Aquiles, la Tortuga y el infinito

José Enrique GARCÍA PASCUA

IES “Ezequiel González”, Segovia

Resumen

En el presente trabajo aparece un análisis de algunas de las soluciones que se han encontrado a la famosa aporía de la carrera entre Aquiles y la Tortuga.

A modo de introducción, se presenta la solución que ofrece la mecánica, con el fin de establecer que no es en el ámbito de los sucesos naturales en donde cabe resolver un problema puramente racional, como es éste, el suscitado por Zenón de Elea. El grueso del artículo, por ello, se dedica a las soluciones matemáticas, que enfrentan el problema bajo el punto de vista de la sola razón –matemática–.

Hay dos soluciones matemáticas para la paradoja de Zenón. La primera tenida en consideración es la que el autor denomina clásica (por ser aquella a la que habitualmente recurren los matemáticos), que se basa en el cálculo de la suma de los términos de una serie geométrica progresivamente decreciente. La segunda solución considerada se basa en la teoría de los números transfinitos y fue propuesta por Russell.

El análisis efectuado nos lleva a descubrir que ninguna de estas soluciones se salva de incurrir, al final, en contradicciones lógicas, por lo que parece que el problema de Zenón es una auténtica aporía, que, después de tanto tiempo, continúa retando a la inteligencia humana.

Como conclusión del artículo se apunta que la causa de la imposibilidad de resolver el problema de Zenón se halla en que la noción de continuo matemático es ella misma una noción que contraviene la lógica de los hechos.

Palabras clave: Paradoja de Aquiles y la Tortuga. Soluciones matemáticas. Serie geométrica progresivamente decreciente. Cardinal del conjunto de los números reales. Noción de continuo matemático.

Abstract

This paper shows an analysis of some found solutions for the famous aporia of the race between Achilles and the Tortoise.

As an introduction, we present the mechanical solution, to establish that it is not in the field of matters of fact where you can resolve a purely rational problem like the one raised by Zeno of Elea. And so, the main part of the article is dedicated to the mathematical solutions, which face the problem under the point of view of the single, mathematical reason.

There are two mathematical solutions for Zeno's paradox. First, we attend to that which we denominate "classical" (because it is the most habitually used by mathematicians), which is based on the calculus of addiction of terms of a geometrical series in progressive decrease. The second considered solution is the one that was proposed by Russell, based upon the theory of the transfinite numbers.

The analysis we have made gets us to discover that no one of those solutions can save itself from falling into logical contradictions, therefore it seems that Zeno's problem is an authentic aporia, which, after so much time, continues challenging human intelligence.

As the article's conclusion, we suggest that the cause of the impossibility of solving Zeno's problem is the very notion of mathematical continuum, because this notion infringes the logic of facts.

Keywords: "Achilles and the Tortoise" paradox. Mathematical solutions. Geometrical series in progressive decrease. Cardinal of the real numbers set. Notion of mathematical continuum.

1. Planteamiento

El filósofo Zenón de Elea presentó hace mucho tiempo la siguiente cuestión:

Si compiten en una carrera Aquiles, el de los pies ligeros, y la Tortuga, el más lento de los animales, aquél nunca cogerá a ésta, con tal de que la Tortuga inicie la carrera con una ligera ventaja con respecto al Pélida.

En efecto –argüía Zenón–, antes de alcanzar a la Tortuga, Aquiles debe recorrer el espacio que le separaba inicialmente de ella y, mientras tanto, la Tortuga habrá avanzado una distancia, por pequeña que sea. Del mismo modo, Aquiles debe recorrer esta distancia que ahora le separa de la Tortuga antes de alcanzarla, dando ocasión al animal de avanzar otro poco, aunque sea una distancia minúscula, con lo que de nuevo surge una separación entre ambos corredores que Aquiles ha de cubrir en un tiempo durante el cual la Tortuga adelantará otra ínfima magnitud espacial, y así, aunque progresivamente decreciente, siempre existirá una separación entre los dos corredores.

Esta cuestión constituye una aporía, porque el resultado del anterior razonamiento es contradictorio con el testimonio que nos ofrecen los sentidos, según el cual Aquiles no tarda en atrapar a la Tortuga. Lo que Zenón pretendía era poner de manifiesto –en defensa de la doctrina de su maestro, Parménides– que el conocimiento sensible es engañoso y que únicamente nos podemos fiar de la razón para descubrir la verdad.

Como resulta natural, las conclusiones de Zenón no son del agrado de la mayoría de la gente, que está convencida de que el mundo real es acorde con lo que percibe, por lo que a lo largo de los siglos se han presentado muchas refutaciones del argumento de Zenón desde puntos de vista diferentes.

En lo que sigue, me ceñiré a discutir sobre dos tipos de refutaciones, las que proceden de la ciencia física y las que analizan la aporía con un enfoque matemático, si bien el interés se centra en este último tratamiento del tema.

2. Solución física

Para los físicos no existe la paradoja de Zenón, sencillamente porque la imposibilidad de que Aquiles alcance a la Tortuga no entra dentro de los hechos de la experiencia, antes bien, podemos mostrar a los sentidos por medio de una prueba elemental que Aquiles alcanza a la Tortuga al cabo de un recorrido finito. Este resultado empírico, además, es susceptible de ser explicado conforme a las leyes de la mecánica.

Cuando se trata de describir un movimiento, los físicos acuden –como es bien sabido– a la medida de dos parámetros, el espacio recorrido por el móvil y el tiempo transcurrido desde que comenzó a moverse. La medida de estos parámetros únicamente requiere disponer de una cinta métrica y de un cronómetro. La velocidad que lleva el susodicho móvil en cada punto de su trayectoria viene dada por la razón entre el espacio recorrido y el tiempo transcurrido ($v = \frac{ds}{dt}$).

Para que el experimento a realizar sea bien sencillo, supongamos que tanto Aquiles como la Tortuga, reducidos a sendas masas puntuales, comienzan a correr en el mismo instante y se desplazan con un movimiento rectilíneo y uniforme en la misma dirección y sentido, de tal modo que, en tiempos iguales, Aquiles recorre el doble de espacio que la Tortuga, esto es, que aquél se traslada a una velocidad doble que la de ésta.

Si la distancia que separa los puntos de partida de ambos corredores es d_0, puesto que sus respectivas velocidades son constantes y están en proporción de dos a uno, para describir la carrera hemos de tomar estas ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} v_A &= \frac{d_0+s}{t} \\ v_T &= \frac{s}{t} \\ v_A &= 2v_T \end{aligned}\right\} \quad \frac{d_0+s}{t} = 2\frac{s}{t} \;\;,,\;\; d_0+s=2s \;\;,,\;\; \boxed{s=d_0}$$

(v_A*:* velocidad de Aquiles; v_T*:* velocidad de la Tortuga; *s:* espacio desde el punto de partida de la Tortuga hasta el punto de alcance; *t:* tiempo que dura la carrera).

