

# *Consecuencia lógica: modelos conjuntistas y aspectos modales\**

Eduardo Alejandro BARRIO

## **Resumen**

De acuerdo a Etchemendy, Tarski incurre en una *falacia modal* al intentar ofrecer un análisis de los aspectos modales del concepto intuitivo de *consecuencia lógica*. En este trabajo, me propongo discutir la plausibilidad de la tesis de que es posible captar las características modales del concepto intuitivo de *consecuencia* a través de un concepto de consecuencia definido generalizando sobre interpretaciones conjuntistas. En particular, argumentaré que los problemas que pueden detectarse en las argumentaciones que han ofrecido aquellos que quieren salvar el salto de lo general a lo modal mostrando que hay suficientes interpretaciones conjuntistas como para representar las características modales del concepto intuitivo de *consecuencia* son problemas emparentados con la posibilidad de ofrecer una teoría matemática precisa del concepto de *interpretación*, cuya solución deberá seguir las usuales respuestas a este problema y no con la posibilidad específica de reconstruir los rasgos modales a través de alguna noción conjuntista de *modelo*.

*Palabras clave:* Consecuencia lógica, Interpretaciones, Falacia modal.

## **Abstract**

According to Etchemendy, in attempting to offer an analysis of the modal features of the intuitive concept of logical consequence, Tarski has committed a modal

---

\* Este trabajo fue elaborado en el marco del seminario sobre el concepto de *consecuencia lógica* dictado en la UBA. Agredezco a los asistentes y en particular a los miembros de Gaf, [www.accionfilosofica.com](http://www.accionfilosofica.com).

fallacy. In this paper, I consider the thesis according to it is posible to analyze the modals properties of concept of *logical consequence* through of a generalization on set-theoretical interpretations. As is known, some philosophers have tried to argue for the transit from the general to the modal by showing that there are enough set-theoretic interpretations so as to be able to represent the modal features of the intuitive concept of consequence. As is also known, those people have encountered a lot of difficulties. In the present paper, I will try to show that those problems are related not with the specific possibility of accounting for the modal features by means of a set-theoretic notion of model but with the possibility of coming up with a precise mathematical theory for the concept of interpretation, and, as such, they can be solved by way of appealing to the usual solutions to this problem.

*Keywords:* Logical Consequence, Interpretations, Modal Fallacy.

De acuerdo a Etchemendy, Tarski incurre en una *falacia modal* al intentar ofrecer un análisis de los aspectos modales del concepto intuitivo de *consecuencia lógica*. En este trabajo, me propongo discutir la plausibilidad de la tesis de que es posible captar las características modales del concepto intuitivo de *consecuencia* a través de un concepto de consecuencia definido generalizando sobre interpretaciones conjuntistas. En particular, argumentaré que los problemas que pueden detectarse en las argumentaciones que han ofrecido aquellos que quieren salvar el salto de lo general a lo modal mostrando que hay suficientes interpretaciones conjuntistas como para representar las características modales del concepto intuitivo de *consecuencia* son problemas emparentados con la posibilidad de ofrecer una teoría matemática precisa del concepto de *interpretación*, cuya solución deberá seguir las usuales respuestas a este problema y no con la posibilidad específica de reconstruir los rasgos modales a través de alguna noción conjuntista de *modelo*.

A partir de los trabajos elaborados por Etchemendy,<sup>1</sup> se ha abierto una intensa discusión acerca del enfoque de Tarski sobre la noción de *consecuencia lógica*. Uno de los aspectos centrales de esta discusión es si la propuesta tarskiana constituye un *análisis correcto* del mencionado concepto. En esta dirección, se ha discutido intensamente si el concepto propuesto por Tarski como análisis de la noción intuitiva posee las principales características de este último. Uno de los puntos acerca de los que Etchemendy llama la atención es sobre sus propiedades modales. El mencionado autor sostiene que la relación de *consecuencia lógica intuitiva* es irreductiblemente modal: la oración *X* se sigue lógicamente del conjunto de oraciones *K* si es imposible que haya un modo de interpretar cada uno de los integrantes de *K* en el

---

<sup>1</sup> Etchemendy (1988), (1990), (inédito).

que resulten verdaderos y bajo esa misma interpretación  $X$  resulte falsa. Esa imposibilidad es una condición necesaria para que la relación se cumpla: si es posible que haya un modo de interpretar a los miembros de  $K$  en el cual sean verdaderos y bajo ese modo de interpretar  $X$  resulta falsa, entonces  $X$  no puede ser una consecuencia lógica de  $K$ . Además, el hecho de que sea imposible esa combinación de valores de verdad entre  $K$  y  $X$  (cuando se cumple la mencionada relación) tiene que ser entendido de la manera más fuerte: ya que no toda implicación por necesidad de  $K$  a  $X$  es lógica. Hay implicaciones por necesidad metafísica, epistémica y hasta semántica. Por lo cual hace falta encontrar un rasgo propio de la implicación lógica. Uno de estos rasgos parece ser su formalidad: en el sentido de que los únicos límites a los modos de interpretar  $K$  y  $X$  son los impuestos por las constantes lógicas que en ellas figuren. En particular, no hay ningún límite físico, metafísico, epistémico o semántico a los modos de interpretar las expresiones que conformen  $X$  y  $K$ . Aunque, por cierto, la imposibilidad de que exista un modo de interpretar  $K$  y  $X$  de manera tal que no se preserve la verdad de  $K$  a  $X$  nos da cierta garantía epistémica: Si sabemos que  $K$  es verdadera y  $X$  es consecuencia lógica de  $K$ , entonces tenemos garantías acerca de aceptar  $X$ .<sup>2</sup>

