Ficcionalismo matemático y si-entoncismo russelliano ¿dos caras de la misma moneda?

Wilfredo QUEZADA PULIDO

Resumen

En este artículo argumentamos que, al contrario de lo sostenido por los defensores del ficcionalismo, el logicismo en la versión si-entoncista profesada por Russell antes de la publicación de *Principia Mathematica*, es una concepción bastante próxima al ficcionalismo, al menos en la versión profesada por H. Field. Apoyamos esta tesis de similaridad examinando, por una parte, cada una de las concepciones defendidas por Russell en el mencionado período y, por otra, confrontando ambas visiones en relación a la cuestión de la aplicabilidad de la matemática. Finalmente, mostramos que dichas visiones pueden ser caracterizadas mediante una condición no-constructiva sobre los modelos, la condición de serialidad, lo que aún sigue favoreciendo filosóficamente al si-entoncismo por sobre el ficcionalismo, pese a las implicaciones realistas de tal condición.

Palabras claves: ficcionalismo, conservatividad, logicismo, modelo, lógica modal, modelo reflexivo, modelo serial.

Abstract

In this paper we contend, against what fictionalism advocates use to hold, that logicism, in its pre *Principia Mathematica* if-thenist version, is unexpectedly similar to fictionalism, at least in H. Field's version of the latter. We support this similarity claim by examining, on the one hand, each conception held by Russell during that period and, on the other hand, by confronting both views with the applicability of mathematics issue. Finally, we show that such views can be characterized by means of a non-constructive condition upon the models, i.e. the serial condition, and that, despite its realist implications, this characterization seems to philosophically support modal if-thenism rather than fictionalism.

Keywords: fictionalism, conservativity, logicism, applicability of mathematics, model, modal logic, reflexive model, serial model.

1. Ficcionalismo y logicismo russelliano

Un argumento central (tal vez el más importante) que normalmente esgrimen quienes defienden ficcionalismo matemático contemporáneo es que este último nos libera del platonismo o el realismo matemático (Field 1989, Wagner 1982). De una interpretación literal de sus afirmaciones se desprende que ellos pretenden caracterizar con dicho platonismo en primer lugar al programa realista de Frege y sus defensores (aunque ellos consideran como enemigos de igual peso al platonismo pragmático de Quine-Putnam y el platonismo fisicalista de Gödel). Como señala H. Field, el rechazo a justificar este tipo de realismo es "la principal motivación" para una filosofía ficcionalista de las matemáticas.[1] Además, ya que el platonismo fregeano da origen a un programa reduccionista de las aserciones matemáticas a verdades lógicas, conocido como logicismo, su rechazo debería extenderse naturalmente a este programa.[2] Esto parece natural debido en primer lugar a que el ficcionalismo (en su versión standard) considera dichas aserciones como literalmente falsas. En contraste, el logicismo russelliano (en su formulación standard) está resueltamente comprometido con la verdad de la matemática y con traducciones de aserciones matemáticas a enunciados lógicos verdaderos.[3] En segundo lugar, Field critica el logicismo sobre la base de que su reduccionismo lo llevaría aparentemente a asumir a su vez que "existen infinitamente muchas entidades". Esto aplica en particular a la concepción russelliana de *Principia Mathematica* (PM) pues ahí Russell asume explícitamente axiomas no-constructivos o existenciales, como el Axioma de Infinitud o el de Reducibilidad. Y es evidente que supuestos existenciales del tipo que sea introducirán elementos no-lógicos en la reducción haciendo colapsar el logicismo en un platonismo. Por tanto, en lo que concierne al logicismo russelliano, Field parecería tener razón al afirmar que el compromiso con la verdad de aquel lo fuerza a admitir, junto con conocimiento lógico, un conocimiento no-lógico que aparentemente nos brindaría un dudoso acceso a un reino de entidades abstractas.

[1] Field (1989), p.6.

[2] Ibid., pp. 63-64.

[3] Cf. Sainsbury (1979) para las diferentes definiciones de este proceso de traducción en el logicismo russelliano.

Por otro lado, más allá de la interpretación que hace Field del logicismo, es bastante claro que este último puede encontrar más de una formulación y que, de hecho, encontramos versiones no-realistas o incluso anti-fregeanas de él. Por ejemplo, P. Maddy, quien fuera una importante defensora del platonismo fregeano, opone este último al logicismo de Zermelo y al logicismo de los positivistas lógicos desarrollado por Carnap (Maddy 1990). Más precisamente, ella muestra detalladamente que estas versiones de logicismo deben ser caracterizadas derechamente como anti-realistas. Por tanto, el logicismo no parece garantizar sin más realismo matemático. Por otro lado, muchos autores han considerado que hay buenas y poderosas razones para considerar también el logicismo de Russell previo a la elaboración de PM un buen candidato para ser reinterpretado no realista o platónicamente (Putnam 1967a, Gómez 1984).[4] En particular, la filosofía logicista defendida por Russell en el período 1903-1907 –el período que nos interesa examinar aquí– puede ser considerada una fase de maduración (pero distinta) del programa logicista final que Russell defenderá a partir de la publicación de PM en 1910. Dicha fase se ubica cronológicamente (al menos así lo consideraré yo) entre la publicación de *Principles of Mathematics* y el artículo "The Regressive Method of Discovering the Premisses of Mathematics".[5] De este modo, no considera las doctrinas reunidas en el artículo "Mathematical Logic as Based in the Theory of Types" (concebido en 1907 pero publicado en 1908) y que contiene ya los elementos básicos de la concepción logicista madura.[6] Por el valor intrínseco que se le asigna al mencionado período en la tarea de entender el período posterior, ha sido objeto tradicional de interpretaciones divergentes. Por ejemplo, se lo interpreta a veces de una manera simplemente formalista (Maddy 1990), a veces como implementando una actitud deductivista o *si-entoncista* (Putnam 1967a, b), y finalmente otras veces como una fase de transición nominalista hacia un logicismo realista más maduro (Gödel 1944).

Con el propósito de arribar a una posición menos sesgada por estas interpretaciones vale la pena recordar las doctrinas que aparecen globalmente defendidas en

---

[4] Maddy (Maddy 1990) disiente de esta opinión pues trata dicho período del pensamiento de Russell como derechamente próximo al formalismo de Hilbert.

[5] Este período incluirá entre otros artículos, "The Axiom of Infinity" (1904), "The Existential Import of Propositions" (1905), "On Denoting" (1905), "On the Relation of Mathematics to Logic" (1905), "On the Substitutional Theory of Classes and Relations" (1906), "On 'Insolubilia' and their Solution by Symbolic Logic" (1906). Todos estos artículos se encuentran en la compilación de D. Lackey, *Essays in Analysis* (Lackey 1973).

[6] En particular, asunción del principio del círculo vicioso -o anti impredicativismo-, rechazo de las clases entendidas como entidades subsistentes y postulación de una teoría ramificada de los tipos lógicos. Respecto a los dos más controvertidos axiomas existenciales del programa logicista maduro, el axioma de reducibilidad y el axioma de infinitud, el primero aparece en Russell (1908) mientras que el segundo solo es formulado explícitamente en PM, siendo incierto si Russell llegó a admitirlo antes de esa obra (cf. Lackey 1973).

el período en cuestión. Al enumerarlas nos desentendemos de afirmaciones aisladas de Russell que circunstancialmente pueden sugerir un compromiso con visiones realistas, y que atribuimos al aspecto fundamentalmente transicional del período estudiado. Las doctrinas elegidas por consiguiente son aquellas que responden a líneas de argumentos desarrolladas establemente en él:

a. Logicismo: toda aserción matemática verdadera puede ser expresada o traducida mediante una aserción verdadera formulada sólo con vocabulario lógico;
b. Eliminación de las clases como entidades subsistentes mediante una *no-class theory* : las clases –como los números– son ficciones lógicas que se tratan como símbolos incompletos;
c. Desarrollo de una teoría referencialista del significado: las frases descriptivas (definidas e indefinidas) son expresiones sin significado aislado, en contraste, los nombres propios son expresiones referenciadoras genuinas –o constituyentes de una proposición singular– y por tanto tienen significado *per se*[7];
d. Ausencia de compromiso filosófico explícito con principios existenciales: no se aceptan compromisos explícitos con principios existenciales o no-lógicos (en particular, axiomas de reducibilidad e infinitud) aunque se acepta la existencia de funciones proposicionales;
e. Se acepta inductivismo como justificación para la axiomatización: los teoremas en un sistema lógico sirven de base para justificar inductivamente los axiomas supuestos.
f. Finalmente, deductivismo o si-entoncismo respecto a las aserciones matemáticas: la matemática pura es la clase de todas las oraciones de la forma “si p entonces q”, donde ‘p’ puede ser un axioma de una teoría particular y ‘q’ un teorema de esa teoría u otra

La pregunta fundamental es si las concepciones representadas en a-f, tomadas global y no aisladamente, *pueden* generar un rechazo por parte del ficcionalista similar al que le provoca el realismo platónico. La respuesta dista de ser clara. Esto a nuestro juicio se deja ver al llevar a cabo una confrontación inicial de estas tesis con la filosofía ficcionalista de Field. En la siguiente sección nos concentraremos en evaluar el resultado de dicha confrontación para las tesis a hasta e. En la subsiguiente consideraremos en detalle la tesis f, es decir, la cuestión del si-entoncismo y, conectada con ella, la cuestión de la aplicabilidad del conocimiento matemático.