Es decir, que cuando Aquiles haya recorrido dos veces la distancia d_0, la Tortuga sólo habrá recorrido una vez esta distancia y será en ese punto (a una distancia d_0 del punto de partida de la Tortuga) en donde los dos competidores se encuentren.

La ejecución del experimento nos permitirá observar que, en efecto, las cosas ocurren como describe el cálculo que acabamos de hacer.

Esta solución, empero, no responde a las expectativas suscitadas por Zenón, ya que éste considera que lo que prevalece es la conclusión racional, por encima de los datos que nos pueda suministrar la sensibilidad, y todo el desarrollo algebraico que hemos consumado no es sino *una explicación posterior de lo que sabemos a través de los sentidos*. Así es, la base del experimento a realizar está en las mediciones que, con una cinta métrica y un cronómetro, se llevan a cabo y que nos permiten determinar sobre el terreno la posición exacta en que coinciden los dos corredores, resultado que después generalizan los científicos por medio de las ecuaciones de la mecánica que más arriba se han usado.

Dice Richard P. Feynman, Premio Nobel de Física de 1965, con respecto a la aporía de Aquiles y la Tortuga que el error cometido “está en que una cantidad finita de tiempo puede ser dividida en un número infinito de partes, tal como una longitud de línea puede ser dividida en un número infinito de pedazos dividiéndola repetidamente en dos. Y así, aunque hay un número infinito de pasos (en el razonamiento) hasta el punto en el cual Aquiles alcanza a la tortuga, no significa que haya una cantidad infinita de *tiempo*”[1]. Ni una cantidad infinita de tiempo, ni tampoco de espacio, puesto que los datos empíricos con los que trabaja un físico son siempre cantidades finitas. Sin embargo, es cierto que cualquier cantidad finita puede ser divida *in mente* en infinitas partes, y eso es lo que hace Zenón, para poner de manifiesto que la razón no siempre está de acuerdo con los hechos de la experiencia y que, dado que somos filósofos, hemos, en este caso, de conceder preeminencia a la razón, por mucho que sus inferencias se opongan a lo aparente.

---

[1] FEYNMAN y otros: *Física. Volumen I*, pág. 8-4.

3. Solución matemática

La manera correcta de enfocar el problema es, según mi opinión, desde las matemáticas, que nos aportan todos los recursos *racionales* que necesitamos para tratar la cuestión de la infinita divisibilidad de la carrera entre Aquiles y la Tortuga. Se trata, efectivamente, de un problema en el espacio geométrico, y la magnitud temporal que tienen en cuenta los físicos aquí se reduce a la sucesión sobre la línea de los puntos que en cada momento ocupan tanto Aquiles como la Tortuga. La discusión dentro del ámbito matemático resulta, de este modo, conforme a la exigencia de Zenón de usar sólo de la razón, prescindiendo de cualquier referencia a lo que nos puedan aportar los sentidos, incluido el sentido de la duración.

Hasta donde llega mi saber, se han presentado dos soluciones matemáticas a la paradoja de Zenón, una, que podemos llamar clásica, y otra la que Bertrand Russell nos cuenta, que la teoría del infinito de Cantor constituye la solución definitiva del problema. Nos ocupamos a continuación de ambas soluciones por separado.

3.1. Solución matemática clásica

Retomemos las mismas condiciones para la carrera entre Aquiles y la Tortuga que suponíamos en el apartado 2, es decir, que ambos empiezan a correr a la vez, se desplazan con un movimiento rectilíneo y uniforme en la misma dirección y sentido y Aquiles corre a una velocidad doble que la Tortuga.

Consideremos los momentos sucesivos, 1, 2, 3, …, n, …, en que Aquiles llega al punto que ocupaba la Tortuga en el momento anterior. Las posiciones iniciales de Aquiles y de la Tortuga son A_0 y T_0 respectivamente, corresponden al momento 0 y se hallan separadas por una distancia d_0.

A_n es el punto en que está Aquiles en el momento n, T_n, el punto en que está la Tortuga en el mismo momento. Obviamente, el punto T_n equivale al punto A_{n+1}. Designamos por d_n la distancia que separa A_n de T_n y a_n es el espacio recorrido por Aquiles en el intervalo transcurrido entre el momento n-1 y el momento n. Igualmente, t_n es el espacio recorrido por la Tortuga en el mismo intervalo.

Estas especificaciones aparecen de manera gráfica en el siguiente dibujo, en el que las trayectorias de Aquiles y de la Tortuga se representan por sendas rectas paralelas:

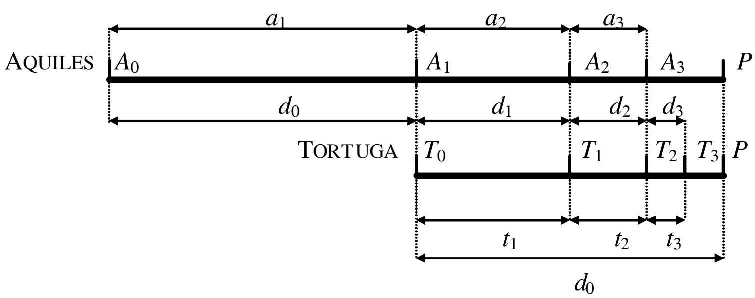

Gráfico 1

A partir de estas condiciones, disponemos de tres sucesiones numéricas que, de acuerdo con el planteamiento que hace Zenón, son indefinidas (tienen infinitos términos). La sucesión ***d*** de las distancias decrecientes que separan a Aquiles de la Tortuga en cada momento; la sucesión ***a*** de los espacios decrecientes recorridos por Aquiles en cada intervalo, y la sucesión ***t*** de los espacios decrecientes recorridos por la Tortuga en cada intervalo.

