI, J. (2006): «Realism about Structure: The Semantic View and Nonlinguistic Representations», *Philosophy of Science*, 73, pp. 548-559.

GADELLA, M. & GÓMEZ, F. (2002): «A Unified Mathematical Formalism for the Dirac Formulation of Quantum Mechanics», *Foundations of Physics*, 32/6, pp. 815-845.

JAMMER, M. (1989): *The Conceptual Development of Quantum Mechanics,* Tomash Publishers, American Institute of Physics.

LADYMAN, J. (1998): «What Is Structural Realism?», *Studies in the History and Philosophy of Science*, 13, pp. 99-117.

LADYMAN, J. (2007): «Structural Realism», en *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <http://plato.stanford.edu/entries/structural_realism/>.

LAUDAN, L. (1981): «A Confutation of Convergent Realism», *Philosophy of Science*, 48, pp. 19-49.

MADRID CASADO, C. M. (2006): «Ochenta años de la equivalencia entre Mecánicas Cuánticas», *Revista Española de Física*, 20/3, p. 57.

MADRID CASADO, C. M. (2007): «De la equivalencia matemática entre la Mecánica Matricial y la Mecánica Ondulatoria», *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 10/1, pp. 103-128.

MADRID CASADO, C. M. (2008): «A brief history of the mathematical equivalence between the two quantum mechanics», *Lat. Amer. J. Phys. Ed.*, 2/2, pp. 104-108.

MELSHEIMER, O. (1972): «Rigged Hilbert Space Formalism as an Extended Mathematical Formalism for Quantum Systems», *Journal of Mathematical Physics*, 15, pp. 902-926.

MULLER, F. A. (1997a y b): «The Equivalence Myth of Quantum Mechanics (I & II)», *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.*, 28/1 y 2, pp. 35-61 y 219-247.

MUNDY, B. (1986): «On the General Theory of Meaningful Representation», *Synthese*, 67, pp. 391-437.

PSILLOS, S. (1995): «Is structural realism the best of both worlds?», *Dialectica*, 49, pp. 15-46.

PSILLOS, S. (1999): *Scientific Realism: How Science Tracks Truth*, Routledge, Londres.

PSILLOS, S. (2001): «Is Structural Realism Possible?», *Philosophy of Science*, 68, pp. S13-S24.

PSILLOS, S. (2006): «*The* Structure, the *Whole* Structure, and Nothing *but* the Structure», *Philosophy of Science*, 73, pp. 560-570.

PUTNAM, H. (1975): *Mathematics, Matter and Method. Philosophical Papers Vol. 1*, Cambridge University Press, Cambridge.

ROBERTS, J. (1966): «Rigged Hilbert Space in Quantum Mechanics», *Communications in Mathematical Physics*, 3, pp. 98-119.

SCHRÖDINGER, E. (1982): *Collected Papers on Wave Mechanics*, Chelsea Publishing Company, Nueva York.

STONE, M. H. (1930): «Linear transformations in Hilbert space. Operational methods and group theory», *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 16, pp. 172-175.

SUMMERS, S. J. (2006): «On the Stone-Von Neumann uniqueness theorem and its ramifications», en M. Redéi (ed.), *John von Neumann and the Foundations of Quantum Mechanics*, Kluwer, Dordrecht, pp. 135-152.

VAN FRAASSEN, B. (2002): *The Empirical Stance*, Yale University Press, New Haven.

VAN FRAASSEN, B. (2006): «Representation: The Problem for Structuralism», *Philosophy of Science*, 73, pp. 536-547.

VAN FRAASSEN, B. (2007): «Structuralism(s) about Science: Some Common Problems», *Proceedings of the Aristotelian Society*, LXXXI, pp. 45-61.

VON NEUMANN, J. (1927): «Mathematische Begründung der Quantenmechanik», *Nachrichten Göttingen*, pp. l-57.

VON NEUMANN, J. (1931): «Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren» en *Mathematische Annalen*, 104, pp. 570-578.

VON NEUMANN, J. (1932): *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlín.

WEYL, H. (1928): *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Hirzel, Leipzig.

WIGNER, E. (1931): *Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, Nueva York.

WORRALL, J. (1989): «Structural Realism: The Best of Both Worlds?», *Dialectica*, 43, pp. 99-124.

WORRALL, J. (1994): «How to Remain (Reasonably) Optimistic: Scientific Realism and the "Luminiferous Ether"», en D. Hull, M. Forbes & R. M. Burian (eds.), *PSA 1994 Vol. 1*, Philosophy of Science Association, East Lansing, pp. 334-342.

Carlos M. Madrid Casado
Departamento de Matemáticas
Instituto Lázaro Cárdenas de Madrid
carlos.madrid@educa.madrid.org