[7] Nótese que esto tiene un efecto inmediato en cuantificación: si los nombres propios ordinarios del lenguaje refieren genuinamente entonces la cuantificación debe ser objetual; si los nombres propios ordinarios son tratados como abreviaturas de descripciones -como hará posteriormente Russell- y se introducen al lenguaje nombres propios lógicos entonces la cuantificación será sustitucional (cf. Lourdes Valdivia 1998)

2. La filosofía de la matemática russelliana previa a PM a la luz del ficcionalismo

Logicismo. Los ficcionalistas rechazan por principio el proyecto de reducir las verdades matemáticas a verdades lógicas y por tanto tienden a rechazar directamente el logicismo. Para ellos las aserciones matemáticas deben ser evaluadas literalmente (*prima facie*) y, evaluadas de este modo, ellas son literalmente falsas como dijimos. Sin embargo, como indica Field en la Introducción a su 1989, no es imposible para el ficcionalista admitir un sentido en el cual las aserciones matemáticas pueden ser consideradas verdaderas. Sólo que en este caso aceptar que '2+2=4' es verdadera es semejante a aceptar que 'Sancho Panza era el escudero de Don Quijote' o 'Hércules desencadenó a Prometeo en el Cáucaso' son verdaderas. Estos enunciados pueden ser verdaderos en el sentido que efectivamente una historia, mitología o teoría dice lo que los enunciados dicen. Así, la afirmación de reducción como traducción que haría el logicismo tradicional de Russell –una afirmación fundamentalmente semántica– podría ser repuesta en este contexto ficcionalista en el cual podemos aceptar verdad por convención. Sin embargo, la resistencia al logicismo de los ficcionalistas se basa aparentemente en una tesis ontológica más profunda: que, dados sus compromisos con la verdad de los enunciados matemáticos, los logicistas no pueden evitar admitir la existencia de infinitas entidades matemáticas. Y, como insiste Field, es obvio que si nos atenemos a las críticas hechas por Kant a derivar existencia a partir de conceptos o predicados, esta posición resulta inadmisible.

Para evitar estos peligrosos compromisos ontológicos, Field se inclina derechamente por desvincular la cuestión de la verdad –la cuestión semántica– de la cuestión del conocimiento matemático –la cuestión epistemológica. Propone entonces que veamos el conocimiento matemático como constituido en una pequeña medida por conocimiento empírico –por ejemplo, conocimiento acerca del uso de axiomas particulares y los conceptos que los constituyen–[8] y *en gran medida* por conocimiento lógico. Así, según Field, lo que en gran parte separa al matemático del neófito, además de conocimiento empírico, es "conocimiento de un tipo puramente lógico." Es claro entonces que Field está por un lado proponiendo rechazar una tesis semántica o traduccional sobre la base de una tesis epistemológica y, por otro, reivindicando la doble naturaleza empírica y lógica del conocimiento matemático, aunque evidentemente por razones diferentes a las aducidas por Kant. De esta manera la cuestión de la verdad deja de ser relevante para la relación entre la matemática y la lógica, y en cambio sí lo es la cuestión del tipo de conocimiento que las

[8] Field distingue conocimiento matemático empírico de *conocimiento-cómo,* constituido por habilidades matemáticas, por ejemplo, la habilidad para probar teoremas matemáticos.

caracteriza. Adicionalmente, Field ve en esta concepción ventajas epistemológicas indudables que vienen a reforzar su antiplatonismo.[9]

En lo que respecta al período russelliano1903-1907, como hemos indicado, no vemos que en él se asuman compromisos explícitos con principios lógicos existenciales o no-constructivos. En segundo lugar, no encontramos tampoco afirmaciones relevantes en él sobre conocimiento de verdades lógicas, excepto aquellas que sugieren claramente que ciertas leyes lógicas, como la ley de no-contradicción, tratan acerca de cosas del mundo, lo que sugiere a su vez que Russell no tomaba aprioridad, en el sentido kantiano al menos, como un sello distinguidor de dichas verdades. [10] En tercer lugar, aunque su concepción de conocimiento lógico es oscura, es transparente lo que Russell pensaba acerca de conocimiento matemático. Como se ha hecho notar muchas veces, desde 1900 (en *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*) hasta 1912 por lo menos, Russell defendió la idea que las verdades matemáticas son no-analíticas o sintéticas. Como indican algunos estudiosos de su obra, en esta época Russell intenta desarrollar un "kantismo empírico, es decir, una epistemología empírica basada en el reconocimiento de que las verdades de la matemática son sintéticas".[11] Así, si desconsideramos las connotaciones apriorísticas de estas verdades sintéticas –que en Russell no podrían ser elucidadas de una manera kantiana– lo que cabría concluir aquí es que efectivamente Russell le suscribía una doble naturaleza empírica y lógica a la matemática, aunque también por razones diferentes a las defendidas por Kant.[12]

De esta manera, es evidente que el logicismo russelliano de la fase 1903-1907 es al menos epistemológicamente compatible con el ficcionalismo. Si los supuestos existenciales no juegan un papel organizador en un sistema matemático deductivo dado y si los axiomas de éste son proposiciones sintéticas pero con contenido lógico entonces (i) los enunciados matemáticos gozarán –mientras no sean aislados del resto de nuestro conocimiento– del mismo carácter sintético o empírico que los

---

[9] Field (1989), pp. 81-82.

[10] Como señala Sainsbury, en toda la filosofía de Russell sólo encontramos dos discusiones sustanciales sobre conocimiento a priori, en el capítulo 10 de *Problemas de la Filosofía* y en un artículo tardío de 1950-2 titulado "Is Mathematics Purely Linguistic?" (cf. Lackey 1973).

[11] Cf. Tomasini (1986), p. 135.

[12] Un problema adicional para afianzar desde el punto de vista epistemológico la compatibilidad entre el pensamiento russelliano de este tiempo y el ficcionalismo, se relaciona con el valor que se le asigne a "conocimiento sintético" aquí. En una interpretación clásica del pensamiento posterior de Russell (probablemente después de 1914) dicho conocimiento, al ser abstracto pero sintético, debe versar sobre algún tipo de objetos. Los candidatos pueden ser, desde un punto de vista psicológico, universales y, desde un punto de vista lógico, formas lógicas. En ambos casos el acceso a la verdad de estos objetos debería estar basado en el principio de familiaridad, ya operante en la filosofía de Russell en 1905. Sin embargo, todas estas especulaciones carecen de cualquier valor a contar de 1912 en que, por influjo de Wittgenstein, Russell abandona definitivamente la visión de que las verdades matemáticas pueden ser sintéticas.

axiomas y (ii) será posible traducir dichos enunciados por enunciados formulados en el vocabulario lógico sin apelar a entidades abstractas. Sobre las razones particulares aducidas para obtener este tipo de conocimiento –convención, intuición, principio de familiaridad, etc.– obviamente puede prevalecer un fuerte desacuerdo. Pero la exploración de estas razones excedería el propósito de la evaluación que aquí intentamos desarrollar.

Ficcionalismo de clases. Evidentemente la eliminación russelliana de las clases supone un acuerdo ontológico con los ficcionalistas. Hablando de su teoría de clases sin clases Russell afirma que "clases, relaciones, números, y en verdad casi todas las cosas son 'falsas abstracciones' en el mismo sentido en que 'el actual rey de Inglaterra' ó 'el actual rey de Francia' es una falsa abstracción".[13] Esta afirmación parece sugerir además un acuerdo semántico. Sin embargo, es importante notar que la base del acuerdo no puede descansar en consideraciones semánticas. Las "ficciones russellianas" son construcciones lógicas, y ya sea que correspondan a números, clases, frases descriptivas, etc., no generan necesariamente enunciados o aserciones falsas ni en matemática, ni en ciencias empíricas, ni en el lenguaje natural. Para que ello ocurra tales ficciones deberían generar enunciados significativos, los cuales pueden ser evaluados consecuentemente por su verdad o falsedad . Pero esto se alcanza si hay algún lenguaje en el cual tales ficciones, entendidas como símbolos incompletos, pueden ser definidas "en uso". El proyecto ficcionalista no contempla una teoría semejante de símbolos incompletos. Además, las definiciones en uso dependen de la asunción del concepto de función proposicional, cosa que en particular Field recusaría directamente. Sin embargo, puede existir un acuerdo adicional sobre la cuestión de la economía inferencial. Hablando sobre el rol que puede jugar la matematica platonista en la física nominalista, Field afirma: "las conclusiones a las que arribamos [agregando la teoría matematica] no son genuinamente nuevas, ellas son derivables ya en una forma más larga y tediosa a partir de las premisas [i.e. la teoría nominalista] sin recurso a las entidades matemáticas",[14] y en un artículo posterior, aclara "la matemática sirve realmente para facilitar inferencias en este sentido, y ciertamente en esto consiste una gran parte de su valor".[15] Russell por su parte sostiene en 1906, comentando sobre su primer intento de eliminar las clases mediante una teoría sustitucional, que "enunciados acerca de una clase sólo serán significantes cuando ellos puedan ser analizados en enunciados acerca de todos o algunos miembros de la clase. El lenguaje que habla acerca de clases es de hecho simplemente una forma de abreviación y llega a ser ilegítimo tan pronto como resulta incapaz de traducción a un lenguaje que no dice nada acerca de cla-