Ahora bien, la concepción modelista [*model-theoretic*]<sup>3</sup> acerca de la mencionada relación suplanta los giros modales por expresiones que involucran máxima generalidad:  $X$  es una consecuencia lógica de  $K$  si *para todo* modo de interpretar en el que todos los integrantes de  $K$  son verdaderos, también es verdadero  $X$ . Este reemplazo de *lo modal* por *lo general* deja abierta la posibilidad de que exista un *modo posible de interpretar* a los miembros de  $K$  y a  $X$  es el cual  $K$  resulte verdadero y  $X$  falso, sin que ello fuera representado apropiadamente como un *modo actual de interpretación*. Los generalistas<sup>4</sup> intentan reducir lo modal a lo general analizando la preservación de verdad de  $K$  a  $X$  como un *hecho general* acerca de la verdad o falsedad tal como de hecho el mundo es. Estos no son hechos modales. Esa reducción puede estar fundada probablemente en reparos de tipo quineano a las nociones modales en general, lo que o bien puede estar acompañado por una actitud escéptica acerca del supuesto carácter modal del concepto intuitivo de *consecuencia*, o bien, por un intento de analizar ese componente modal del concepto intuitivo en términos de una generalización universal sobre modos de interpretar.

Uno de los puntos importantes a destacar es que Etchemendy considera que en el artículo clásico de 1936 “On the Concept of Logical Consequence”, Tarski aceptó que el concepto intuitivo de *consecuencia lógica* posee características modales. En este punto, no parece comportarse como un quineano del primer tipo. Afirma Tarski:

<sup>2</sup> Para una discusión ampliatoria de este punto, cfr. Gómez Torrente (2000) y Hanson (1997).

<sup>3</sup> Usualmente, se atribuye a Tarski ser el creador de esta concepción, aunque como se verá más adelante, hay diferencias entre ambas concepciones.

<sup>4</sup> Hart (1991), Jané (1997), Ray (1996).

The point of departure for us will be certain considerations of an intuitive nature. Let us consider an arbitrary class of sentences  $K$  and an arbitrary sentence  $X$  which follows from the sentences of this class. From the point of view of everyday intuitions it is clear that it cannot happen that all the sentences of the class  $K$  would be true but at the same time the sentence  $X$  would false.<sup>5</sup>

Para Etchemendy, la frase “it cannot happen that” parece una indicación de que Tarski creía, de alguna manera y más allá de sus reparos a las modalidades en general, en que el concepto intuitivo de *consecuencia* involucra algún tipo de modalidad que un análisis del mismo debería elucidar. A partir del trabajo de Etchemendy, en los últimos años se ha abierto una intensa discusión acerca de la concepción tarskiana de *consecuencia lógica*. Uno de los aspectos centrales de esa discusión es si el concepto de *consecuencia* definido por Tarski es capaz de ofrecer un análisis adecuado del concepto intuitivo bajo la presuposición de que este último posea las mencionadas características modales. Según Etchemendy, Tarski incurre en una *falacia modal* al intentar ofrecer un análisis del concepto intuitivo de *consecuencia lógica*. En este trabajo, me propongo discutir la plausibilidad de la tesis de que es posible captar las características modales del concepto intuitivo de *consecuencia* a través de un concepto de *consecuencia* definido generalizando sobre interpretaciones conjuntistas. En particular, argumentaré que los problemas que pueden detectarse en las argumentaciones que han ofrecido aquellos que quieren salvar el salto de lo general a lo modal, mostrando que hay suficientes interpretaciones conjuntistas como para representar las características modales del concepto intuitivo de *consecuencia*, son problemas emparentados con la posibilidad de ofrecer una teoría matemática precisa del concepto de *interpretación*, cuya solución deberá seguir las usuales respuestas a este problema y no con la posibilidad específica de reconstruir los rasgos modales a través de alguna noción conjuntista de *modelo*.

## 1. La concepción tarskiana de consecuencia lógica

En el mencionado artículo de 1936, Tarski usó las nociones de *satisfacción de una función oracional* y de *modelo* con el propósito de ofrecer una caracterización extensionalmente apropiada del concepto intuitivo de *consecuencia*. Su punto de partida es que si una oración  $X$  se sigue lógicamente de una colección de oraciones  $K$ , entonces esta relación de consecuencia no puede ser afectada reemplazando uniformemente constantes no lógicas por otras constantes no lógicas.<sup>6</sup> Como resultado, propone determinar los límites de la mencionada relación lógica chequeando

---

<sup>5</sup> Tarski (1936, p. 415).

<sup>6</sup> Tarski (1936, p. 415).

sistemáticamente las substituciones de los términos de los términos no lógicos por otros términos no lógicos. Consecuencias que puedan resistir tales substituciones contarán como lógicas y las que no las resistan, no lo harán. Es justamente en este sentido, que la relación de *consecuencia* resulta incorporar el rasgo de formalidad. Tarski formula esta condición como sigue:

(F) If in the sentences of the class  $K$  and in the sentence  $X$  we replace the constant terms which are not general-logical terms correspondingly by arbitrary other constant terms (where we replace equiform constants everywhere by equiform constants) and in this way we obtain a new class of sentences  $K'$  and a new sentence  $X'$ , then the sentence  $X'$  must be true if only all sentences of the class  $K'$  are true. <sup>7</sup>

En el análisis de Tarski, (F) es una condición de adecuación que cualquier definición de *consecuencia* para un lenguaje particular debe cumplir. Esto es, para que  $X$  sea una consecuencia lógica de  $K$ , la condición (F) debe cumplirse entre  $K$  y  $X$ . Sin embargo, aunque necesaria, (F) no es suficiente, ya que (F) sólo captura reemplazos que pueden ser capturados por el poder expresivo del lenguaje para el cual se está efectuando la definición. Tarski argumenta que la única manera de tener una definición adecuada de consecuencia, una que satisfaga (F), pero que no dependa de los recursos expresivos del lenguaje, es suponiendo que “the designations of all possible objects [occur] in the language in question” <sup>8</sup> Pero, ya que esta suposición no parece apropiada, Tarski propone utilizar la noción técnica de *modelo*.