Una simple ojeada al *gráfico 1* nos permite percatarnos de que existe una igualdad entre los términos de la sucesión ***a*** y los términos de la sucesión ***d***, de tal modo que se da:

$$a_1=d_0$$
$$a_2=d_1$$
$$a_3=d_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n=d_{n-1}$$
$$a_{n+1}=d_n$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

También observamos que se produce otra igualdad entre los términos de la sucesión ***d*** y los términos de la sucesión ***t***, de tal manera que se da:

$$d_0$$
$$d_1=t_1$$
$$d_2=t_2$$
$$d_3=t_3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$d_n=t_n$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Puesto que la velocidad de Aquiles es doble que la de la Tortuga y ambas son constantes, en cada intervalo la Tortuga cubrirá un espacio que será la mitad que el de Aquiles, por tanto: $t_n=\frac{1}{2}a_n$. Como sabemos que $a_n=d_{n-1}$ y $d_n=t_n$, concluimos de las tres igualdades que: $d_n=\frac{1}{2}d_{n-1}$, en que n toma el valor de los números naturales entre uno e infinito.

Esta última igualdad nos permite escribir los términos de la sucesión ***d*** de la manera siguiente:

Momento	**Distancia entre A. y T.**
0	d_0
1	$d_1=\frac{1}{2}d_0$
2	$d_2=\frac{1}{2}d_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}d_0=\frac{1}{2^2}d_0$
3	$d_3=\frac{1}{2}d_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}d_0=\frac{1}{2^3}d_0$
....	....
n	$d_n=\frac{1}{2}d_{n-1}=\frac{1}{2^n}d_0$

Vemos que el término general de la sucesión es $d_n=\frac{1}{2^n}d_0$, lo que caracteriza a la sucesión ***d*** como una *serie geométrica*[2] cuya razón es $r=\frac{1}{2}$ cuyo primer término es d_0.

Dado que $a_1=d_0$ y $a_{n+1}=d_n$, podemos establecer que $a_{n+1}=\frac{1}{2^n}a_1$ y de aquí:

$a_n=\frac{1}{2^{n-1}}a_1$, término general que caracteriza a la sucesión ***a*** como una *serie geométrica* cuya razón es $r=\frac{1}{2}$ y cuyo primer término es a_1.

Análogamente, dado que $t_n=\frac{1}{2}a_n$ y, por ende, $t_1=\frac{1}{2}a_1$, podemos establecer, a partir de $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}a_1$, que $2t_n=2\frac{1}{2^{n-1}}t_1$ y de aquí: $t_n=\frac{1}{2^{n-1}}t_1$, término general que caracteriza a la sucesión ***t*** como una *serie geométrica* cuya razón es $r=\frac{1}{2}$y cuyo primer término es t_1.

[2] Define MARTÍNEZ SALAS, en *Elementos de matemáticas,* pág. 266, la serie geométrica como aquella cuyo término general viene dado por $a_n=aq^{n-1}$, siendo a y q dos números no nulos y q, además, la razón de la serie. En el caso de la serie d, la razón viene elevada a n, y no a n-1, porque el primer término es d_0 y n varía entre 1 e ∞.

La suma de todos los términos de una serie geométrica indefinida de razón menor que uno y mayor que cero se calcula con la siguiente fórmula:

$$\boxed{S = \frac{e_1}{1-r}} \qquad [1]$$

(S: suma de los términos; e_1: primer término de la serie; r: razón de la serie).

Así, la suma de los sucesivos espacios, a_n, recorridos en cada intervalo por Aquiles valdrá:

$$\left.\begin{array}{l} S = \dfrac{a_1}{1-r} \\ a_1 = d_0 \\ r = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \; S = \frac{d_0}{1-\frac{1}{2}} = \frac{d_0}{\frac{1}{2}} \;\; ,, \;\; \boxed{S = 2d_0} \qquad [2]$$

Y, análogamente, la suma de los sucesivos espacios, t_n, recorridos en cada intervalo por la Tortuga valdrá:

$$\left.\begin{array}{l} S' = \dfrac{t_1}{1-r} \\ t_1 = \dfrac{1}{2}a_1 = \dfrac{1}{2}d_0 \\ r = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \; S' = \frac{\frac{1}{2}d_0}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}d_0}{\frac{1}{2}} \;\; ,, \;\; \boxed{S' = d_0} \qquad [3]$$

De [2] deducimos que la suma de todos los infinitos pasos que da Aquiles en su carrera vale tanto como el doble de la distancia, d_0, que le separaba inicialmente de la Tortuga, mientras que de [3] deducimos que la suma de todos los infinitos pasos que da ésta en su carrera vale tanto como la distancia d_0.Concluimos que, supuestas las condiciones que recoge la hipótesis con la que trabajamos, el final de la carrera de Aquiles coincide con el final de la carrera de la tortuga en el punto P del *gráfico 1*, que será el lugar en que el más rápido alcance a la más lenta, lo que desmiente la afirmación de Zenón.

3.2. Discusión de la solución matemática clásica

La solución matemática que acabamos de encontrar para la aporía de Zenón se apoya en la fórmula [1], aplicada en el apartado anterior, que nos da el valor de la suma de los términos de una serie geométrica indefinidamente decreciente. Si analizamos el procedimiento de obtención de dicha fórmula, puede que saquemos algunas consecuencias interesantes.

En primer lugar, consideremos una serie geométrica con un número finito de términos y de razón *r*. La suma de los *n* términos de la serie será:

$$S_n = e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_n = e_1 + e_1 r + e_1 r^2 + \ldots + e_1 r^{n-1}$$

Multipliquemos ahora S_n por la razón *r*:

$$S_n r = e_1 r + e_1 r^2 + e_1 r^3 + \ldots + e_1 r^n$$

Y restemos $S_n r$ de S_n:

$$S_n - S_n r = e_1 + e_1 r + e_1 r^2 + \ldots + e_1 r^{n-1} - e_1 r - e_1 r^2 - \ldots - e_1 r^{n-1} - e_1 r^n$$

De donde:

$$S_n (1 - r) = e_1 - e_1 r^n = e_1 (1 - r^n)$$

Y de aquí:

$$\boxed{S_n = \frac{e_1(1-r^n)}{1-r}} \qquad [4]$$

Fórmula que nos permite calcular el valor de la suma de los términos de una serie geométrica finita.