[13] Russell (1906), p. 166 (en Lackey 1973).
[14] Field (1980), pp. 10-11.
[15] Field (1989), p.59.

ses.” [16] En la filosofía posterior de Russell la economía inferencial que las clases o los números reportan consiste, usando la feliz imagen de Ayer, en que ellos son el resultado de “inferencias verticales” (inferencias de entidades de un tipo a entidades de un tipo esencialmente diferente) y no de “inferencias horizontales” (inferencias de entidades de un tipo a entidades del mismo tipo) siendo estas últimas las que exigen el trabajoso método de las construcciones lógicas.[17] Finalmente, tanto la motivación profunda de Russell como la de los ficcionalistas para tratar las entidades matemáticas como ficciones resulta ser la misma: ajustarse en nuestro uso del discurso científico a la navaja de Ockham.[18]

Referencialismo semántico. En general el ficcionalismo no encontraría graves problemas en el referencialismo y, por consiguiente, en el realismo semántico que fluye del artículo “On Denoting” hacia adelante; de hecho, el programa de nominalización de la física suscrito en *Science without Numbers* a nuestro juicio presupone algo así como ese tipo de realismo. Esto es indiscutible en lo que respecta al nivel observacional, lo que se refleja en que Field usa en sus representaciones nominalistas de magnitudes físicas de teorías platónicas sólo cuantificación objetual, es decir, los cuantificadores de sus fórmulas abiertas tienen como rango variables de primer orden clásicas.[19] Un problema diferente se presenta cuando Field usa cuantificación sustitucional en textos posteriores; sin embargo, en nuestra opinión este uso es irrelevante pues aplica sólo a teorías que no son finitamente axiomatizables y éste no es el caso de la aritmética de Peano, que es el objetivo central de cualquier logicismo. Por otro lado, la cuestión de los inobservables parece de más difícil evaluación. Field acepta inobservables sobre una base abductiva (lo que en general coincide con las opiniones que Russell mantiene sobre conocimiento de los universales o las cualidades en el período 1903-1907) pero no parece sentir mucha simpatía por sustituirlos por observables mediante un programa de construcciones lógicas.[20] Es decir, ellos no podrían ser tratados como entidades inferidas russellianas, y esto sugiere un desacuerdo epistemológico no despreciable. Lo que importa destacar en todo caso, desde el punto de vista de Russell, es que el método de construcciones lógicas y el concepto consiguiente de entidad inferida sólo aparecen formulados con claridad a contar de 1914 en “The Relation of Sense-Data to Physics” y por tanto no pueden tener un impacto en la epistemología russelliana del período que estamos comentando.

---

[16] Russell (1906), p.166.

[17] Cf. Ayer (1972), p. 41.

[18] Cf. Russell (1988), p.161.

[19] En todo caso el *lenguaje* favorito en el cual Field formula su física nominalista es de segundo-orden. Es decir contiene variables de primer orden cuyo rango son puntos espacio-temporales y variables de segundo orden cuyo rango son regiones de dichos puntos (o “sumas goodmanianas”).

[20] Field (1989), pp. 15-18

Compromisos existenciales e inductivismo. Ya que no hay postulados de existencia en el período 1903-1097 el acuerdo del russelliano y el ficcionalista en este punto se vuelve viable. Sin embargo, persiste la cuestión acerca de cómo interpretaremos las funciones proposicionales. De hecho, la filosofía russelliana de este período admite una interpretación intensionalista en términos de propiedades, que sería rechazable directamente por el ficcionalista. No obstante, sabemos que Russell fue persistente y deliberamente ambigüo sobre esta noción y que predominantemente la interpreta sólo como una expresión lingüística, lo que satisfacería las exigencias nominalistas del ficcionalista (Sainsbury 1979). En cualquier caso, sea como sea que se interpreten, mientras las funciones proposicionales sean usadas deflacionisticamente para traducir el lenguaje de la aritmética, es decir, como dando origen a formulas de primer orden que traducen afirmaciones acerca de enteros o, si se quiere, acerca de ω-secuencias, el problema de su existencia, como muestra H. Putnam (Putnam 1967a y b), no se plantea. Como afirma Putnam, se plantea obviamente si admitimos fórmulas que afirman en sus cuantificadores dicha existencia pero, en ese caso, lo que tenemos es un compromiso con la noción de totalidad bien definida de las funciones, el que puede ser abandonado sin resentir seriamente el proyecto logicista si-entoncista (aunque sí el proyecto logicista de PM).[21]

Por otro lado, a primera vista, debería haber desacuerdo abierto sobre el uso que hace Russell de la inferencia inductiva en el período 1903-1907. Para Field conocimiento matemático es mayormente conocimiento lógico y en este último no puede intervenir la inducción (o cualquier otra vía empírica de conocimiento) pues eso nos lleva (o aproxima) a los argumentos de indispensabilidad que él busca rechazar. Aunque creemos que, si se diese este desacuerdo, sería relativamente inofensivo para la cuestión de la aplicabilidad, no es difícil mostrar que el acuerdo es más factible que lo contrario. De hecho, postular inductivismo como un medio para justificar los axiomas, como hace Russell, no implica indispensabilidad pues simplemente tal inductivismo no alude a entidades o a clases de entidades físicas. Por otro lado, permite resolver una duda crucial de Field acerca de la versión russelliana de si-entoncismo: ¿cómo un matemático acepta una aserción, que no se sigue de un conjunto dado de axiomas, como un nuevo axioma?[22] Dada la alternativa inductivista, podemos decir que la aserción es aceptada como un axioma sobre la base del conocimiento que obtenemos acerca de sus consecuencias y las interrelaciones entre éstas y la aserción, o en palabras de Field, acerca de la "deseabilidad" de dichas consecuencias. Este conocimiento, aunque inductivo, claramente no podría ser empírico, en acuerdo estricto con lo afirmado por Russell (Russell 1907).

[21] Cf. las próximas secciones.
[22] Field (1989), p. 114.

3. Si-entoncismo y aplicabilidad

Como hemos visto, los ficcionalistas insisten en que aunque la verdad fuese admisible en el sentido sugerido antes bajo el encabezado Logicismo, sería enteramente superflua para explicar la aplicabilidad de la matemática. Ya que además ellos no admiten entidades abstractas de ningún tipo en la matemática pura, se hace inmediatamente claro que el problema más serio que los ficcionalistas deben enfrentar es el problema de explicar la exitosa aplicación de la matemática a las ciencias empíricas y a los asuntos prácticos sin recurrir a ambos supuestos. Si esto no es hecho, el ficcionalismo debería sucumbir ante el poderoso "argumento de la indispensabilidad" que sobretodo Quine ha esgrimido para mostrar la necesidad de abrazar alguna forma de platonismo. Según dicho argumento la admisión de dichas entidades y consecuentemente de la verdad de las afirmaciones que de ellas hacemos es indispensable para explicar el éxito de la ciencia fáctica. Ante esto, el ficcionalismo (al menos en la versión d e Field) responde sustituyendo el requisito de la verdad por un requisito más débil que este último pero más fuerte que consistencia, el requisito de la conservatividad. Este afirma, en términos simples, que la matemática no tiene que ser verdadera para que ella pueda ser aplicada, basta que sea conservativa sobre cualquier vocabulario no-matemático. En términos más técnicos, una teoría matemática M es conservativa sobre una teoría N si y sólo si para todo conjunto T_0 de afirmaciones acerca del mundo físico pertenecientes a N (o, como las llama Field, de "aserciones nominalisticamente enunciables") y toda oración A_0 expresable en N, si $M \cup T_0$ implica A_0 entonces T_0 implica A_0. En otras palabras, y dicho en la forma alternativa favorita de Field, una teoría matemática M es conservativa "si y sólo si para cualquier aserción A acerca del mundo físico y cualquier cuerpo de tales aserciones, A no se sigue de N+M a menos que se siga de N solamente".[23] De acuerdo a Field, si resulta que efectivamente la matemática es conservativa entonces este rasgo explicaría bien su aplicabilidad a las ciencias fácticas: dada una teoría empírica, la conservatividad de la matemática aplicada a ella permite y facilita la inferencia de sus consecuencias. Y ésta sería la función que cumplen los términos matemáticos en los teoremas de dicha teoría. Sin embargo, para rechazar la indispensabilidad del vocabulario matemático no basta con decir lo anterior. Para ello, se necesita probar además que "es siempre posible encontrar cuerpos nominalistas de aserciones que hagan lo que queremos que hagan", es decir que hagan lo que hacen las teorías físicas sin incorporar como una parte indispensable de ellas los términos matemáticos. Es bien sabido que parte del programa de Field desde *Science without Numbers* en adelante consistió en intentar mostrar que esto es posible, es decir, que podemos encontrar siempre sustitutos nominalistas

[23] Cf. Field (1989), p. 58 y Field (1980), p.12.

adecuados de cualquier teoría empírica platonista dada. Las dificultades de este programa, como se ha hecho notar en la literatura (Shapiro 1983, 1984, Malament 1982, Resnik 1983), son variadas, siendo la más importante tal vez que Field no logra discriminar adecuadamente entre el concepto semántico y el sintáctico o deductivo de conservatividad.[24] Sin embargo, para el argumento que estamos desarrollando aquí no es necesario entrar en ellas.