Let  $L$  be any class of sentences. We replace all extra-logical constants which occur in the sentences belonging to  $L$  by corresponding variables, like constants being replaced by like variables, and unlike by unlike. In this way we obtain a class  $L$  of sentential functions. An arbitrary sequence of objects which satisfies every sentential function of the class  $L$  will be called a *model* of the class  $L$  of sentences (in just this sense one usually speaks of models of an axiom system of a deductive theory). <sup>9</sup>

Usando esta noción de *modelo*, Tarski sostiene que  $X$  debe ser observada como siguiéndose lógicamente de la colección  $K$  de oraciones justo en el caso en el cual todo modelo de  $K$  es al mismo tiempo un modelo de  $S$ . <sup>10</sup> En adelante, usaré  $K \models_t S$  para referirme a la definición de la noción de *consecuencia* definida por Tarski. Nótese que en la definición, se cuantifica sobre modelos: “(...) every model of  $K$  ...” intentando obtener el grado de generalidad apropiado como para que la definición resulte correcta. De esta manera, la apuesta de Tarski es que habrá siempre un

<sup>7</sup> Tarski (1936, p. 415).

<sup>8</sup> Tarski (1936, p. 416).

<sup>9</sup> Tarski (1936, pp. 416-17)

<sup>10</sup> Tarski (1936, pp. 417).

modelo el cual represente cualquier permutación de objetos particulares y por este motivo esta noción de *consecuencia lógica* satisface la condición de adecuación (F).

Sin embargo, un punto importante es que es difícil determinar exactamente lo que Tarski quiso decir aquí con “modelo”. Aunque la definición propuesta por Tarski suele tomarse como si fuera precisamente la definición que se usa actualmente en la teoría de modelos, la lectura más natural parece comprometerlo con una noción no habitual de *modelo* en la cual todas las estructuras que satisfacen las colecciones de tipo *K* y las oraciones de tipo *X* comparten el *mismo dominio*. Tal compromiso mostraría un hiato entre el enfoque tarskiano y el de la teoría de modelos. En particular, lo que está en discusión es si en la frase “an arbitrary sequence of objects which satisfies every sentential function of the class L” simplemente se hace referencia a objetos pertenecientes a una única colección o si por el contrario se contempla la posibilidad de que se tomen en consideración objetos que formen parte de otras colecciones que se tomen como dominios del modelo.<sup>11</sup>

Siguiendo la dirección de aquellos que han marcado el hiato, Etchemendy ha argumentado<sup>12</sup> que el enfoque de Tarski adolece de dos tipos de dificultades. En primer lugar, según el autor, y a diferencia de lo que argumentan muchos, hay diferencias extensionales entre la caracterización modelo-teórica y la tarskiana (ambos no ofrecen como resultado los mismos casos de cumplimiento de las propiedades lógicas) que son suficientes como para no identificar ambos enfoques.<sup>13</sup> Y agrega que el primero parece extensionalmente más correcto que el último. En segundo lugar, sostiene que el enfoque tarskiano es inadecuado porque (a) depende de que haya una distinción entre términos lógicos y no lógicos en el lenguaje para el cual se está definiendo la relación de *consecuencia*, pero, según su punto de vista, resulta fácil mostrar que hay lenguajes formales muy sencillos (incluso lenguajes de primer orden) para los cuales no puede trazarse la distinción. Pero, incluso si tal distinción pudiera ser realizada, la inadecuación del enfoque tarskiano resultaría inevitable ya que (b) al pretender capturar las propiedades del concepto intuitivo de *consecuencia* se comete una falacia modal de alcance.

---

<sup>11</sup> Hay varios puntos en donde la concepción modelista de consecuencia y la concepción tarskiana se diferencian: en la primera, las fórmulas que presuntamente cumplen la relación se toman de un lenguaje no interpretado; en la caracterización tarskiana, en cambio, las fórmulas vienen interpretadas. De esta manera, la interpretación no cambia de modelo en modelo, tal como sucede en la caracterización modelista. En esta última, hay distintos dominios a partir de los cuales tenemos distintos modos de interpretar las fórmulas. En la concepción tarskiana, en cambio, hay un único dominio del cual se estructuran los modos de interpretar las fórmulas. Cfr. Bays (2001) y Gómez Torrente (2000).

<sup>12</sup> Etchemendy (1999).

<sup>13</sup> Una prueba que para los lenguajes de primer orden con identidad ambos enfoques tienen resultados idénticos puede encontrarse en Gómez Torrente (2000).

## 2. La supuesta falacia modal de Tarski

Un factor que oscurece el debate sobre este último punto es que en ningún momento Tarski explícitamente manifiesta estar dando un argumento para probar que el concepto de *consecuencia* por él definido es capaz de incorporar los aspectos modales del concepto intuitivo. Más aún, la búsqueda de un argumento presupone que el mencionado concepto intuitivo posee ciertas propiedades modales que un análisis adecuado del mismo debe preservar. Tal como expresa Etchemendy:

The most important feature of logical consequence, as we ordinarily understand it, is a modal relation that holds between implying sentences and sentence implied. The premises of a logically valid argument cannot be true if the conclusion is false; such conclusions are said to “follow necessarily” from their premises.<sup>14</sup>

Un análisis adecuado del concepto de *consecuencia* tendría que preservar esta característica. En particular, si el análisis de Tarski fuera apropiado, tendría que dar cuenta de este aspecto. En esa dirección, Etchemendy toma el siguiente párrafo del artículo de Tarski como evidencia del error de Tarski al intentar supuestamente argumentar que su análisis reconstruye adecuadamente esta característica. Afirma Tarski:

I have the impression that everyone who understands the content of the above definition will admit that it captures many intuitions manifested in the everyday usage of the concept of following. Its various consequences speak no less strongly for the adequacy of this definition. In particular e.g. one can prove on the basis of the definition accepted above that a sentence which follows logically from true sentences must itself be true; further, that the relation of following logically is completely independent of the sense of the extra-logical constants occurring in the sentences among which this relation obtains; in a word, one can show that the above formulated condition (*F*) is necessary for the sentence *X* to follow logically from the sentences of the class *K*.<sup>15</sup>

En la discusión planteada, la clave está en:

(CO) one can prove on the basis of the definition accepted above that a sentence which follows logically from true sentences *must* itself be true.