Para hallar la fórmula con que podemos calcular la suma de los términos de una serie geométrica indefinidamente decreciente, llevamos [4] al límite, cuando *n* tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{e_1(1-r^n)}{1-r} = \lim_{n\to\infty} \frac{e_1}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{e_1 r^n}{1-r} = \frac{e_1}{1-r} - \frac{e_1}{1-r} \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{e_1}{1-r}\left(1 - \lim_{n\to\infty} r^n\right)$$

Puesto que $0<r<1$, por tratarse de una serie decreciente, r^n tenderá a cero, siendo cero en el infinito. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. Llevando este resultado a la ecuación anterior, conseguimos la fórmula de la suma de los términos de una serie geométrica decreciente de infinitos términos:

$$\boxed{S_\infty = \frac{e_1}{1-r}} \qquad [1]$$

Ya que hemos aprendido lo que vale el límite de una cantidad menor que uno y mayor que cero elevada a *n*, cuando *n* tiende a infinito, apliquemos estos conocimientos al término general de la serie ***d*** y llevemos esta función al límite cuando *n* tiende a infinito:

$$\left.\begin{array}{l} d_n = \dfrac{1}{2^n} d_0 \\ r = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} d_0 r^n = d_0 \lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

Llegamos, así, a una conclusión sorprendente. Primero, llevando al límite la función que representa la suma de los términos de una serie geométrica obtenemos [1], fórmula que, aplicada a las series ***a*** y ***t***, nos permite deducir, gracias a [2] y [3], que las carreras de Aquiles y la Tortuga coinciden en un punto *P* situado a una *distancia finita* del origen de la competición; después, llevando al límite la serie ***d***, descubrimos que la separación entre Aquiles y la Tortuga sólo desaparecerá en el infinito. Si cada espacio d_n se corresponde con un "momento" *n* de los que jalonan la carrera en función de las sucesivas posiciones relativas que ocupan ambos corredores, cabe hacer una interpretación temporal de la serie ***d*** y afirmar que Aquiles únicamente alcanzará a la tortuga cuando $n=\infty$, esto es, una vez transcurrido un *tiempo infinito* desde el comienzo de la carrera.

Por lo tanto, la meta de la carrera entre Aquiles y la Tortuga no está demasiado lejos de su inicio, pero acontece que los corredores *nunca* llegarán a esta meta. "El trayecto del héroe será infinito y éste correrá para siempre, pero su derrotero se extenuará antes de doce metros, y su eternidad no verá la terminación de doce segundos"[3]. *Se mantiene, de este modo, la paradoja de Zenón.*

La noción de límite matemático que venimos utilizando permite el cálculo infinitesimal, que es la parte de la matemática con que los físicos traducen a relaciones numéricas los cambios en el movimiento de los cuerpos, por medio del recurso de representar la gráfica de una trayectoria dividida en hipotéticas porciones tan pequeñas como se quiera y llevando al límite los incrementos infinitesimales de espacio y tiempo, cuando el incremento del tiempo tiende a cero. Aunque los cálculos empleados en la refutación física que analizamos en el apartado 2 no tuvieron tanta complicación, por partir de una muy sencilla hipótesis, los físicos calculan ordinariamente la velocidad como la derivada del espacio con respecto al tiempo ($v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, lo que también se puede representar como $v = \frac{ds}{dt}$).

El cálculo infinitesimal trata así de hacer compatible la realidad física, a la que no podemos dividir infinitamente, con el espacio geométrico, al que podemos concebir como infinitamente divisible.

3 BORGES: *Discusión*. "La perpetua carrera entre Aquiles y la Tortuga", pág. 98.

Análogamente, hemos aplicado la noción de límite a la suma de los términos de una serie geométrica indefinidamente decreciente para obtener el resultado *finito* de una suma de *infinitos* términos, lo que, si nos atenemos a la lógica de las palabras, no deja de ser una contradicción.

A mi parecer, el motivo de tal contradicción reside en la *presuposición* que hacen los matemáticos de que la serie indefinidamente decreciente alcanza el término infinito en el límite, o, más bien, de que podemos acercarnos tanto a este término que el valor de r^n se convierte en despreciable; pero esto sólo se justificaría si se tratase de una medición sobre el terreno, ya que, entonces, por mucho que afinemos, al final el aparato de medir no es capaz de registrar un incremento infinitésimo de la magnitud. Sin embargo, el espacio geométrico consta de infinitos puntos, de lo que se sigue que ninguna magnitud, por pequeña que sea, puede despreciarse, y precisamente en esta cualidad geométrica reside la paradoja de Zenón, así que la *presuposición* de que podemos acercarnos tanto al infinito que no merezca la pena tener en consideración el valor de r^n es opuesta a la *presuposición* que hace Zenón en su aporía, ya que –según el Eleata– la distancia que *en todo momento* separa a Aquiles de la Tortuga es siempre un segmento, $d_n=d_0r^n$, de recta geométrica, el cual, por definición, contiene infinitos puntos (aun siendo de magnitud tan pequeña que resulte inconmensurable); de este modo, si nos mantenemos estrictamente fieles al pensamiento de Zenón, la conclusión definitiva es que resulta racionalmente imposible alcanzar el término infinito, único momento en que efectivamente $r^n=0$.

Mientras no se alcance dicho término, tendremos, como afirma Zenón, un infinito número de puntos entre el punto que ocupa Aquiles y el punto que ocupa la Tortuga.

Luego la noción de límite aparenta ser una concesión de la matemática al mundo de lo sensible, concesión que habría contrariado mucho a Zenón, quien creía que lo racional prevalece sobre lo sensible.

3.3. El infinito matemático

Que en la realidad extramental haya un ser infinito, bien sea Dios, bien sea la totalidad del universo, resulta una cuestión metafísica de arduo tratamiento. Hasta donde llega la experiencia humana, nos topamos con realidades finitas (aunque, eventualmente, alguna de ellas parezca incontable), pero los cosmólogos plantean que una hipótesis posible, de acuerdo con los datos de que disponen, es la de que el universo sea infinito de hecho. Por su parte, los teólogos hablan del Ser Supremo como de alguien esencialmente infinito, …

Para las matemáticas, en cambio, el infinito no plantea duda: no sólo hay infinito, sino que, además, reviste muchas formas diferentes.

Revista de Filosofía
Vol. 28 Núm. 2 (2003): 215-236

Venimos trabajando en lo anteriormente escrito con un concepto de infinito matemático que, de nuevo, podemos denominar clásico. Se trata de ese número representado por el símbolo ∞ que hemos puesto como *límite* al que tiende la sucesión de los números naturales. Más generalmente, podemos considerar que, dada la función real $y = f(x)$, para la que la variable x tiende hacia un número a, finito o infinito, "si , $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ se dirá que y es un *infinito*"[4], lo que significa que, sea cual sea el valor finito que tome la función y con respecto a x, siempre podrá tomar otro valor superior, y en el límite –cuando $x=a$– valdrá infinito. Por ejemplo, la función $y = \frac{1}{x-a}$ tiende a crecer, para $-\infty < a < +\infty$, a medida que adjudicamos como valor a x números reales decrecientes cada vez más próximos a a, y, en el límite: $\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} = \frac{1}{0} = \infty$ [5].