En lo que respecta a Russell, en el período en cuestión no encontramos ninguna afirmación que se pueda conectar con conservatividad. Desde el punto de vista formal esto resulta natural puesto que resultados fundamentales vinculados a conservatividad deductiva, como los Teoremas de Incompletitud de Gödel o el Lema de Lindenbaum, no estaban disponibles para los lógicos matemáticos de su tiempo. Por otro lado, desde el punto de vista filosófico, si bien es posible imaginar una vinculación entre si-entoncismo y conservatividad debido al método de construcciones lógicas desarrollado por Russell, ya hemos indicado que en el período en que prevalece el si-entoncismo el mencionado método no ha sido aún postulado. Además, durante ese período no se encuentra ninguna afirmación por parte de Russell que indique que su filosofía de la matemática implique una eliminación deductiva completa de la matemática del discurso científico. Esto, a mi juicio, imposibilita imaginar, en contra de lo que afirman algunos autores,[25] que los consecuentes de las oraciones si-entoncistas russellianas sean teoremas empíricos totalmente libres de matemática. Sin embargo, debido a que, como hemos visto, durante el período en cuestión Russell elimina las entidades matemáticas más características, las clases y los números, (y posteriormente las proposiciones) se plantea un legítimo problema respecto a cómo el si-entoncismo russelliano podría explicar las aplicaciones de la matemática y la indispensabilidad de esta última. Es decir, cómo podemos interpretar dicha concepción de modo de explicar la aplicabilidad de la matemática sin recurrir a conservatividad ni a un tipo de platonismo. Esto significará obviamente reinterpretar el pensamiento russelliano en esta materia, lo que permitirá clarificar a su vez si el si-entoncismo puede coincidir con el ficcionalismo en relación al status que éstos le atribuyen al conocimiento matemático, aunque no en relación a su aplicabilidad.

Para clarificar la viabilidad de una reinterpretación del pensamiento russelliano sobre aplicabilidad que no apele a conservatividad examinaremos primero con más detenimiento la concepción ficcionalista del conocimiento matemático. El ficcionalismo presupone, como ha venido a reconocer Field en textos posteriores a *Science*

[24] Se puede mostrar que para teorías de segundo orden, es decir, para las teorías nominalistas de Field que traducen teorías empíricas platónicas, el concepto deductivo no es coextensivo con el semántico, de manera que algunas teorías matemáticas que serán semánticamente conservativas en segundo orden sobre una teoría nominalista, resultarán no serlo desde el punto de vista deductivo.

[25] Cf. Maddy (1990), pp. 25-26.

without Numbers, una forma “no-cruda” o refinada de deflacionismo, es decir, la aceptación de que la matemática es un conocimiento de que ciertas afirmaciones matemáticas formuladas en el lenguaje objeto se siguen de otras afirmaciones o cuerpos de afirmaciones matemáticas en ese lenguaje. Como sugiere el mismo Field, evidentemente esta posición es en gran medida reminiscente de, aunque no idéntica a, el ya aludido si-entoncismo russelliano.[26] Por otro lado, en la forma en que ha sido enunciada anteriormente es una posición que seguramente nadie asumiría, pues descuida completamente un tipo fundamental de conocimiento matemático, a saber, el conocimiento de la *consistencia* de las afirmaciones y teorías matemáticas. Ahora bien, el conocimiento de la consistencia de una teoría o afirmación es un conocimiento de tipo lógico. De modo que para formularse coherentemente, es decir, para asegurar que conocimiento matemático es fundamentalmente conocimiento lógico, el deflacionismo debería aceptar que:

(i) sabemos que ciertas afirmaciones matemáticas se siguen (lógicamente) de otras afirmaciones matemáticas;
(ii) sabemos de la consistencia de ciertas afirmaciones o conjuntos de afirmaciones matemáticas.

Desafortunadamente, ya que estas afirmaciones declaran en realidad conocimiento *metalógico*[27] (es decir, no conocimiento acerca de verdades lógicas o verdades si-entoncistas particulares) Field no ve otra alternativa para su deflacionismo que reformularlo modalmente, es decir, con análogos modales de las afirmaciones (i) y (ii):

Los análogos modales serán entonces
(i’) sabemos que ð ($A \supset B$)
(ii’) sabemos que $\Diamond A$,

donde A es la conjunción de los miembros de un cuerpo de afirmaciones matemáticas (p.ej. los axiomas de una teoría finitamente axiomatizada). Las reformulaciones modales son entonces la alternativa ideada por Field para recapturar conocimiento lógico al nivel del lenguaje objeto de la matemática. Comentando sobre el cambio de (i) y (ii) a sus análogos modales Field reconoce, no sin algo de resignación, que

[26] Field (1989), p. 82

[27] Como es patente, (i) declara conocimiento acerca de la relación de *consecuencia lógica,* el que puede ser entendido semántica o sintácticamente (nótese que en ambos casos nos comprometeremos con conocimiento extralógico, de modelos por un lado, de existencia de derivaciones formales por otro). Por otro lado, (ii) declara conocimiento, según Field, acerca de lo que *no se sigue lógicamente* de una afirmación o un conjunto de afirmaciones.

debe "aceptar la idea que la noción de posibilidad lógica es una noción aceptable y además que ella realmente es parte de la lógica y no algo que debe ser explicado en términos de entidades (p.ej. modelos, derivaciones formales o mundos posibles)."[28] Y en otro artículo agrega "deberíamos considerar el operador modal simplemente como un primitivo lógico, que llegamos a entender no definiéndolo sino en la misma forma que llegamos a entender los otros conectivos lógicos [el operador de negación o el cuantificador existencial p. ej.]."[29]

Ni en la filosofía de la matemática russelliana antes de PM ni tampoco en la posterior se pueden encontrar declaraciones explícitas que conciban el conocimiento matemático como un conocimiento de posibilidad lógica. Sin embargo, ya que el núcleo del conocimiento matemático en dicha filosofía reside en la concepción si-entoncista, es una cuestión intrínsecamente valiosa para nuestro argumento establecer si el si-entoncismo russelliano puede ser reformulado modalmente y es lo que intentaremos hacer a continuación.

A nuestro juicio, H. Putnam (en "Mathematics without Foundations" y sobre todo en "The thesis that Mathematics is Logic") es quien ha hecho el mayor esfuerzo por contestar positivamente a la cuestión anterior. En el primer artículo, Putnam sugiere que las afirmaciones matemáticas sean vistas como condicionales del tipo 'ð $(A \supset B)$'[30] y admite que efectivamente dichas afirmaciones pueden ser interpretadas objetual o platónicamente (por ejemplo si el consecuente es una afirmación que habla de números). Sin embargo insiste en que lo que "simplemente dice" esa oración es que el antecedente implica al consecuente, independientemente de las interpretaciones que se hagan de las letras de predicado involucradas en 'A' y 'B'. Y que eso "escasamente tiene que ver con 'objetos'". Tales oraciones son "esencialmente [verdades] de la lógica modal pura (si son [verdades])."[31] Putnam agrega, lo que viene a coincidir con el programa de Field, que tales verdades pueden ser reformuladas en un lenguaje nominalista que hable sólo de ω-secuencias y donde 'ð' es reinterpretado adecuadamente (obviamente no en términos de mundos posibles).[32] Él rotula esta visión como la "pintura modal", por oposición a la "pintura objetual," de la matemática. De acuerdo a la primera pintura "la matemática no tiene *ningún* objeto especial propio, sino simplemente nos dice qué se sigue de qué", es decir, es

[28] Field (1989), pp. 85-86.

[29] Field (1989), p. 76.

[30] Su ejemplo concreto es ð ($Ax \supset \neg$Fermat), donde 'Ax' abrevia la conjunción de los axiomas de la aritmética de primer orden y '¬Fermat' abrevia un, supongamos, contraejemplo al Teorema de Fermat; cf. Putnam (1967b) p. 172.