La fuerza del “must” es poco clara: ¿es la afirmación fuerte de acuerdo con la cual en casos donde hay una relación lógica de *consecuencia* es imposible que todos los miembros de *K* resulten verdaderos y al mismo tiempo *X* falso? O simplemente

<sup>14</sup> Etchemendy (1999, p. 81).

<sup>15</sup> Tarski (1936, p. 417).

¿es la relación débil según la cual no se da que todos los miembros de  $K$  son verdaderos y  $X$  falso? Según Etchemendy, en (CO) Tarski supone que se puede probar que hay una importante característica que compartirían tanto del concepto intuitivo como el definido por Tarski: el carácter modal.

El presunto argumento de Tarski tendría que mostrar que si  $K \models_t X$ , esto es si una oración  $X$  es consecuencia lógica de un conjunto de oraciones  $K$  en el sentido definido por él, entonces el tránsito de  $K$  a  $X$  es tal que es imposible que siendo  $K$  verdadera,  $X$  sea falsa.

(Tesis modal) (A) Si  $K \models_t X$ , entonces una relación modal se cumple entre la verdad de todas las oraciones de  $K$  y la verdad de todas las oraciones de  $X$ .

La manera de fundamentar esta tesis parece simple. Supongamos su antecedente

(1)  $K \models_t X$

Y al mismo tiempo, buscando un absurdo, supongamos la negación de su consecuente

(2) No es cierto que ( $X$  se siga con necesidad de  $K$ )

Dada la definición de  $\models_t$

(3) Si  $K \models_t X$ , entonces no hay modelo tarskiano de  $K$  que no sea también modelo de  $X$

Pero

(4) Si  $X$  no se sigue con necesidad de  $K$ , hay un modo de interpretar intuitivo en el cual todas las fórmulas de  $K$  son actualmente verdaderas y  $X$  es actualmente falsa.

Si esto es así, entonces

(5) Hay un modelo (el que representa la interpretación intuitiva actual de las expresiones no lógicas), en el que  $K$  es verdadera y  $X$  falsa.

Pero, no puede haber al mismo tiempo un modelo con las características atribuidas en (5) y en (3). Por lo cual



(6) (1) y (2) se contradicen.

En síntesis, de la suposición de la falsedad de la tesis modal se sigue una contradicción. Nótese que el argumento supone que hay dos nociones de *modo de interpretar*: una intuitiva, que tiene características modales y otra, la de modelo tarskiano, que se propone como una caracterización de la noción intuitiva. Si la noción de *modo de interpretar* las constantes no lógicas de un lenguaje fuera simplemente la noción precisa de *modelo tarskiano* entonces trivialmente siempre que  $K \models_{\mathfrak{t}} S$ , se daría que  $K \models_{\text{int}} S$  y entonces  $K$  implicaría por necesidad lógica a  $X$ . Pero, en ese caso, no haría falta un argumento para vincular ambos conceptos. Por otra parte, recuérdese que el concepto de *modelo tarskiano* posee características conjuntistas. Se haga o no referencia a objetos pertenecientes a una única colección, o si por el contrario se contemplara la posibilidad de que se tomen en consideración objetos que formen parte de otras colecciones que se tomen como dominios del modelo, la manera más natural de trabajar con estas colecciones es considerarlas *como si* fueran conjuntos.<sup>16</sup> El intento de dar un argumento que muestre que hay tantos modos de interpretar fórmulas de un lenguaje cualquiera como interpretaciones conjuntistas está respaldado por la necesidad de mostrar que estas últimas son capaces de ofrecer un análisis correcto de las características principales de un concepto intuitivo.

Ahora bien, justamente en este punto, Etchemendy sostiene que esta prueba no puede tomarse como una muestra de que si  $K \models_{\mathfrak{t}} X$ , entonces una relación modal se cumple entre la verdad de todas las oraciones de  $K$  y la verdad de todas las oraciones de  $X$ . Lo que probaría, en cambio, la supuesta prueba es:

(B) Necesariamente (Si  $K \models_{\mathfrak{t}} X$ , entonces  $X$  es una consecuencia lógica intuitiva de  $K$  (en el sentido de preservación de verdad de  $K$  a  $X$ ))

y no

(A) (Si  $K \models_{\mathfrak{t}} X$ , entonces necesariamente (se preserva la verdad de  $K$  a  $X$ ))

que es precisamente lo que habría que probar. De otra forma, en palabras de Etchemendy:

To show that all Tarskian consequences are consequences in the ordinary sense, we would need to prove a theorem with embedded modality. . . Obviously, the proof in

---

<sup>16</sup> Nótese que se trata esta consideración acerca de los modelos de una suerte de principio metodológico y no de una tesis ontológica acerca de qué son los modelos. Crf Gómez Torrente (inédito).

question does not show that every Tarskian consequence is a consequence ‘in the ordinary sense.’ It is only through an illicit shift in the position of the modality that we can imagine ourselves demonstrating of any Tarskian consequence that it is entailed by [i.e., follows with necessity from] the corresponding set of sentences. <sup>17</sup>

En suma, Etchemendy afirma que donde Tarski debió concluir (A) y por lo tanto, abstenerse de sacar cualquier conclusión acerca de las propiedades modales compartidas entre “ $\vdash_t$ ” y el concepto intuitivo de *consecuencia*, ofreció una prueba de (B), que contiene una modalidad, pero que no le sirve para mostrar la coincidencia modal entre ambos conceptos.

