

Algunos razonamientos sobre el aparato formal de la mecánica clásica, relativista y cuántica

Carmen SÁNCHEZ OVCHAROV

Resumen

Este artículo reúne los resultados de nuestra *sistematización* de las magnitudes físicas y de las expresiones matemáticas de los aparatos formales de la mecánica clásica, relativista y cuántica, revelando su estructura subyacente común. La sistematización se ha realizado ordenando en tablas algunas de las magnitudes físicas y expresiones matemáticas más conocidas según sus diferentes *grados de derivación*, abriendo paso, de este modo, a un *criterio de fundamentalidad* de las leyes, principios, postulados y ecuaciones de cada aparato formal.

Palabras clave: Física, mecánica cuántica, aparato formal, magnitud, estructura, fundamentalidad.

Abstract

This article contains the results of our systematization of physics' quantities and mathematical expressions of the classic, relativistic and quantum mechanics, revealing their common underlying structure. This systematization was realized ordering some physics' quantities and mathematical expressions in tables according to their degree of derivation, giving a possibility for a *Criterion of Fundamentality* for the laws, principles, postulates and equations of each formal apparatus.

Keywords: Physics, quantum mechanics, formal apparatus, quantity, structure, fundamentality.

1. Introducción

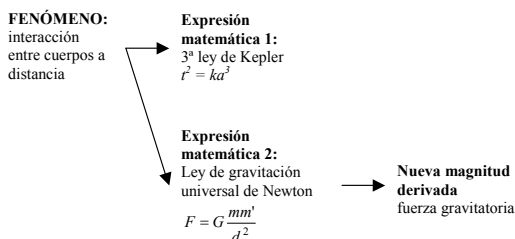
La Física, como producto del conocimiento actual de la naturaleza, distingue tres tipos de mecánica: clásica, relativista y cuántica, que tratan los fenómenos físicos propios de tres ámbitos diferentes: meso-mundo, macro-mundo y micro-mundo, respectivamente. Cada uno de los ámbitos fenoménicos se describe por un conjunto de las expresiones matemáticas que representan leyes, principios, postulados y ecuaciones propias, constituyendo el *aparato formal* de cada mecánica. El aparato formal de cada mecánica se estructura formal y conceptualmente en función de los diferentes *grados de derivación* de las magnitudes físicas y expresiones matemáticas que las articulan.

Nos ha parecido interesante presentar en este artículo los resultados de nuestra *sistematización* de las magnitudes físicas y de las expresiones matemáticas del aparato formal de cada mecánica, revelando su estructura subyacente común. La sistematización realizada, formalmente ha abierto paso a un *criterio de fundamentalidad*, que ha permitido diseñar *un sistema de ordenación* de las leyes, principios, postulados, ecuaciones y magnitudes físicas, atendiendo a su nivel de fundamentalidad dentro de la estructura del aparato formal de cada mecánica, *sin entrar*, de momento, en las consecuencias conceptuales que conlleva.

Hemos tomado como aparato conceptual de trabajo la terminología establecida por la Real Academia Española de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Nuestra sistematización comienza con un examen de las magnitudes físicas y las expresiones matemáticas, correspondientes a leyes, principios, postulados y ecuaciones más conocidos de la mecánica clásica, relativista y cuántica.

Nos encontramos con que las expresiones matemáticas pueden tener dos formas cualitativamente diferentes, describiendo un mismo fenómeno. Por ejemplo, en el caso de la *mecánica clásica*, el fenómeno de la interacción entre cuerpos a distancia es descrito por dos expresiones matemáticas diferentes:

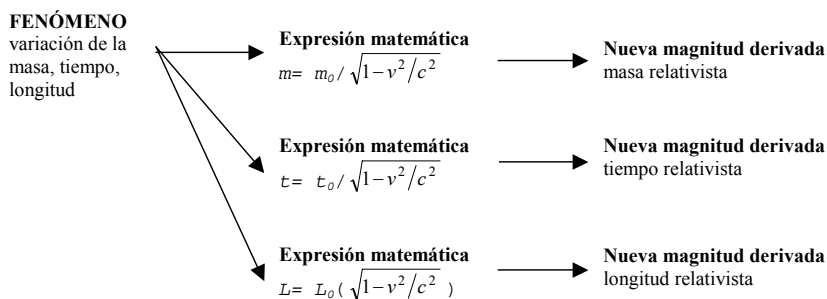


Como vemos, la expresión matemática que describe un mismo fenómeno conduce a dos leyes cualitativamente diferentes.