Tal consideración del infinito como límite al que constantemente se acerca una función, sin llegar jamás a él, tiene mucho que ver conceptualmente con el infinito aristotélico, que es una entidad potencial, que nunca llega a ser en acto. Por lo tanto, no nos alejamos de la noción habitual de infinito, que se inspira en cualquier secuencia sin término (como la sucesión de los números naturales), en la que, dado un elemento, siempre podemos pensar que a continuación habrá otro, y, así hasta el infinito.

Pero Georg Cantor (1845-1918) descubrió que en matemáticas hay otros infinitos, que se diferencian del infinito clásico en que no responden al concepto de limite inalcanzable, sino que tienen entidad por sí mismos en el ámbito de lo que se suele denominar como la matemática de los números *transfinitos*. Así es, con estos números transfinitos se pueden realizar operaciones semejantes a las que se realizan con los números finitos, sumarlos, multiplicarlos, elevarlos a una potencia, etc., aunque los resultados de estas operaciones no sean congruentes con los resultados que se obtienen en el campo de los números finitos. Además, se da el caso de que, como ocurre entre los números finitos, *unos infinitos cantorianos son mayores que otros,* lo que no deja de sorprender, pues, para el sentido común, nada hay que sea mayor que el infinito.

De lo que acabamos de decir se infiere que los transfinitos no se deben entender simplemente como límite al que tiende una secuencia, sino que son seres activos, no en el mundo real, como resulta obvio, sino en el mundo ideal en que habitan las ideas matemáticas. Sin necesidad de incurrir en platonismo, podemos afirmar que tal mundo ideal existe, al menos en la medida en que las ideas matemáti-

---

[4] MARTÍNEZ SALAS: *op. c.*, pág. 259.

[5] En realidad, el límite de $y = \frac{1}{x-a}$ en el punto a es $\pm\infty$, y, a partir de este punto, y toma valores negativos crecientes para $x<a$, tendiendo a cero a medida que x tiende a $-\infty$.

cas (y, en general, todas las ideas) tienen una presencia efectiva ante la inteligencia de los humanos y no dependen de que se piense o no en ellas, pues sobreviven a la contingencia de las mentes particulares.

Es preciso que ahora se trate sobre dos números transfinitos, el que corresponde al cardinal del conjunto de los números racionales y el que corresponde al cardinal del conjunto de los números reales.

El número de miembros del conjunto de los números naturales, 1, 2, …, *n*, …, es infinito (en virtud del *axioma de infinitud* que, de hecho, admite todo matemático) y Cantor lo identifica con el signo $\aleph_0$. Este es el primer cardinal transfinito y el más pequeño de todos.

Si añadimos un miembro más al conjunto de los números naturales su cardinal no variará, sino que seguirá siendo infinito, esto es, $\aleph_0$:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

De aquí que, si añadimos el 0 al conjunto de los números naturales, continuaremos teniendo un conjunto de cardinal $\aleph_0$ al que –de acuerdo con Russell[6]– vamos a nombrar como el conjunto de los números inductivos (porque, partiendo del cero y aplicando los axiomas de Peano, por medio de la inducción matemática se puede demostrar que cualquier número natural pertenece a este conjunto).

Más aun, puesto que es un conjunto numerable, el conjunto de los números racionales (inductivos, enteros y fraccionarios) tiene como cardinal también $\aleph_0$, a pesar de que, a primera vista parece que hay más números racionales que inductivos, ya que éstos son sólo una parte de aquéllos. En efecto, se puede establecer una correspondencia biunívoca, uno a uno, entre los miembros del conjunto de los números inductivos y los miembros del conjunto de los números racionales, que no otra cosa significa que este último conjunto sea numerable[7]:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	…
0	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	-2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	3	-3	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	4	-4	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	…

[6] *Introducción a la filosofía matemática*, pág. 32.

[7] Fiel a RUSSELL, *op. c.*, pág. 78, ordeno las fracciones siguiendo este criterio: “si la suma del numerador y el denominador de una es menor que la de los de la otra, la primera se situará antes que la segunda; si la suma es igual en ambas, se situará primero la que tenga el numerador más pequeño”.

Sin embargo, el cardinal del conjunto de los números reales (racionales e irracionales) no es $\aleph_0$, sino otro infinito mayor, como demostró Cantor con la prueba del "corte diagonal". Cuánto vale exactamente el cardinal del conjunto de los números reales es algo que establecemos a partir del *teorema de Cantor,* que dice que "el número cardinal del conjunto potencia, C*p*S, de un conjunto cualquiera, S, es mayor que el número cardinal de S. (Conjunto potencia, C*p*S, de un conjunto cualquiera, S, es el conjunto de todos los subconjuntos de S, incluido el propio S –como subconjunto impropio– y el conjunto vacío, que es el que no tiene ningún miembro)"[8].

La demostración de este teorema y su extensión a los conjuntos infinitos permite concluir que la serie de los transfinitos, a partir de $\aleph_0$, es ella misma una serie infinita, puesto que, dado un conjunto infinito cualquiera, siempre podremos obtener su conjunto potencia, que será infinito y mayor que el conjunto de partida.

El cardinal del conjunto potencia de un conjunto finito de *m* miembros vale 2^m. Leemos en Russell que esta ley, definida para valores finitos de *m*, "no es difícil hacerla extensiva a los números infinitos"[9], de donde se sigue que el conjunto potencia del conjunto de los números inductivos tendrá como cardinal $2^{\aleph_0}$. El conjunto potencia del conjunto de los números inductivos es el conjunto de los números reales, puesto que éstos agotan todas las combinaciones posibles de los números inductivos (con la salvedad que indicamos más abajo).

En efecto, Russell, quien previamente ha definido los números inductivos como clases, dice[10] que los números reales no son más que relaciones entre estas clases. No parece complicado descubrir que los números enteros y los fraccionarios son relaciones de números inductivos; así, +1 es la relación de $n+1$ con n y -1, la relación de n con $n+1$[11], y m/n la relación entre todo par de números inductivos, x e y, tales que $xn=ym$[12]. Un poco más complicado es establecer qué es un número irracional, y para ello Russell acude a la noción de límite. "Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es el límite superior de todos los segmentos de la serie de fracciones correspondientes a fracciones cuyo cuadrado es menor que 2"[13] .

Dice también Russell[14] que la relación $0/n$ es siempre la misma cualquiera que sea n (menos el cero), por lo que dicha relación representa al cero de los números racionales, y otro tanto sucede con la relación $n/0$, la cual, sin embargo, no se corresponde con ningún número inductivo, sino que representa el infinito (∞) de la sucesión de los números racionales, que –como ya se ha apuntado– no es un infini-

---

8 SACRISTÁN, M.: *Introducción a la lógica y al análisis formal*, pág. 40.

9 *Introducción a la filosofía matemática*, pág. 79.