### 3. ¿Hay tantos modelos tarskianos como modelos posibles?

Claro que no todos están de acuerdo acerca de cómo evaluar la objeción modal de Etchemendy. Hay algunos de sus críticos (fundamentalmente, Ray, Sher, García-Carpintero, Shapiro) <sup>18</sup> que han aceptado junto con él, el que exista de parte de Tarski la intención de ofrecer un argumento que muestre que  $\vdash_t$  y el de  $\vdash_{int}$  comparten sus propiedades modales. Sin embargo, han argumentado en contra de Etchemendy, que el presunto argumento sea una falacia. En esta dirección, han tratado de ofrecer una reconstrucción del argumento que evite la falacia de alcance modal. Otros en cambio, (fundamentalmente, Gómez-Torrente <sup>19</sup>) han argumentado que tanto Etchemendy como sus críticos están equivocados: en el pasaje citado Tarski no ofrece un argumento (ni tuvo la intención de ofrecerlo) que muestre que  $\vdash_t$  tiene propiedades modales. Pero, más allá de si exegéticamente Gómez-Torrente tiene razón, ¿qué se puede decir si se concede la necesidad de ofrecer un argumento?.

Ray ha objetado <sup>20</sup> que hay un sentido débil en el cual la tesis modal se cumple: en este sentido, el *must* presente en (CO) debe ser interpretado como “preservación de verdad para toda substitución”. Esto es, hay una prueba de una tesis, la tesis generalista, que se puede aceptar sin dificultades, y que puede captar un sentido de *must* en términos de fuerza lógico deductiva.

(A\*) (Tesis generalista) Si  $K \vdash_t X$ , entonces para cualquier modo de interpretar intuitivo, se preserva la verdad de  $K$  a  $X$ .

<sup>17</sup> Etchemendy (1990, Cap. 6).

<sup>18</sup> Ray (1996), Sher, García-Carpintero (1993) y (manuscrito), Shapiro (1998).

<sup>19</sup> Gómez-Torrente (1996) y (1998).

<sup>20</sup> Ray (1996).

Nótese que  $(A^*)$  no contiene expresiones modales explícitas. La estrategia de Ray es mostrar que si la definición de “ $\models$ ” satisface la condición (F), entonces es preservadora de verdad (en sentido intuitivo). Supongamos, para apreciar esta reconstrucción,

(i)  $K \models t X$ ,

Y

(ii) De  $K$  no se preserva la verdad a  $X$  (para cualquier modo de interpretar intuitivo)

(iii) Si de  $K$  no se preserva la verdad a  $X$ , entonces hay un argumento (producto de la sustitución de las constantes no lógicas en  $K$  y  $X$ ) que va de  $K'$  a  $X'$  en el cual  $K'$  es verdadera, y  $X'$  es falsa (de (ii) )

(iv) Existe una interpretación, en la cual  $K'$  es actualmente verdadera y  $X'$  es actualmente falsa.

Sin embargo, si (i)  $K \models t X$ , entonces

(v) para toda sustitución de las constantes no lógicas en  $K$  y  $X$ , si  $K$  es verdadera, entonces  $X$  es verdadera (por lo que Ray llama *Teorema T*)<sup>21</sup>

Estas afirmaciones son contradictorias: si  $K'$  y  $X'$  es el resultado de sustituir en  $K$  y  $X$  las constantes no lógicas por constantes no lógicas, no puede darse (v) y (iv) a la vez. Por lo tanto, según Ray, no se ve por qué, como afirma Etchemendy, tienen que ser equivalentes debe haber un salto modal en alguna parte del argumento, salto en el que se cometería algún tipo de falacia de alcance.<sup>22</sup>

Al contrario, enfatizando su crítica, Ray pretende dar una vuelta de tuerca al argumento de Etchemendy, con el objetivo de mostrar que es Etchemendy y no Tarski quien comete una falacia de alcance al hacer la reconstrucción de lo que Tarski presuntamente intento argumentar. “But the real error here is Etchemendy’s,

<sup>21</sup> Ray (1996, p. 653).

<sup>22</sup> Un punto importante que Ray cuestiona es que hacer equivalentes a la tesis generalista con la tesis modal transforma a la noción de  $\models$  en una implicación modal estricta. Nótese que es esencial que existan dos lecturas modales del condicional que va desde  $\models$  a la relación de consecuencia intuitiva. En ambas lecturas, la modalidad involucrada debe representarse en el lenguaje objeto. Y esto transforma automáticamente en una implicación estricta al condicional alcanzado por la modalidad. Pero, argumenta Ray, la implicación estricta no es una relación formal: es una implicación que *no cumple* (F).

and ironically, it is a quantifier scope error".<sup>23</sup> El error de alcance cuantificacional que Ray le atribuye a Etchemendy es el siguiente:

Según el crítico de Tarski, sólo si se probara que si hay un modo de interpretar tarskiano en el cual  $S$  es una consecuencia de  $K$ , entonces necesariamente  $S$  es una consecuencia lógica intuitiva de  $K$  (es decir, la necesidad del condicional que va de  $K \vdash_T X$  a  $K \vdash_{INT} S$ ), se establecería la corrección del análisis tarskiano. Sin embargo, lo que Etchemendy tendría que haberle reclamado al supuesto argumento tarskiano es algo tan fuerte como la siguiente tesis generalista:

(Tesis de re)  $\exists x$  ( $x$  es un modo de interpretar tarskiano tal que siempre que para toda  $X$  y  $K$ , si se da en ese modo de interpretar tarskiano que  $X$  es verdadera cuando  $K$  lo es, se da que  $K \vdash_{INT} X$ )

O en términos de una modalidad, la siguiente tesis modal:

(Tesis modal de re)  $\exists x$  ( $x$  es un modo de interpretar tarskiano tal que en todo mundo posible en donde estén  $K$  y  $X$ , si se da en ese modo de interpretar tarskiano que  $X$  es verdadera cuando  $K$  lo es, se da que  $K \vdash_{INT} X$ )<sup>24</sup>