[31] Ibid.

[32] Putnam sugiere reinterpretarlo como un predicado de oraciones y no como un conectivo oracional; sin embargo, más adelante propone, como una vía aclaratoria, reinterpretarlo semánticamente en términos de modelos – necesidad=verdad en todos los modelos, y posibilidad= verdad en algún modelo–.

conocimiento lógico modal si-entoncista.[33] Por otro lado, si una afirmación individual 'A' nos habla de la existencia de números, funciones, conjuntos, etc. entonces, sugiere Putnam, lo único que deberíamos entender con ella en un lenguaje nominalista es que una (oración sobre una) ω-secuencia es posible, matemáticamente hablando.[34] Esto significa en otras palabras que la afirmación sobre la secuencia es consistente. Esta reinterpretación entonces captura (i') y (ii') de Field. Aunque esta visión putnamiana no está exenta de problemas, lo que nos interesa aquí es explicitar cómo Putnam propone conectarla sistemáticamente con el si-entoncismo de Russell y con la cuestión de la aplicabilidad. Para cumplir lo anterior lo pertinente es examinar el segundo artículo mencionado, que está precisamente centrado en el si-entoncismo russelliano. Antes de exponer algunas de sus tesis, es importante advertir que la discusión de Putnam está centrada en PM y no en el período russelliano que a nosotros nos interesa, pero esto es indiferente para la cuestión de comparar las concepciones de la aplicabilidad del ficcionalismo y del si-entoncismo pues ya hemos indicado que ambas concepciones deben discrepar sobre este punto.

Putnam define el si-entoncismo como la tesis según la cual "si existe cierta estructura que satisface tal-y-cual axioma (por ejemplo, los axiomas de la teoría de grupos) entonces esta estructura satisface tal-y-cual enunciado posterior (algunos teoremas de la teoría de grupos o de otra)".[35] A juicio de Putnam, la gran fuerza conductora del logicismo (basado en si-entoncismo) sigue residiendo en su capacidad de explicar la aplicación de los métodos matemáticos a cuestiones de carácter empírico. Además en la explicación de la aplicabilidad de las traducciones logicistas queda claro según Putnam que cuando estas últimas tratan acerca de afirmaciones en el lenguaje objeto de la aritmética ellas "no presuponen una lógica de orden

---

[33] Ibid. p. 173.

[34] Como indica Hellman (Hellman 1989, pp. 11-12) en principio Russell se opondría a cualquier identificación arbitraria de los números naturales con ω-secuencias pues, según él, ello impediría explicar el proceso de contar (cf. Russell 1988, p. 17). Sin embargo, como señala acertadamente Hellman, esto no puede ser estrictamente correcto: en teoría de conjuntos clásica se puede explicar el proceso de contar afirmando la existencia de una biyección entre los miembros de la clase enumerada y los predecesores del número al que se quiere avanzar (0 será arbitrariamente tomado como el primer número). En cualquier caso, este argumento sugiere que Russell no sentía ninguna simpatía particular por una concepción estructuralista de los números en la medida que ella no sirva "para la vida cotidiana", lo que sugiere que la aplicabilidad de la matemática era fundamental para dotar, a su juicio, de identidad a los números y de verdad a los enunciados que los contienen.

[35] Putnam (1967a) p. 397. Normalmente, Putnam explica satisfacción y consistencia en términos de modelos. Por otra parte, como hemos visto en la nota 27, apela a veces también a modelos para explicar operadores modales. Este recurso a modelos obviamente sería rechazado por Field pues aparentemente reintroduciría la pintura objetual. Sin embargo, como el mismo Field muestra, este recurso puede ser obviado si uno toma implicación y consistencia como primitivos (al menos uno de dos) y se explica su uso (por ejemplo en el teorema de completitud de la lógica de primer orden) mediante reglas de procedimiento ocupadas al inferir (pero distintas de las reglas de inferencia mismas); cf. Field (1989) pp. 32-3.

superior" y por tanto un compromiso con la noción de "totalidad de todas" las funciones proposicionales (una noción russelliana de segundo orden).[36] En otras palabras, esto significa que no necesitamos para la aplicación de la matemática un concepto fuerte de definibilidad o totalidad bien definida de las funciones proposicionales. Ya que la mayoría de las traducciones logicistas de la aritmética son fórmulas que no necesitan esta totalidad Putnam sostiene que "Russell ha probado que algunas verdades matemáticas son una parte de la lógica ... y por tanto que la frontera entre los dos campos no está bien delimitada".[37] La gran dificultad de la explicación que el si-entoncismo ofrece para el problema de aplicar la matemática de PM es que enunciados como "el número de los planetas es nueve" aunque no presupongan la existencia de conjuntos o clases necesitan aparentemente presuponer la *existencia* actual de algún modelo de PM pues si resultara que la frase "M es un modelo de PM" fuese falsa entonces cualquier oración condicional con aquella frase como antecedente resultaría vacuamente verdadera. Y obviamente esto haría verdadera, para todo n, la oración "el número de los planetas es n", bajo la interpretación si-entoncista russelliana.[38] Esta dificultad, que sólo afecta a su concepción de la matemática aplicada pero no a la de la matemática pura, fue lo que condujo a Russell, según Putnam, a abandonar el si-entoncismo.[39]

Putnam muestra, a nuestro juicio convincentemente, que si esa fue la razón de Russell para rechazar si-entoncismo (cuestión en todo caso debatible) dicho rechazo es totalmente evitable. Pues la reinterpretación modal de esta concepción la vuelve tan viable como otras que intentan explicar aplicabilidad. Supóngase que tenemos una traducción logicista P* de una proposición empírica P (la afirmación sobre los planetas) entonces o '$P \equiv P^*$' es un teorema de PM y por tanto verdadera en todos los modelos, de lo que se sigue que PM tiene al menos un modelo. O si no, sólo podemos aceptar P* (sin suponer modelos). Sin embargo, en este caso requerimos deducir P* en PM (mediante un procedimiento si-entoncista) y en dicho caso necesitamos asumir que PM tiene modelos porque de otro modo, la afirmación sería inconsistente (al menos en PM). De este modo, ya que no podemos saber de antemano si la contraparte logicista de una afirmación de matemática empírica es deducible en PM, tenemos que admitir que, si la afirmación empírica fuese verdadera entonces *podría haber* algún modelo tal que se verifique '$P \equiv P^*$' en PM y, si esto es correcto, entonces su contraparte se deducirá ahí. En otras palabras, la deducción de contrapartes logicistas de afirmaciones empíricas en PM depende de la *posibili-*

---

[36] Ibid. p. 409.

[37] Ibid. p. 410.

[38] Ibid. p. 411.

[39] Es fácil advertir que esta opinión de Putnam, al menos en lo que respecta al abandono del si-entoncismo después de PM, es francamente equivocada pues Russell siguió manteniendo esta posición hasta por lo menos 1914, si no más allá.

dad de que PM tenga modelos para ellas o sus contrapartes. Esto a juicio de Putnam pone la confianza en la consistencia (o la no *inconsistencia)* de PM en el centro de la aplicabilidad. Es decir, si no aceptamos que PM *podría tener* modelos para equivalencias como las anteriores, entonces se podría demostrar que PM sería formalmente inconsistente (se derivaría en ellos la contraparte y su negación). Esto según Putnam, muestra que Russell estaba errado sobre si-entoncismo y aplicabilidad pues para explicar esta última no necesitamos existencia actual (como él creía) sino sólo existencia posible. Putnam concluye afirmando que "creer que *podría haber* una estructura que verificase los axiomas de los PM, en cualquier sentido de "podría", significa *por lo menos* estar seguro de que no aparecerán contradicciones en los PM. Y [...] es todo lo que necesitamos para emplear los PM de la manera [si-entoncista] en que lo he descrito [....] Luego, la matemática aplicada *no* presupone que existan actualmente modelos de nuestros conjuntos axiomáticos de las matemáticas [...] , sino sólo que *podrían* existir."[40] En otras palabras, la aplicabilidad sólo presupone que afirmaciones empíricas de primer orden del tipo "si A entonces B" se satisfacen si los axiomas que lo permiten tienen modelos posibles, que es lo mismo que decir que los primeros sean consistentes. Por tanto, cuando el matemático está aplicando la matemática no está haciendo afirmaciones existenciales sino determinando si ciertos enunciados son matemáticamente posibles o imposibles.

4. ¿Qué tipo de conocimiento modal es el conocimiento matemático de un ficcionalista?

Si uno quisiera poner juntos los acuerdos y desacuerdos fundamentales a los que se puede arribar comparando el deflacionismo de Field y el si-entoncismo modal de Russell, en la reinterpretación de Putnam, habría que reconocer como acuerdos: primero, que ambos conciben el conocimiento matemático como en gran medida constituido por conocimiento lógico modal; segundo, que ambos admiten que dicho conocimiento es de base deductivista o si-entoncista (más allá de las interpretaciones de Field sobre el si-entoncismo de Russell); tercero, que ambos privilegian el lenguaje objeto de la matemática pura como la fuente de dicho conocimiento; y cuarto, que ambos piensan que dicho conocimiento se debería construir sin echar mano a supuestos existenciales o no-lógicos referentes a conjuntos, números, etc.