10 *Cf. op. c.*, cap. 7.

11 *Loc. c.*, pág. 61.

12 *Loc. c.*, pág. 62.

13 *Loc. c.*, pág. 68.

14 *Loc. c.*, pág. 62.

to cantoriano. Sobre esto cabe comentar que *n*/0 sería una relación entre números inductivos de la que no se siguen números reales; ahora bien, aplicando la peculiar aritmética de los transfinitos (y dado que el puesto de *n* en *n*/0 puede ser ocupado por cualquier número inductivo, menos el cero[15]) tenemos[16]:

$$2^{\aleph_0} - \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$$

De modo que el cardinal de los números reales sigue siendo el mismo cardinal que el del conjunto potencia del conjunto de los números inductivos.

En definitiva, de todo lo manifestado podemos concluir que *el conjunto de los números inductivos tiene como conjunto potencia al conjunto de los números reales, cuyo cardinal es* $2^{\aleph_0} > \aleph_0$, aunque no se ha demostrado que el cardinal de los reales sea el siguiente transfinito después del cardinal de los inductivos, es decir, no se sabe si $2^{\aleph_0}$ es o no el número $\aleph_1$, u otro $\aleph_n$ cualquiera.

3.4. La solución cantoriana

Leo, esperanzado, lo que Bertrand Russell (1872-1970) escribe: "una larga línea de filósofos, desde Zenón hasta Bergson, han basado gran parte de sus metafísicas en la supuesta imposibilidad de los conjuntos infinitos. Hablando en forma general, las dificultades fueron planteadas por Zenón (…). La solución definitiva de las dificultades se debe (…) a Georg Cantor, cuyo trabajo sobre este tema apareció por primera vez en 1882"[17]. Por esa fecha Cantor publica sus trabajos sobre los conjuntos infinitos, de aquí el que nos hallamos detenido en discernir, en el apartado anterior, qué es eso de los números transfinitos.

En particular, será el cardinal del conjunto de los números reales, $2^{\aleph_0}$, el transfinito que nos permita dilucidar el problema de Aquiles y la Tortuga, puesto que éste es el valor del *continuo*. "$2^{\aleph_0}$ es un número muy importante, concretamente, el número de términos de una serie que tiene la propiedad de 'continuidad' en el sentido que le dio Cantor a esta palabra. Suponiendo la continuidad del espacio y del tiempo en este sentido (como suele hacerse en la geometría analítica y la cinemática), éste será el número de puntos del espacio o de instantes del tiempo; también será el número

15 0/0 es una cantidad indeterminada.

16 Afirma RUSSELL, *op. c.*, pág. 81, que podemos restar del total de números inductivos el conjunto de los números impares (cuyo cardinal es también $\aleph_0$) y nos quedará un conjunto de $\aleph_0$ miembros; por tanto, análogamente se puede restar de $2^{\aleph_0}$ un conjunto de $\aleph_0$ miembros sin que el cardinal de los números reales varíe.

17 *Conocimiento del mundo exterior.* Pág. 136.

de puntos de cualquier porción finita del espacio, sea una línea, un área o un volumen”[18].

Se puede, en efecto, establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y los puntos de una línea recta; para ello, en primer lugar, hay que determinar en la recta un punto *O*, al que llamamos origen, y un segmento *u* que consideramos como la unidad de medida (ver *gráfico 2*).

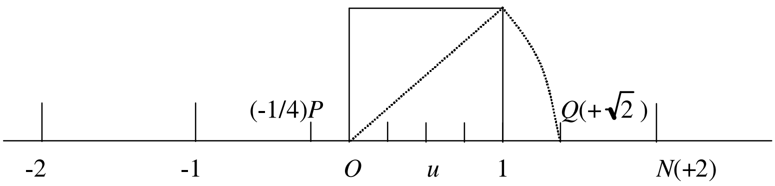

Gráfico 2

Llevando la unidad *u* un número *n* de veces sobre la recta, a partir de *O*, delimitamos un segmento, $\overline{ON}$ cuyo extremo *N* es el punto que se corresponde con el entero $|n|$; si la operación se ha efectuado hacia la derecha de *O*, tendremos el entero positivo +*n*, si hacia la izquierda, el entero negativo -*n*.

Dividiendo *u* en *n* partes y llevando la fracción *n-ésima* sobre la recta *m* veces, delimitamos un segmento $\overline{OP}$ cuyo extremo *P* es el punto que se corresponde con el número $\frac{|m|}{|n|}$, de signo positivo o negativo según el sentido en que se haya realizado la medida.

Los enteros y fraccionarios no cubren la totalidad de los puntos de la recta, pues, como se comprueba en el *gráfico 2,* existen otros puntos que no se corresponden con ningún racional, sino que corresponden a números irracionales, como *Q*, que coincide con $+\sqrt{2}$. Por eso, debemos establecer un criterio que permita determinar sobre la recta el punto equivalente a cualquier número real. Tal criterio nos lo proporciona el *postulado de continuidad de la recta*, que, siguiendo a Cantor, se enuncia así:

“Dadas dos sucesiones de segmentos, $\overline{OA_1} \leq \overline{OA_2} \leq \cdots \leq \overline{OA_n} \leq \cdots$ *y* $\overline{OA'_1} \geq \overline{OA'_2} \geq \cdots \geq \overline{OA'_n} \geq$ *, tales que los de la primera sucesión son menores que los de la segunda, y la diferencia* $\overline{A_iA'_i}$ *entre dos correspondientes se puede hacer tan pequeña como se quiera desde un cierto valor de i en adelante, existe un segmento* $\overline{OP}$*, y sólo uno, mayor que todos los* $\overline{OA_i}$ *y menor que todos los* $\overline{OA'_i}$”[19]. (Ver *Gráfico 3*).

[18] RUSSELL: *Introducción a la filosofía matemática.* Pág. 80.
[19] MARTÍNEZ SALAS: *op. c.*, pág. 7.