Esto es, que exista un objeto conjuntista que podamos utilizar la reinterpretar a  $K$  y a  $X$  y que ese objeto tenga siempre (o en terminos modales, tenga en todo mundo posible) la propiedad de preservar la verdad de  $K$  a  $X$ . Pero Etchemendy, en cambio, le pide a Tarski que

(Tesis de dicto) Para toda  $X$  y  $K$ , siempre que ( $\exists x$   $x$  es un modo de interpretar tarskiano en el cual si  $X$  es una consecuencia de  $K$ , se da que  $K \vdash_{INT} X$ )

O en términos modales

(Tesis de modal dicto) Para toda  $X$  y  $K$ , en todo mundo posible ( $\exists x$   $x$  es un modo de interpretar tarskiano en el cual si  $X$  es una consecuencia de  $K$ , se da que  $K \vdash_{INT} X$ )

Esto es, que en todos los casos (o en términos modales, en todo mundo posible) la proposición " $(\exists x$   $x$  es un modo de interpretar tarskiano en el cual si  $X$  es una con-

<sup>23</sup> Ray (1996, p 651).

<sup>24</sup> Como ya hemos dicho, Ray no quiere involucrarse con modalidades. Por ese motivo, presenta la objeción de alcance en términos generalistas. Para los que no tengan reparos modales, la lectura modal *de re* puede resultar atractiva.

secuencia de  $K$ , se da que  $K \models_{\text{INT}} X$  sea verdadera. En este punto, Ray nos hace notar que <sup>25</sup> el procedimiento empleado por Etchemendy para encontrar una interpretación tarskiana curiosa en donde se muestre que  $X$  se sigue de  $K$ , pero  $X$  no sea una consecuencia intuitiva de  $K$  basta para afectar las lecturas de dicto, pero no las de re, ya que del hecho de que haya algunas interpretaciones que no hagan un trabajo correcto no se sigue que ninguna lo haga.

En la misma dirección que Ray, Shapiro, McGee y Sher han ofrecido argumentos que intentan completar el hiato entre el concepto analizado y su análisis conjuntista. Sin embargo, esas propuestas resultan un poco más robustas desde el punto de vista modal. En la reconstrucción de Shapiro, <sup>26</sup> el papel que juega en la formulación de Ray el concepto de *fuerza deductiva*, lo juega el de *modo de representar posibilidades*. Tanto en la McGee como en la de Sher, <sup>27</sup> en cambio, se recurre a cierto isomorfismo entre *modos de interpretación* (en sentido intuitivo) y modelos conjuntistas. La conjetura de Sher es que para todo modo de interpretar los lenguajes que Tarski tomó en cuenta, hay un modelo conjuntista isomórfico a él. Y en el argumento de McGee <sup>28</sup> se utiliza el teorema según el cual:

For any model, there exists an isomorphic model which is a pure set

En este último caso, el argumento procede suponiendo que hay un mundo posible  $w$  en el cual hay un modelo  $M$  en el cual una fórmula  $\phi$  es falsa. Ya que el mencionado teorema es verdadero en todo mundo posible, habrá en  $w$  un modelo  $L$ , isomórfico con  $M$ , el cual es un conjunto puro. Al ser un objeto de la matemática pura,  $L$  existe en todo mundo posible, y es en todo mundo posible, un modelo en el cual  $\phi$  es falsa. En particular,  $L$  atestigua el hecho de que, en el mundo actual, hay un modelo en el cual  $\phi$  es falsa.<sup>29</sup> Por eso, si hubiera un modelo posible en el cual  $\phi$  es falsa, entonces habría actualmente un modelo en el cual  $\phi$  es falsa. De lo cual, argumenta McGee se sigue que si  $\phi$  es universalmente válida, no puede haber un modelo posible en el cual  $\phi$  es falsa.

La estrategia de Ray, y en el mismo sentido la de Sher, McGee y Shapiro, ha recibido críticas. <sup>30</sup> No necesariamente para darle la razón a Etchemendy, sino simplemente para mostrar un obstáculo que aquellos que creen en la necesidad de dar un argumento deben sortear. En esta dirección, Hanson <sup>31</sup> argumenta que la prueba

<sup>25</sup> Ray (1996, p. 652).

<sup>26</sup> Shapiro (1998).

<sup>27</sup> Sher (1996).

<sup>28</sup> McGee (1992, p 276).

<sup>29</sup> McGee (1992, p 276).

<sup>30</sup> Cfr. Gómez Torrente (1998), Hanson (1999), Pérez-Otero (2001).

<sup>31</sup> Hanson (1999, p. 613).

de Ray (y podíamos agregar, la de los restantes autores mencionados) tiene un supuesto:

Que hay una *representación conjuntista del modo de interpretar intuitivo*: tal interpretación en sentido intuitivo, si existe, tendrá que poder ser representada conjuntísticamente, y por tanto, tendrá algún *conjunto no vacío* como dominio.

Pero, según Hanson: el supuesto según el cual, para *todo modo de interpretar intuitivo* existe un *modo de interpretar conjuntista* es inadecuado, porque el dominio de todos los individuos frente a los cuales queremos que los miembros de *K* sean verdaderos y los de *X* falsos en sentido intuitivo, debe contener *todos* los conjuntos y por lo tanto, ese dominio *es demasiado grande* como para ser un conjunto.