Respecto a los desacuerdos habría que señalar uno que no parece a estas alturas discutible: los ficcionalistas recurren a conservatividad para explicar la aplicabilidad de la matemática eliminando así esta última, los si-entoncistas modales sólo a consistencia de modo de no eliminarla. Este desacuerdo versa directamente sobre aplicabilidad pero no sobre el *tipo de conocimiento* que separaría a ambas posicio-

[40] Field (1989), pp. 415-6.

nes. De hecho, ambas aceptan que conocimiento modal de la consistencia de afirmaciones es fundamental. Por tanto, si el intento de Field por separarlas filosóficamente está en lo correcto, necesitamos alguna diferencia más robusta que especifique con claridad la naturaleza del conocimiento que ambas concepciones dicen estar defendiendo y que no descanse en la cuestión de la aplicabilidad. Field efectivamente intenta proveer dicha diferencia indicando dos desacuerdos fundamentales. En primer lugar, de acuerdo al propio Field, aunque el ficcionalista y el si-entoncista estuviesen de acuerdo en considerar el conocimiento matemático como conocimiento modal esto no es suficiente para asimilar sus posiciones, pues necesariamente el conocimiento matemático para el ficcionalista será conocimiento de posibilidad lógica pura y, en cambio, para los si-entoncistas como Putnam, será un conocimiento no-lógico de posibilidad matemática, es decir, para estos últimos habrá un sentido "fuerte" de posibilidad matemática, En segundo lugar, los si-entoncistas sostienen que la matemática aplicada resulta ser verdadera *si* el conocimiento matemático puro, expresado en PM por ejemplo, resulta ser no sólo consistente sino necesariamente verdadero. Según Field, los ficcionalistas están en condiciones de defender que el conocimiento matemático puro es necesariamente verdadero aunque no sea verdadero. Si esto es así, argumenta Field, la verdad necesaria no aportará ningún fundamento a la verdad de la matemática aplicada.[41] A continuación discutiremos en detalle estos dos desacuerdos sobre conocimiento matemático, lo que permitirá echar luz sobre la naturaleza de las dos concepciones en cuestión.[42]

Field caracteriza el desacuerdo sobre posibilidad matemática entre él y Putnam del siguiente modo:

> "La posición de Putnam aparentemente es que si ud. toma la teoría de conjuntos ordinaria S y alguna alternativa no-standard S' que es inconsistente con S (pero internamente consistente), entonces S es matemáticamente posible pero S' no lo es. La visión del deflacionista es diferente: S y S' están a la par en el sentido que $\Diamond Ax_S$ y $\Diamond Ax_{S'}$." (Ibid. p. 85n).

A nuestro juicio, el contraste entre ambas posiciones que se formula en el pasaje es correcto pero la evaluación que extrae Field de él puede ser claramente resistida. Field argumenta que la única razón para sostener una posibilidad matemática genuina es que el operador modal de las afirmaciones matemáticas que acepta el si-

[41] En varios lugares Field sugiere que éste es el desacuerdo fundamental con el si-entoncismo modal; cf. Field (1989) p. 85 n.7, pp. 270-1 y pp. 278-280.

[42] Otro desacuerdo, aunque no directamente relacionado a la cuestión del status del conocimiento matemático, se relaciona con las traducciones de la matemática aplicada: las traducciones logicistas de la aritmética aplicada pueden ser formuladas con la ayuda de la lógica de primer orden y de funciones proposicionales, mientras que las traducciones ficcionalistas de la matemática aplicada normalmente se formularán en teorías de segundo orden.

entoncista "implique la existencia de entidades matemáticas" (Ibid. p.270). Evidentemente, si ello fuera así la concepción de Putnam no sería inmune a las críticas clásicas hechas al platonismo. Sin embargo, a nuestro juicio la crítica de Field sólo tiene sentido si se ignora la distinción fundamental entre la matemática pura y la aplicada enfatizada por Putnam y su deseo de esclarecer inicialmente la cuestión del conocimiento matemático aplicado. Puesto en la terminología de Field, Putnam está sosteniendo que si hay una traducción logicista *tl* en S de una afirmación empírica, entonces hay un modelo posible que satisface la equivalencia de la afirmación con *tl siempre y cuando* la afirmación de matemática empírica resulta ser verdadera. Ahora bien, en ese caso, ya que S' es inconsistente con S y *tl* se deduciría en S, entonces *tl* no puede ser un teorema de S'. Pero dado ese resultado, tiene sentido decir que S es matemáticamente posible: S es matemáticamente posible porque es aplicable *en este sentido*.

Desde luego, si toda oración verdadera de matemática empírica tiene una traducción logicista *tl* en S entonces tendría también sentido decir –ya que S y S' son inconsistentes entre sí– que S' no es matemáticamente posible (aunque sí sea lógicamente posible): S' es matemáticamente imposible porque claramente no es aplicable en ese sentido. Por tanto, en la concepción de Putnam es la existencia de oraciones verdaderas de matemática empírica la que permite interpretar el operador modal de afirmaciones matemáticas (puras) como implicando la existencia de modelos posibles. Sin lo primero, o mejor dicho, antes de zanjar la cuestión de la aplicabilidad, no se ve claro porqué Putnam debería negar que ambas teorías fuesen puestas a la par. Por otro lado, Putnam efectivamente acepta que podríamos tener más de un sistema axiomático de la matemática pura que fuera consistente (esto se debe a que, a su juicio, exigir que PM fuera consistente puede ser algo demasiado fuerte y por tanto resulta más precavido admitir la consistencia de sistemas "más débiles"). En tal caso la cuestión de la verdad de '$\lozenge Ax_S$' y '$\lozenge Ax_{S'}$' no se podría plantear todavía pues ambos conjuntos de axiomas deben tener modelos si son internamente consistentes. Y si ambos sistemas tienen modelos entonces ambos satisfacen otros enunciados, de acuerdo a la concepción si-entoncista. En otras palabras, sin aplicaciones, tanto '$\lozenge Ax_S$' como '$\lozenge Ax_{S'}$' deberían ser aceptables para el matemático. Es la aplicación exitosa de uno de los dos sistemas (si han de ser inconsistentes entre sí, de acuerdo al argumento de Field) lo que lleva a aceptar que la presuposición de que el sistema tiene modelos posibles permite además afirmar indiscutiblemente que sólo este último es matemáticamente posible y que el sistema alternativo es imposible.[43] Todo esto indica pues que la diferencia sugerida no puede ser interpretada como una diferencia legítima en el tipo de conocimiento que los ficcio-

[43] Ahora bien, es una cuestión más compleja, y en esto se puede acordar con Field, establecer la interpretación más adecuada de esta posibilidad matemática: por ejemplo si puede ser interpretada como una noción lógica (p. ej. satisfacibilidad) de primer orden, de orden superior, o de otra forma.

nalistas y los si-entoncistas modalistas asociarían con la matemática, ya que, de acuerdo a lo que hemos argumentado, en términos de conocimiento puro o no-aplicado, dicho conocimiento sigue siendo puramente lógico para ambos bandos.

La discusión respecto al último desacuerdo sobre verdad necesaria nos exigirá hacer precisiones adicionales sobre la semántica del conocimiento lógico modal que pretende defender el ficcionalismo (abreviaremos este conocimiento como ‘CLMF’). Para ello podemos usar la caracterización particular de verdad lógica en términos modales que ofrece el propio Field. Dicha caracterización se distingue de la definición clásica de verdad modal ofrecida por Kripke solamente en la definición del operador de posibilidad. En particular la semántica modal de Field retiene la idea clásica que verdad lógica es verdad en todos los modelos. La siguiente es la definición que formula para el operador de posibilidad:

> (VF) ‘◊A’ es verdadera en el modelo M si y sólo si A es verdadera en el modelo M* para algún modelo M*

La novedad evidente de la anterior definición es que introduce cuantificación sobre los modelos y no sobre los mundos (un modelo, para Field, será sólo “la porción de mundo actual” de un modelo de Kripke). Esto, sostiene Field, evita dejar el modelo fijo y con ello evita, a su vez, que para decir que el enunciado ‘◊A’ es una verdad lógica debamos exigir que A sea verdadera en todos los modelos y en cada mundo de esos modelos, en particular en todos aquellos modelos “en los cuales hay un solo mundo posible”.[44] Esta caracterización entonces le permite a Field efectivamente aceptar como verdades lógicas fórmulas que no son verdades de la lógica de primer orden, como ‘$\Diamond(\exists x)(\exists y)(x \neq y)$’ o ‘◊(∃x)(x es un electrón)’. Parece evidente que ambas fórmulas sin el operador modal satisfacen siempre el lado derecho de VF y por tanto sus versiones con el operador de posibilidad resultarán verdaderas en todo modelo M, dada esa definición. Y es claro que aunque M fuese un modelo con un solo mundo en el cual A es falsa dicha verdad no se verá alterada, pues basta que siempre encontremos un modelo M* *asociado con* M tal que satisfaga a A para que ◊A sea verdadera.[45] Nótese por tanto que la *verdad lógica* de ‘◊A’ sigue dependiendo de que ella (no A) sea verdadera bajo todos los modelos.