El contenido conceptual del fenómeno difiere en cada descripción: por un lado, la expresión matemática de la ley de Kepler se sirve únicamente de las magnitudes fundamentales, para expresar una relación entre tiempos y distancias, que rige en este fenómeno, sin introducir una magnitud nueva, *derivada*; por otro lado, la expresión matemática de la ley de Newton emplea magnitudes fundamentales, para expresar una relación entre masas y distancias, que rige en el mismo fenómeno, *introduciendo una magnitud física nueva*, derivada y un nuevo concepto universal, la fuerza gravitatoria. Como se ve, la expresión matemática de Newton describe la regularidad constante de la naturaleza del mismo fenómeno y además deriva una magnitud nueva directamente de las magnitudes fundamentales formulando un nuevo concepto universal.

La misma valoración merecen las leyes de interacción de las cargas eléctricas (ley de Coulomb) y de las cargas magnéticas, que se encuentran entre las expresiones matemáticas que describen los ámbitos fenoménicos correspondientes.

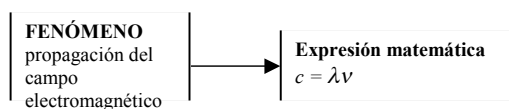
En el caso de la *mecánica relativista*, tomamos como ejemplo el fenómeno de la variación de masa¹, tiempo y longitud a velocidades comparables a la velocidad de la luz:



¹ Actualmente, la distinción entre masa en reposo m_0 y masa relativista m es tema de debate. La cuestión central es si la masa de los cuerpos depende de su velocidad y se está volviendo a la opinión *newtoniana* según la cual la masa no varía con el aumento de la velocidad del cuerpo y permanece igual a la masa en reposo.

Estas expresiones matemáticas conducen a una ampliación de los conceptos contenidos en las magnitudes clásicas fundamentales de masa, tiempo y longitud. Por ello, se puede considerar que en ellas se definen tres magnitudes nuevas derivadas de las fundamentales, pero esta vez, no de forma directa, sino a través de un coeficiente compuesto por otras magnitudes derivadas ($\sqrt{1-v^2/c^2}$). Las ecuaciones de transformación de Lorentz, que es como se conocen estas expresiones matemáticas, no se consideran leyes, ni principios.

En el caso de la *mecánica cuántica*, tomamos como ejemplo el fenómeno de la propagación del campo electromagnético:



Esta expresión matemática, según la cual el producto de la longitud y la frecuencia de onda ($\lambda\nu$) es constante y coincide con la velocidad de la luz, describe una regularidad constante de la naturaleza del fenómeno, pero no se considera una ley. Formalmente, la expresión citada se corresponde con la tercera Ley de Kepler, es decir, *no introduce una magnitud nueva derivada*. Cabría pensar en que podría haber una expresión matemática que, empleando magnitudes fundamentales, introdujera una magnitud nueva derivada. Sin embargo, por ahora, nos es desconocida.

Ante estas diferencias y similitudes entre las expresiones matemáticas que describen los fenómenos conocidos en las tres mecánicas, nos hemos planteado realizar una investigación de las interdependencias que existen entre las magnitudes con las que opera cada una de las mecánicas, con el propósito de elaborar un *criterio propio de la derivación*, que siguen dichas magnitudes definiéndose unas en función de otras, estructurándolas en niveles.

2. Magnitudes físicas: grados de derivación

En física, en la expresión matemática de un fenómeno se emplean magnitudes, siendo la magnitud una “propiedad de la que cada cuerpo posee cierta cantidad y que es, por consiguiente, susceptible de medida”².

² Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1996) *Vocabulario científico y técnico*. Espasa. Madrid, pp. 622.

Las magnitudes físicas se pueden dividir en dos grupos básicos:

1. *Magnitud Fundamental (MF)*

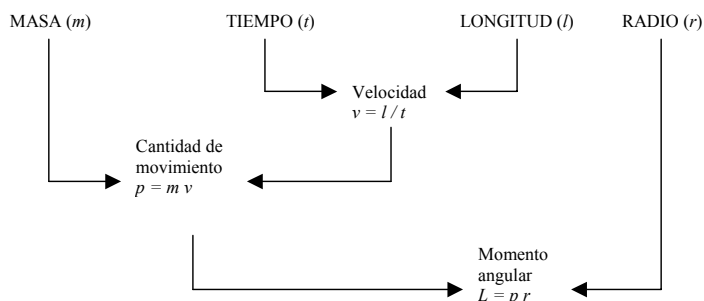
Es “cada una de las magnitudes independientes entre sí. Mediante ellas y las leyes de la física, se puede expresar cualquier magnitud derivada. En el SI³ son siete: longitud, masa, tiempo, temperatura, corriente eléctrica, cantidad de sustancia e intensidad luminosa.”⁴

2. *Magnitud Derivada (MD)*

Es “cada una de las magnitudes definidas en función de las fundamentales en un sistema de magnitudes.”⁵

Por ejemplo: velocidad, fuerza, momento angular, energía, etc.

Tomemos el momento angular. Si sistematizamos la definición de unas magnitudes en función de otras, hasta alcanzar la definición de esta magnitud, obtenemos una estructura de creciente complejidad de derivación, con diferentes niveles:



Como consecuencia, *introducimos la distinción del grado de derivación* como una subdivisión dentro de las magnitudes derivadas dependiente del nivel en el que se encuentren:

2.1. *Magnitud derivada de grado 1 (MD₁)*.

Denominamos MD_1 a una magnitud nueva que ha sido definida en función de magnitudes fundamentales MF .

³ Sistema Internacional de unidades.

⁴ Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (2001) *Diccionario esencial de las ciencias*. Espasa. Madrid, pp. 579. (Las mayúsculas son nuestras).

⁵ Idem, pp. 579.

Por ejemplo: la velocidad ($v = s/t$), ya que, $MD_1 = MF / MF$.
Simbólicamente:

$$MD_1 = \mathcal{F}(MF)$$

Donde \mathcal{F} significa, de aquí en adelante, “relación” de carácter matemático entre magnitudes del tipo indicado entre paréntesis.

2.2. Magnitud derivada de grado $n+1$ (MD_{N+1}).

Denominamos MD_{N+1} a una magnitud nueva que ha sido definida en función de magnitudes fundamentales MF y derivadas MD .

Por ejemplo: la fuerza ($F=ma$), que será una MD_3 , ya que, $MD_3 = MF \cdot MD_2$. Simbólicamente:

$$MD_{N+1} = \mathcal{F}(MF, MD_N)$$

En resumen, *la gradación* dentro de esta estructura derivativa de magnitudes se puede expresar de la siguiente manera, para obtener un patrón de sistematización de las mismas:

MF $MD_1 = \mathcal{F}(MF)$ $MD_{N+1} = \mathcal{F}(MF, MD_N)$
--

Bajo la misma sistematización se pueden tratar las expresiones matemáticas, en las que se pone en relación magnitudes físicas.

3. Expresiones matemáticas: grados de derivación

La definición de las magnitudes físicas, unas en función de otras, según procedimientos lógicos y deductivos, tiene la forma de una expresión matemática que constituye una ley, un principio, un postulado o una ecuación, donde se entiende:

Bajo *ley* un “enunciado de propiedades o sus relaciones, deducidas de datos observados o calculados, concernientes a un fenómeno, y capaz de ser expresado por lo general matemáticamente”⁶.

Bajo *principio* una “aseveración científica que permite obtener y unificar resultados conexos”⁷.