In other words under a scientifically serious account of absolute truth and falsity, the domain of all individuals with respect to which the members of *K* are assumed true and *X* is assumed false will almost certainly contain all sets and hence will be too large to be a set.<sup>32</sup>

En este sentido, no hay garantías acerca de que toda interpretación sea modelable por una interpretación conjuntista. En la misma dirección, Gómez Torrente ha argumentado<sup>33</sup> que no hay un argumento general que muestre la verdad de:

Una oración de *L* es universalmente válida syss esa oración es verdadera en todas las estructuras conjuntistas actualizadas para *L*

Por eso, según Hanson y Gómez Torrente, la conclusión de Ray no estaría probada (no está probado que se preserva verdad en sentido intuitivo). Y algo semejante, supongo, podrían sostener alrededor de las reconstrucciones de Shapiro, McGee y de Sher. *Todos los modos de interpretar intuitivos* las oraciones de *L* no tienen que ser exactamente *todos los modos de interpretar conjuntistas* las oraciones de *L*. En el caso de Gómez Torrente, agrega a esta situación, utilizando el teorema de Kreisel,<sup>34</sup> que hay un buen argumento que muestra que la anterior afirmación es verdadera cuando *L* es un lenguaje de primer orden. Sin embargo, este argumento supone que *L* es completo (tal como está probado cuando *L* es de primer orden) y

---

<sup>32</sup> Cfr. Hanson (1999, p. 610). Hart recurre a la paradoja de Cantor para mostrar que este conjunto no puede existir: si el conjunto potencia de un conjunto infinito tiene una cardinalidad más grande que el conjunto infinito de referencia (teorema de Cantor), el conjunto potencia del conjunto de todos los conjuntos tendría que tener una cardinalidad mayor que este último, y por lo tanto, afectar la posibilidad de que ese conjunto sea el conjunto de todos los conjuntos. Hart (1991).

<sup>33</sup> Gómez Torrente (2000).

<sup>34</sup> Kreisel (1967).

por eso no puede extenderse más allá de los límites de las teorías completas.<sup>35</sup>

Una tentación, a la que podría recurrir Ray, sería el recurso a entidades conjuntistas (como las clases propias). El problema es que la interpretación pretendida de la teoría de conjuntos no puede tener como dominio, ni puede corresponderse de manera inmediata, una entidad que pueda formar parte de esa teoría. Supongamos que queremos mostrar que tenemos una definición adecuada de  $\models_T$  (una que preserve verdad en sentido de hacerlo para todos los modos intuitivos de interpretar) para esta teoría conjuntista que incluye estas grandes colecciones. Llamemos “CT” a esta teoría.<sup>36</sup> Para hacerlo tenemos que interpretar por medio de una semántica esta CT. Esta semántica tiene cuantificadores que “hablan” acerca de todas las colecciones reconocidas por nuestra CT. Pero sólo si estuviéramos seguros de que el dominio de nuestra CT es una de las entidades de las que habla CT, vale la prueba del corolario de Ray. No obstante, esta seguridad no existe.<sup>37</sup> El dominio necesario para interpretar CT tiene que ser una colección que no esté en CT.<sup>38</sup> Esto es, aunque CT incluya clases propias, no hay garantías de que no haya más interpretaciones que estructuras cuyo dominio sean clases propias.<sup>39</sup>

Nótese, no obstante, que este resultado no está estrictamente relacionado con los aspectos modales del concepto intuitivo de *validez universal* o *consecuencia*, sino más bien con la falla de garantías en la coextensionalidad entre los conceptos de *modo intuitivo de interpretar* y de *modo conjuntista de interpretar*. Para advertir este punto, basta llamar la atención respecto del argumento de McGee que no hay garantías de que haya tantas estructuras cuyos dominios sean conjuntos posibles como interpretaciones intuitivas. Esto es, aún admitiendo que hay un modo conjuntista de representar conjuntos posibles, basado en el teorema mencionado por McGee y en la existencia necesaria de los objetos de la matemática pura, aún resta un hiato hasta los modos de interpretar intuitivos. Justamente esta es la limitación que presenta el argumento de McGee. Claro que, también es importante advertir que este resultado no muestra que no sea posible siempre representar de manera conjuntista un modo de interpretar intuitivo, utilizando la posibilidad de extender de manera indefinida los modos conjuntistas de interpretar: o bien generando una jerarquía infinita de entidades conjuntistas “cada vez más grandes”, como clases, hiperclases, hiperhiperclases, o bien recurriendo a algún principio de reflexión<sup>40</sup> o bien amplian-

<sup>35</sup> Gómez Torrente (2000, p. 61-62) e (inédito, p. 2).

<sup>36</sup> Sigo a Hanson (1999, p. 611) en este ejemplo. La denominación de “CT” es por “collection theory”.

<sup>37</sup> Tal como lo muestra la paradoja formulada por Raúl Orayen. Cfr Orayen (2003) y Barrio (inédito).

<sup>38</sup> Hanson (1999, p. 612).

<sup>39</sup> Por supuesto, que no haya garantías no quiere decir que *de hecho* haya un contraejemplo a la concepción tarskiana de *consecuencia*.

<sup>40</sup> El principio de reflexión dice que cualquier colección de oraciones verdaderas en una estruc-

do indefinidamente el universo conjuntista, renunciando a la posibilidad de que exista una extensión definida para el concepto de *conjuntos* y por lo tanto, para el concepto de *dominio*.

Mi punto es entonces que si bien la objeción de Hanson y de Gómez Torrente hacia la estrategia de Ray, McGee y Sher parece mostrar simplemente que toda aproximación matemática del concepto intuitivo de *interpretación* será siempre incompleta, el problema es previo al de ofrecer un argumento que salve el hiato entre lo general y lo modal. El problema yace en la noción misma de *estructura conjuntista*. El que exista la posibilidad de que haya un argumento de  $K$  a  $X$ , compuesto de oraciones de un  $L$  cuya semántica se define por medio de la teoría estándar de modelos, tal que todas las estructuras conjuntistas en que son verdaderas cada uno de los integrantes de  $K$ , son también estructuras en las que  $X$  es verdadera, pero tal que resulte que hay una interpretación intuitiva que hace verdaderos a todos los miembros  $K$  y falsa a  $X$ , no es un problema que surja porque el concepto de *consecuencia intuitivo* es modal y no es posible salvar el salto de lo general a lo modal: es un problema que surge porque no hay conjuntos suficientes como para representar todos los modos intuitivos de interpretar fórmulas. Claro, es estrictamente cierto que no hay un argumento que nos garantice que haya tantas interpretaciones conjuntistas como interpretaciones intuitivas. Pero el problema está *más* relacionado con la cuestión de si es posible ofrecer un análisis de un concepto informal en términos de otro formal, que con la cuestión de si el concepto informal tiene características modales.