[44] Trivialmente, si un modelo cuenta con un solo mundo posible entonces este mundo no se relaciona o no tiene acceso a ningún otro mundo en el modelo. En la semántica del sistema modal más débil, K, donde los mundos no se relacionan consigo mismos, es bien claro que en un modelo de este tipo una formula como ‘◊A’ resultará siempre falsa y una fórmula como ‘ðA’ resultará siempre verdadera (cf. Hughes y Cresswell 1996, pp. 44-5 y Priest 2001, p. 22). Sin embargo, en la semántica de un sistema más poderoso, por ejemplo S4 o S5, efectivamente ‘◊A’ puede resultar verdadera en un mundo aislado a condición de que el mundo se relacione consigo mismo y que A sea necesariamente verdadera.

[45] Field asocia esta versión de la semántica modal con Carnap (1956) y Cocchiarella (1975), entre otros autores; cf. Field (1989), p. 116ss.

Ahora bien, VF provee una caracterización más bien interna de la semántica de CLMF. Sin embargo, la caracterización externa de Field de su concepción, es decir, la determinación de qué tipo de modelos de lógica modal puede representar exactamente las verdades lógicas de CLMF, es mucho menos refinada. El sólo insiste en que debe ser un sistema como S5, es decir un sistema cuyos modelos son reflexivos, transitivos y simétricos.[46] Además indica explícitamente que no podría tratarse de un sistema del tipo S4 pues es fundamental a su visión validar la tesis metalógica "si L(ógicamente) consistente(A) entonces es L(ógicamente) verdadero que L(ógicamente) consistente (A)" que en un lenguaje objeto modal corresponderá a la tesis característica de S5.[47] Esto, como él señala, indica que el sistema en cuestión no puede tratarse de un sistema modal de simple demostrabilidad, como el sistema Gödel-Löb (GL), pues en él no se puede validar la mencionada tesis. Estas indicaciones, en nuestra opinión, resultan un tanto confundentes para obtener una caracterización externa de CLMF. En particular, si uno suspende el juicio respecto a la aceptación de VF, no parece que Field pueda aceptar sin restricciones los modelos S5 debido simplemente a que conservatividad impide aceptar la condición de reflexividad, propia de ellos (es imposible para un conservativista aceptar que una tesis necesariamente verdadera de la matemática sea una verdad matemática).[48] Todo ello exige, antes de hacer la mencionada caracterización, tener claridad acerca de los requisitos aceptables para Field. Los siguientes parecen cubrir lo básico de CLMF:

a. CLMF debe ser no reflexivo (verdad necesaria no implica verdad).
b. En CLMF consistencia lógica debe ser representada como conocimiento de tesis del tipo '◊A' o '◊T'.
c. CLMF no puede ser un conocimiento de demostrabilidad (el operador de necesidad L no puede leerse simplemente como 'demostrable en ...').
d. Cualquier sistema que represente CLMF debe ser internamente consistente (es decir no pueden haber en él tesis del tipo '◊(p & ¬p)' o '◊⊥')

Dejando de lado por el momento los escrúpulos de Field con los mundos posibles, las condiciones a-c sugieren fuertemente que los modelos modales clásicos (o normales) más adecuados para representar la concepción ficcionalista de Field son aquellos que incorporan una condición de *serialidad* sobre los mundos del modelo. Esta condición diría entonces que la fórmula '◊A' es verdadera en un mundo m si y

[46] Ibid, p. 117.

[47] Cf. Ibid., p. 37.

[48] La condición de reflexividad es caracterizada en lógica modal mediante el axioma 'ðA ⊃ A' o, alternativamente, el axioma 'A ⊃ ◊A', cualquiera de los cuales define el sistema más elemental después del sistema K, el sistema T, y por tanto la clase de los modelos reflexivos asociados con dicho sistema.

sólo si para todo mundo m del modelo M existe otro mundo m’ tal que m está relacionado con m’ y A es verdadera en m’. La condición de serialidad, como es bien sabido por los lógicos modales, permite validar tesis del tipo ‘ A ⊃ ◊A’ a condición de que el modelo no posea índices finales o puntos muertos, esto es, a condición de que no existan mundos –en los que se evalúan las fórmulas– que no se relacionan con ningún mundo del modelo. Es decir, a condición de excluir modelos con un solo mundo como relevantes para la evaluación semántica de esa clase de fórmulas. Ya que excluyen dichos mundos, es natural que en los modelos seriales se obtengan tesis del tipo ‘◊A’ como verdades lógicas y que además ello no se deba a la condición de reflexividad.[49] Esto último es consecuencia de que en tales modelos no es relevante si el mundo en el que ‘◊A’ es verdadera es el mismo en el que A es verdadera (puntos muertos donde no se cumpla reflexividad indefectiblemente harán falsas fórmulas del tipo ‘◊A’, aunque ‘A’ fuese una ley lógica). Finalmente, los sistemas seriales no dan origen a sistemas de demostrabilidad a no ser que se agregue a ellos una condición explícita[50]. Todo lo dicho hace claro, a nuestro juicio, que son sistemas modales seriales los que interpretan mejor, desde un punto de vista externo, CLMF, es decir cumplen satisfactoriamente con los requisitos anteriores.

Ya que Field renuncia, en principio, a caracterizar su semántica en términos de mundos posibles parecería entonces haber una discrepancia entre la caracterización externa y la interna de CLMF. Sin embargo, a nuestro juicio, esta discrepancia es sólo aparente. Como vimos, la cláusula VF permite establecer cuándo una formula del tipo ‘◊A’ califica o no como una verdad lógica. Ahora bien, podemos, a partir de VF, definir con más precisión aún este último concepto. Esta definición deberá incorporar explícitamente dos características presupuestas en la aceptación de verdad lógica relativa a modelos: en primer lugar, la idea de que verdad lógica impli-

[49] Es importante hacer claro aquí que lo que estamos afirmando no aplica a la semántica de necesidad lógica de Carnap ni la semántica “secundaria” de Cocchiarella ya citadas en la n. 45. Dichas semánticas son formuladas explícitamente para validar las tesis de una versión cuantificada de S5 (cf. Cocchiarella 1984, pp. 315-16). Por tanto, ellas capturan la condición de reflexividad también, sólo que relativizada a un subconjunto no vacío de modelos, en acuerdo con lo que dice VF. Sospecho que ésta podría ser la réplica de Field en este punto. Sin embargo, dado que la exigencia de conservatividad debe aplicar obviamente a ese subconjunto, tal resultado de las semánticas secundarias no es alcanzable para Field. En tales modelos las tesis de la aritmética de Peano todavía serían lógicamente válidas (aunque no verdaderas) de acuerdo a la mencionada exigencia. Por tanto, VF más conservatividad no entregará reflexividad, es decir, no validará tesis de la forma ‘ðA ⊃ A’ aunque sí validará tesis de la forma ‘ðA ⊃ ◊A’ (si A es lógicamente válida (en M*) entonces es lógicamente consistente (en M*)), es decir, validará tesis de un sistema de base serial.

[50] El sistema GL no es de base reflexiva por tanto en principio, y más allá de los argumentos de Field, puede interactuar con sistemas seriales, es decir con sistemas de tipo D. Sin embargo, como se ha hecho notar en la literatura, la no-reflexividad de GL o sistemas semejantes (por ejemplo S4Grz) limita el alcance de la demostrabilidad, de manera que la aceptación de reflexividad parece inevitable; cf. Goldblatt (1993), pp. 105-106, Boolos (1979), p. 161 y Jansana (1990).

ca cuantificación sobre todos los modelos y, en segundo lugar, que debe existir una relación sosteniéndose entre los modelos M y M* (para los propósitos en juego aquí no necesitamos caracterizar adicionalmente esta relación[51]). La definición que se obtiene entonces es la siguiente

> (VF*) '◊A' es verdadera en todo modelo M si y sólo si para todo M existe un modelo M* tal que M esta relacionado con M* y A es verdadera en M*.

Como se puede observar, el lado derecho de VF* es una especificación de la condición de serialidad pero no para mundos sino para modelos. Nótese además que VF* captura también explícitamente la idea de excluir puntos muertos pues ahora no existen modelos que no se puedan relacionar con al menos otro modelo. Por tanto, aún relativizada a modelos, es posible interpretar unívocamente el CLMF defendido por Field.