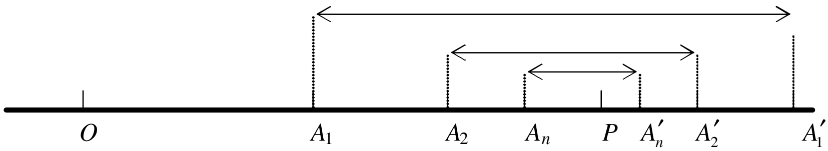

Gráfico 3

El número *p*, correspondiente al punto *P*, quedará definido por las dos sucesiones monótonas contiguas $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$ y $a'_1 \geq a'_2 \geq \cdots \geq a'_n \geq \cdots$, en donde a_i y a'_i son los números racionales correspondientes a A_i y A'_i. Si en algún momento A_i ó A'_i coincide con *P*, el número *p* es racional. Si nunca se alcanza *P*, porque la diferencia $a_i - a'_i$ se puede hacer tan pequeña como se quiera, el número *p* es irracional y *P* es el punto límite al que tiende el extremo que no es *O* de cada uno de los segmentos de la serie $\overline{OA_i}$ y de la serie $\overline{OA'_i}$.

Por lo tanto, se da una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y la sucesión de los infinitos puntos de la recta. Esto implica que el conjunto de los números reales es continuo y que el número de puntos que contiene la recta es $2^{\aleph_0}$.

Cualquier conjunto continuo, pues, tendrá como cardinal $2^{\aleph_0}$. Un segmento de recta es continuo, porque contiene infinitos puntos correspondientes a infinitos números reales[20]; por tanto, un segmento de recta también contiene $2^{\aleph_0}$ puntos, tal como ya habíamos leído en la última cita recogida de Russell.

Si situamos el inicio de la carrera entre Aquiles y la Tortuga en el punto origen, *O*, es decir, si hacemos coincidir el punto *O* del *gráfico 2* con el punto A_0 del *gráfico 1*, la carrera de Aquiles se desarrollará sobre el semieje de las abscisas de los números reales positivos, mientras que la de la Tortuga se desarrollará sobre una semirrecta paralela, cuyo origen estará en el punto T_0, que dista d_0 del punto *O*.

La solución de la aporía reside, entonces, en el hecho de que "el infinito se refiere a *clases*, no a series, y por lo tanto viene dado al mismo tiempo que todas las clases infinitas"[21]. En la medida en que Russell usa el término "clase" como sinónimo de "conjunto", estas palabras suyas nos indican que, en efecto, la carrera sobre la semirrecta no transcurre como si se tratara de una serie sin fin de puntos sucesivos (que es la idea de la que parte la solución matemática clásica de la aporía), sino que *cubre la totalidad de los puntos de la semirrecta*, que es un conjunto infinito, pero cuyo cardinal conocemos. Los competidores se encontrarán cuando tanto el uno

[20] La prueba del "corte diagonal", que se menciona en la página 16, demuestra que los números reales entre cero y uno son infinitos y que entre dos cualesquiera de ellos, por próximos que estén, se puede incluir siempre otro número real, por lo que nos hallamos aquí también ante un conjunto continuo.

[21] RUSSELL: *Conocimiento del mundo exterior*, pág. 130.

como la otra hayan dado un total de $2^{\aleph_0}$ pasos, que es lo que exactamente mide el intervalo a cubrir: ambas porciones de recta, la recorrida por Aquiles y la recorrida por la Tortuga, contendrán la misma cantidad $2^{\aleph_0}$ de puntos, luego este es el cardinal que mide la distancia total sobre la que se desplazan tanto Aquiles como la Tortuga. La separación inicial entre los corredores, d_0, es despreciable, aunque ella también contenga un número infinito de puntos, puesto que:

$$2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Si pensamos en el problema de Zenón sobre la base del infinito matemático clásico (∞), nos encontramos con una sucesión de infinitos puntos cuyo término nunca se alcanza, y, de este modo, no hay solución para el problema, a menos que se conceda que, en un momento dado, la separación entre Aquiles y la Tortuga puede ser desestimada, tal como hemos discutido en el apartado 3.2. Pero el infinito cantoriano es una cantidad exacta que se da al mismo tiempo que cualquier fragmento de recta y que, por ello, nos proporciona el valor de la trayectoria completa de la competición entre los dos proverbiales atletas, a saber, $2^{\aleph_0}$.

Sin embargo, no se puede decir que el final de la carrera se sitúe en el punto $2^{\aleph_0}$ de la recta, porque el número cardinal de un conjunto infinito no es el mismo que su número serial u ordinal. “El número cardinal de una clase reflexiva puede mantenerse invariable aunque se añadan términos a ésta; en cambio, puede alterarse el número serial de una serie sin añadirle ni quitarle ningún término, por su mera reordenación”[22].

Puesto que no cabe concretar cuál es el último de los puntos que en su itinerario infinito pisan Aquiles y la Tortuga y puesto que todo segmento de recta contiene el mismo número – $2^{\aleph_0}$ – de puntos, se puede colocar la meta de la carrera en *cualquier punto* del semieje de abscisas de los números reales positivos que se halle a la derecha del punto T_0.

3.5. Discusión de la solución cantoriana

William James (1842-1910) se ocupa de la recién presentada solución a la paradoja de Zenón en uno de sus libros, *Some problems of philosophy*[23], editado en 1911. Este autor, que se declara casi ignorante en materia de matemáticas y lógica,

[22] RUSSELL: *Introducción a la filosofía matemática*, pág. 83. “Clase reflexiva” es aquella que puede ponerse en relación biunívoca con una parte propia de sí misma. (“Parte propia” de una clase es la que no coincide con la totalidad de la clase), *cf.* pág. 75. El conjunto de los números inductivos y el de los números reales son, obviamente, clases reflexivas.

[23] Las citas de este libro que incorporo están tomadas de su versión francesa, *Introduction à la Philosophie*.

no obstante, se siente lo suficientemente capacitado en su espíritu como para manifestar su desacuerdo con los análisis de la paradoja que, desde la matemática cantoriana, ejecuta Russell y que hemos recogido en el apartado anterior; así, nos dice James que "la vraie difficulté consiste à atteindre un but sous la condition préalable de traverser un intervalle qui se reconstitue continuellement soi-même et qui s'incorpore au chemin à parcourir (…) Quiconque actuellement *traverse* un continu ne peut nullement le faire par un processus continu, au sens mathématique. Que ce continu soit long ou court, chaque point doit en être occupé dans son ordre convenable de succession, et si ces points sont réellement infinis, leur terme ne peut pas être atteint, car le 'reste', dans cette sorte de processus, est précisement ce qu'il est impossible de 'négliger'. En résumé, l'énumération est le seul moyen possible d'occuper la série de positions impliquées dans la fameuse course"[24].

Dos cosas destacables nos dice James en el párrafo que acabamos de reproducir, primero, que, sea cual sea la distancia recorrida en la carrera, los puntos del trayecto deben ser alcanzados siguiendo un orden, que es numerable, y, segundo, que no podemos obviar el "resto", esto es, el espacio que en cada momento separa a Aquiles de la Tortuga. En lo que viene a continuación se intentarán demostrar con argumentos matemáticos estas tesis que nos ofrece el filósofo norteamericano.