En suma, es cierto que las estrategias del tipo de la de Ray no logran ser concluyentes al intentar mostrar argumentativamente que el concepto tarskiano de *consecuencia* capta los rasgos modales del concepto intuitivo de *consecuencia*. He argumentado, no obstante, que el problema, sin embargo, es acerca de la adecuación extensional de un análisis conjuntista del concepto de *interpretación*, y como tal, de un análisis conjuntista de los conceptos intuitivos de *validez universal* y *consecuencia lógica*, y no un problema acerca del salto o no desde lo general a lo modal.

## Referencias bibliográficas

BARRIO, E. (inédito): “Modelos, Autoaplicación y Máxima Generalidad” en [www.accionfilosofica.com](http://www.accionfilosofica.com)

BAYS, T. (2001): “On Tarski On Models”, *J. of Symbolic Logic* 66.

ETCHEMENDY, J. (1990): *The Concept of Logical Consequence*, Harvard UP, 1990.

---

tura con una clase propia como dominio es verdadera también en una estructura con un conjunto como dominio. Cfr. Shapiro (1987) para un panorama sobre la aceptación de las distintas versiones de este principio.



- ETCHEMENDY J. (1988): "Tarski's on Truth and Logical Consequence" *J. of Symbolic Logic* 53. n 1
- ETCHEMENDY, J., "Reflexions on Consequence" manuscrito [www.csli.stanford.edu/hp/etchemendy.html](http://www.csli.stanford.edu/hp/etchemendy.html)
- GARCÍA CARPINTERO, M. (1993): "The Grounds for Model-theoretic Account of the Logical Properties", *Notre Dame J. of Formal Logic* 34.
- GÓMEZ TORRENTE, M. (1996): "Tarski on Logical Consequence", *Notre Dame J. Of Formal Logic* 37.
- GÓMEZ TORRENTE, M. (1998): "On a Fallacy Attributed to Tarski", *History and Philosophy of Logic* 19.
- GÓMEZ TORRENTE, M. (2002): *Forma y Modalidad*, Buenos Aires, EUDEBA.
- GÓMEZ TORRENTE, M. (inédito): "Interpretaciones y Conjuntos", en García de la Sienna, A. (en prensa)
- HANSON, W. (1997): "The concept of Logical Consequence", *The Philosophical Review* 106, n 3.
- HANSON, W. (1999): "Ray on Tarski on Logical Consequence", *J. Of Phil. Logic* 28.
- HART, W. (1991): "Critical Notices of John Etchemendy, *The Concept of Logical Consequence*" *Philosophical Quarterly* 41.
- JANÉ, I. (1997): "Theoremhood and Logical Consequence" *Theory* 12.
- KREISEL, G. (1967): "Informal Rigour and Completeness Proofs", en I. Lakatos (comp.), *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam: North-Holland.
- MANCOSU, P. (2006): "Tarski on Models and Logical Consequence" en Ferreirós, J. & Gray, J. (2006): *The Architecture of Modern Mathematics and Philosophy*. Oxford: Oxford U.P.
- MCGEE, V (1992): "Two Problems with Tarski's Theory of Consequence" *Proc. of the Arist. Society* 92.
- MCGEE, V (1992): Review of *The Concept of Logical Consequence* by John Etchemendy, *Journal of Symbolic Logic* 57.
- ORAYEN, R. (2003): "Una paradoja en la semántica de la teoría de conjuntos" en Moretti, A. & Hurtado, G. (2003) *La Paradoja de Orayen*. Buenos Aires, EUDEBA.
- PÉREZ-OTERO, M. (2001): "A Fallacy about the Modal Status of Logic" *Dialéctica* 55.
- RAY, G. (1996): "Logical Consequence: A Defense of Tarski" *J. of Philosophical Logic* 25.
- SAGÜILLO, J. (1997): "Logical Consequence revisited" *The Bolletin of Symbolic Logic* 3.
- SHAPIRO, S. (1997): "Principles of Reflexion and Second Order Logic" *J. of Phil Logic* 40.

- SHAPIRO, S. (1998): “Logical Consequence: Models and Modality” en Schirm, M. (ed.) *The Philosophy of Mathematics Today* Oxford, Oxford UP.
- SHAPIRO, S. (2004): “Necessity, Meaning, and Rationality: The Notion of Logical Consequence”, en Jacquette D. (ed.) (2002): *A Companion to Philosophical Logic*, Londres, Blackwell.
- SHER, G (1991): *The Bounds of Logic: A Generalized Viewpoint*, Cambridge, MIT Press.
- SHER, G (1996): “Did Tarski Commit “Tarski’s Fallacy”, *The J. of Symbolic Logic* 61.
- SHER, G (2001): “The Formal-Structural View of Logical Consequence”, *The Phil Review* 110.
- SHER, G (2002): “Logical Consequence: an Epistemic Outlook”, *The Monist* 85, n 4.
- TARSKI, A. (1936): “On the Concept of Logical Consequence”, reimpresso en Tarski, A. (1983) *Logic, Semantics, Metamathematics* Indianapolis. Hackett.
- WOODS, J. and BROWN, B.(eds) (2001): *Logical Consequence: Rival Approaches*. Oxford: Hermes Science Publishing Ltd.

Eduardo Alejandro Barrio  
Universidad de Buenos Aires / CONICET  
ebarrio@fibertel.com.ar