5. Una evaluación de las caras de la moneda

En lo que respecta a la concepción del conocimiento matemático que fluye del si-entoncismo de Putnam, es fácil extraer su caracterización modal contrastándola con las condiciones a-d. El si-entoncismo putnamiano puede aceptar b y d, pero debe rechazar obviamente a. Además, la aceptación de c es una opción que permanece abierta en la medida que el sistema sea sólo de base reflexiva. De esta manera, los modelos asociados con dicha concepción cumplirán, entre otras, con las condiciones de reflexividad, no-simetría y, alternativamente, con transitividad (si queremos que ellos sirvan para incorporar interpretaciones de demostrabilidad)[52]. Sin embargo, es crucial advertir aquí que la condición de reflexividad no es incompatible con la condición de serialidad y, de hecho, cualquier modelo reflexivo en lógica modal (y no-modal) validará todas las tesis de los modelos seriales. En otras palabras, reflexividad implica serialidad. Así, la condición VF* (e incluso VF) podría ser asumida por el si-entoncismo modal sin ninguna pérdida filosófica importante para este último.

De este modo, constatamos que el último desacuerdo fundamental defendido por Field entre las dos concepciones que hemos estado contrastando a lo largo de

[51] Obviamente la relación no necesita ser aquella conectando mundos, es decir, de posibilidad relativa o "accesibilidad"; perfectamente puede ser una de "extendibilidad" entre submodelos y sus modelos o cualquier otra apropiada a modelos o, al menos, al sentido que Field le adjudica al concepto de modelo en su semántica.

[52] Es importante indicar aquí que la condición de serialidad no determina *per se* una relación R que es una serie. Para ello necesitamos, junto con no-reflexividad, admitir que R es transitiva y conectada.

este ensayo reside en si se acepta o no la condición de reflexividad, que no es otra cosa que si se acepta o no la condición de conservatividad. Y esto una vez más nos devuelve a la cuestión de la aplicabilidad. La cuestión del tipo de conocimiento defendido por ambas concepciones por tanto parece seguir dependiendo de cuestiones extra-epistémicas.

Sin embargo, es sugerente observar que, enfrentados por igual a una evaluación filosófica, CLMF parece ahora mucho menos coherente en su motivación que el si-entoncismo putnamiano. Como hemos visto, ambos estan sujetos a aceptar una condición no-constructiva sobre los modelos (sea como sea que se conciban estos últimos), la condición de serialidad. Es decir, una condición que exige aceptar la existencia de al menos un modelo o mundo posible, en orden a determinar la validez lógica de fórmulas del tipo '◊A'. Esto muestra entonces que efectivamente en ambos reside un compromiso sutil con la existencia de entidades, sean ellas modales o de otro tipo. Para un anti-realista recalcitrante esto bastaría para rechazar ambas concepciones indudablemente. Sin embargo, una evaluación menos dogmática o fundamentalista recomendaría retrotraer las cosas a la cuestión de la aplicabilidad. Y juzgado desde el punto de vista de la aplicabilidad, el compromiso del si-entoncismo con la existencia de modelos posibles sigue resultando enteramente coherente con lo explicado en la sección anterior: la matemática pura –entendida como conocimiento lógico si-entoncista– no presupone la existencia de tales entidades, pero su aplicabilidad la presupone, so pena de asumir que la primera es inconsistente. Y a esto se limita decir que las verdades matemáticas son posibles. La matematica empírica habla entonces de tales verdades. En cambio, el programa ficcionalista de Field explícitamente rechaza, como hemos visto, que la aplicabilidad de la matemática tenga algo que ver con presuponer la existencia de cualquier tipo de entidad. Al contrario, explicar la aplicabilidad de la matemática es mostrar que ninguna de tales entidades es indispensable. Además, reforzando este punto, Field insiste en que el conocimiento matemático entendido como conocimiento lógico modal no es algo que "deba ser explicado en términos de entidades". Nuestras conclusiones muestran que esto último no es algo filosóficamente alcanzable y por tanto echan dudas sobre la coherencia de la explicación de la aplicabilidad de la matemática defendida por Field. Dichas dudas además, como se vé, no descansan en cuestionar directamente la viabilidad de la noción de conservatividad.

Así, parece ser que –más allá de las razones ofrecidas por Field– ambas concepciones comentadas son efectivamente caras de una misma moneda: una cara conservativa y otra no-conservativa. Sin embargo, y ésta tal vez es la paradoja que resulta de todo nuestro examen, en cierto sentido rechazar una cara debe significar rechazar indudablemente la moneda, pero, en otro sentido, una cara puede valer más que la otra. Aunque sea especulativo, no es descabellado imaginar que fue la conciencia de esta situación paradójica la que ha llevado a Field a ver su ficcionalismo y el si-entoncismo modal de Putnam como "intentando llegar esencialmente al mismo lugar, incluso aunque desacordemos acerca de la mejor ruta para llegar ahí."[53] Si eso fuera correcto, lo que nosotros sugeriríamos es que sólo una de las rutas llegará a destino.

Referencias bibliográficas

AYER, A. (1972) *Russell*, Fontana Modern Masters Series, London.

BOOLOS, G. (1979) *The Unprovability of Consistency. An Essay in Modal Logic,* Cambridge University Press, Cambridge.

CARNAP, R. (1956) *Meaning and Necessity,* University of Chicago Press, Chicago.

COCCHIARELLA, N. (1975) "On the primary and secondary semantics of logical necessity", *Journal of Philosophical Logic*, 4, 13-27.

FIELD, H. (1980) *Science without Numbers: a defense of nominalism,* Basil Blackwell, Oxford.

FIELD, H. (1989), *Realism, Mathematics and Modality*, Blackwell, Oxford.

GÖDEL, K. (1944) "La lógica matemática de Russell" en Mosterín, J. (ed.) *Obras Completas*, Alianza, Madrid, 1989.

GOLDBLATT, R. (1993) *Mathematics of Modality*, CSLI, Stanford.

GOMEZ, R. (1984) "El status de las clases en el logicismo de Russell (1903-1910)" en *Hacia una Explicación de las Entidades Lógicas*, UNAM, México, D.F.

HELLMAN, G. (1989) *Mathematics without Numbers*, Clarendon, Oxford.

HUGHES, G.E. y Cresswell, M. (1996) *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, London.

JANSANA, R. (1990) *Una Introducción a la Lógica Modal*, Tecnos, Madrid.

MADDY, P. (1990) *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

MALAMENT, D. (1982) "Review of Field (1980)", *Journal of Philosophy*, 79, 523-34.

PRIEST, G. (2001) *An Introduction to Non-Classical Logic*, CambridgeUniversity Press, Cambridge,

PUTNAM, H. (1967a) "La Tesis de que las Matemáticas son Lógica" en Schoenman, R. (ed.) *Homenaje a Bertrand Russell*, Oikos-Tau, Barcelona, 1968.

PUTNAM, H. (1967b) "Mathematics without Foundations", Hart, W.D. (ed.) *The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1996.

RESNIK, M. (1983) "Review of Field (1980)", *Nous*, 27, 514-19.

RUSSELL, B. (1958) *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz,* G. Allen and Unwin, London (ed. original: 1900, Cambridge University Press, Cambridge)

RUSSELL, B. (1903) *The Principles of Mathematics*, Norton & Co., New York (hay

[53] Field 1989 op. cit.p.281.

trad. en español: *Los Principios de la Matemática,* Espasa-Calpe, Bs. Aires, 1948)

RUSSELL, B. (1973) *Essays in Analysis,* D. Lackey (ed.), G. Allen & Unwin, London.

RUSSELL, B. (1908) "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types" en Marsh, R. (ed.) *Logic and Knowledge*, Routledge, London, 1956.

RUSSELL, B. (1910-13) *Principia Mathematica,* Cambridge University Press, Cambridge.

RUSSELL, B. (1968) *The Problems of Philosophy*, Oxford University Press, London (ed. original: 1912).

RUSSELL, B. (1914) "The Relation of Sense-Data to Physics" en *Mysticism and Logic*, Unwin, London , 1917.

RUSSELL, B. (1988) *Introducción a la Filosofía Matemática*, Paidós, Barcelona (ed. original: 1919)

SAINSBURY, M. (1979) *Russell*, Routledge & Kegan Paul, London.

SHAPIRO, S. (1983) "Conservativeness and incompleteness", *Journal of Philosophy*, 80, 521-31.

SHAPIRO, S. (1984) "Review of Field (1980)", *Philosophia*, 14, 437-44.

TOMASINI, A. (1986) *Los Atomismos Lógicos de Russell y Wittgenstein*, UNAM, México, D.F.

VALDIVIA, L. (1998) "Teorías de la referencia", *Filosofía del lenguaje I, Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía* vol. 16, Ed. Trotta, Madrid.

WAGNER, S. (1982) "Arithmetical Fiction", *Pacific Philosophical Quarterly*, 63, 255-69.

Wilfredo Quezada Pulido
Departamento de Filosofía
Universidad de Santiago de Chile
wquezada@lauca.usach.cl