En efecto, que $2^{\aleph_0}$ sea lo que mide la carrera entre Aquiles y la Tortuga no parece que proporcione respuesta completa al problema, ya que no debemos olvidar que los competidores se desplazan sobre una *serie* de puntos, como plantea James, y saber cuántos puntos son éstos no es suficiente. Los elementos de un conjunto infinito también pueden ser seriados.

Consideremos la serie más simple que cabe establecer, la del conjunto de los números naturales ordenados según la relación de n a $n+1$:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \quad [5]$$

El número serial de esta ordenación es denominado por Cantor con la letra w, que representa el menor de los números seriales infinitos[25]. El número serial del conjunto de los números naturales varía si los ordenamos de otra manera, por ejemplo, poniendo primero todos los número impares por orden creciente y a continuación, todos los pares, también por orden creciente; sin embargo, el cardinal del conjunto de los números naturales sigue siendo $\aleph_0$, los ordenemos como los ordenemos.

Si añadimos el cero al final de la serie [5] (o trasladamos allí cualquier otra cifra), obtenemos una serie diferente, mayor[26] que ella, pues la hemos incrementa-

[24] *Op. c.*, pp. 224-225.

[25] *Cf.* RUSSELL: *op. c.*, pág. 83.

[26] "Se dice que un número serial es 'mayor' que otro cuando cualquier serie que tenga el primer

do en un término más, mientras que su primera parte es similar a la serie [5]:

1	2	3	4	…	*n*	…	
1	3	4	5	…	*n*+1	…	2
1	2	3	4	…	*n*	…	0

De donde:

$$w + 1 > w$$

En cambio, si añadimos el cero al principio de la serie [5] (o trasladamos allí cualquier otra cifra), obtenemos una serie completamente similar a aquélla, pues esta segunda serie es numerable y también queda ordenada *in infinitum* según la relación *n* a *n*+1:

1	2	3	4	…	*n*	…
2	1	3	4	…	*n*	…
0	1	2	3	…	*n*+1	…

De donde:

$$1 + w = w$$

Así que la sucesión ordenada de los números inductivos, a partir de 0, tiene también como número serial *w*.

La carrera entre Aquiles y la Tortuga no viene pautada por los infinitos pasos que, en número de $2^{\aleph_0}$, dan estos corredores, sino por los sucesivos momentos, 0, 1, 2, …, *n*, …, en que Aquiles llega al sitio que ocupaba la Tortuga en el momento anterior, como se observa en el *gráfico 1.*

El error de entrada en que cae la solución cantoriana ha sido el de creer que la carrera, que se celebra sobre el continuo, sólo hace referencia a la infinita divisibilidad de la recta, pero no es así, su descripción completa incluye tres *series geométricas* (***a***, ***d*** y ***t***) –como hemos visto en el apartado 3.1– cuyos términos constituyen conjuntos numerables, pues mantienen una correspondencia biunívoca con el conjunto de los números inductivos.

número contiene una parte que tiene el segundo número, pero ninguna serie con este segundo número contiene una parte que tenga el primer número". *Op. c.*, pág. 84.

Esta es la razón por la que la carrera, considerada en su secuenciación, no tiene un recorrido de $2^{\aleph_0}$ pasos, sino de $\aleph_0$ pasos y debe ser necesariamente ordenada según la serie de los números inductivos de menor a mayor.

La carrera, entonces, acabaría en el momento *w*. Puesto que a cada momento *n* corresponde un segmento d_n, en constante decrecimiento (tal como habíamos establecido en la página 7), debemos concluir que *también en el momento w habrá un segmento* d_w*, todo lo pequeño que se quiera, pero todavía conteniendo* $2^{\aleph_0}$ *puntos, que separa a Aquiles de la Tortuga.* Se mantiene, pues, la paradoja de Zenón.

4. Comentario final

Nadie duda de que el problema de Zenón no es un problema práctico, pues, de acontecer la carrera en la naturaleza, nos basta con el testimonio de nuestros sentidos para proclamar al vencedor.

Este es, más bien, un problema matemático que se deriva de la propia noción de continuo. Tal noción es necesaria para solventar ciertas dificultades que se le presentan a la geometría, como la determinación del valor de la diagonal del cuadrado, y para encajar el caso matemático de que entre dos números reales cualesquiera siempre se pueda inscribir otro, mayor que el primero y menor que el segundo.

Sin embargo, el continuo en sí ya es problemático, porque no parece compatible con la lógica de los hechos que un segmento de recta contenga el mismo número de puntos que la recta sin límites: en el mundo nunca acontece que la parte sea igual al todo.

Y, puesto que es algo problemático, resulta comprensible que el postulado del continuo desemboque en paradojas que no tienen solución completamente lógica. Con respecto a la aporía de Aquiles y la Tortuga, constatamos que, tanto en la discusión de la solución matemática clásica, como en la de la solución cantoriana, hemos hallado nuevas contradicciones, porque no hemos conseguido librarnos de la *dificultad lógica* que supone el que cualquier segmento de recta (por minúsculo que lo imaginemos) siempre contenga $2^{\aleph_0}$ puntos, que la recta, en resumen, sea infinitamente divisible.

Quizás, los conceptos de las matemáticas no son tan lógicos como quería Russell, sino que simplemente se justifican por su aplicabilidad, porque sirven al cálculo.

Bibliografía citada

BORGES, Jorge Luis: *Discusión.* Alianza Editorial (por autorización de Emecé Editores). Madrid, 1976.

FEYNMAN, Richard P.; LEIGHTON, Robert B.; SANDS, Matthew: *Física. Volumen I.* Edición bilingüe, inglés-español, del Fondo Educativo Interamericano, S.A. Panamá, 1971.

JAMES, William: *Introduction à la Philosophie. Essai sur quelques problèmes de metaphysique*. Marcel Rivière, Editeur. Paris, 1926.

MARTÍNEZ SALAS, José: *Elementos de matemáticas*. Edición del autor. Valladolid, 1964.

RUSSELL, Bertrand: *Conocimiento del mundo exterior*. "Los libros del mirasol". Cía. Fabril Editora, S.A. Buenos Aires, 1964.

RUSSELL, Bertrand: *Introducción a la filosofía matemática*. Paidós Studio, Básica. Ediciones Paidós, Barcelona, 1988.

SACRISTÁN, Manuel: *Introducción a la lógica y al análisis formal*. Ediciones Ariel, Barcelona, 1973.