⁶ Idem, pp. 554.

⁷ Idem, pp. 765.

Bajo *postulado*, como sinónimo de axioma, una “proposición aceptada sin demostración”⁸.

Bajo *ecuación* una igualdad establecida entre dos funciones de una o más variables, cuya correlación define la variación de un fenómeno.

Estas expresiones matemáticas también las sistematizamos por niveles que corresponden al grado de derivación de la magnitud nueva que se define. Siguiendo este criterio hemos realizado la siguiente gradación:

1. *Expresión matemática fundamental (EF).*

Denominamos *EF* a la expresión que relaciona magnitudes *MF* exclusivamente. El grado de derivación de una *EF* es, por tanto, nulo.

Por ejemplo: la tercera ley de Kepler ($t^2=ka^3$) es una *EF*, ya que, $MF^2=K \cdot MF^3$. Simbólicamente:

$$EF := \{MF = \mathcal{F}(MF)\}$$

2. *Expresión matemática derivada (ED).*

Denominamos *ED* a la expresión que relaciona magnitudes *MD* y/o *MF*, en función de las cuales se define una magnitud derivada nueva.

Por ejemplo: la 2ª ley de Newton ($F=m a$) es una *ED*, ya que, $MD_3 = MF \cdot MD_2$.

Introducimos una *diferenciación de grado de derivación* de las expresiones matemáticas, en función del grado de la magnitud definida:

2.1. *Expresión matemática derivada de grado 1 (ED₁).*

Denominamos *ED₁* a la expresión que relaciona magnitudes fundamentales *MF*, en función de las cuales se define una magnitud derivada nueva.

Por ejemplo: la ley de Coulomb ($F = qq'/r^2$) es una *ED₁*, ya que, $MD_1 = MF \cdot MF / MF^2$. Simbólicamente:

$$ED_1 := \{MD_1 = \mathcal{F}(MF)\}$$

⁸ Idem, pp. 95.

2.2. Expresión matemática derivada de grado $N+1$ (ED_{N+1}).

Denominamos ED_{N+1} a la expresión, de grado de derivación mayor que 1, que relaciona magnitudes fundamentales y derivadas MF y MD , en función de las cuales se define una magnitud derivada nueva.

Por ejemplo: la energía cinética ($E = \frac{1}{2} m v^2$) es una ED_2 , ya que, $MD_2 = N \cdot MF \cdot MD_1^2$, siendo N la fracción $\frac{1}{2}$. Simbólicamente:

$$ED_{N+1} := \{MD_{N+1} = \mathcal{F}(MF, MD_N)\}$$

Por lo tanto, la *gradación* dentro de esta estructura derivativa de las expresiones matemáticas se puede expresar de la siguiente manera, para obtener un patrón de sistematización de las mismas:

$EF := \{MF = \mathcal{F}(MF)\}$ $ED_1 := \{MD_1 = \mathcal{F}(MF)\}$ $ED_{N+1} := \{MD_{N+1} = \mathcal{F}(MF, MD_N)\}$
--

Ésta es, a nuestro entender, una forma básica, de sistematizar las magnitudes físicas y las expresiones matemáticas aplicable a cualquier área de la ciencia física.

4. Sistematización de las expresiones matemáticas de las mecánicas

Desde aquí, avanzamos hacia nuestro objetivo principal: revelar una *estructura común* subyacente a los aparatos formales de la mecánica clásica, relativista y cuántica. Esta estructura permitirá estudiar dichos aparatos desde una nueva perspectiva. Con este fin sistematizamos las expresiones matemáticas características de cada mecánica, según su grado de derivación, y ofrecemos los resultados en forma de tres tablas. Las tablas elaboradas no pretenden tener un carácter exhaustivo, son un extracto de tablas más completas desarrolladas durante esta investigación. Sin embargo, por limitaciones de espacio en éstas se presentan las expresiones matemáticas de la mecánica clásica, relativista y cuántica que consideramos más conocidas.

Cada fila representa el nivel que ocupa la expresión matemática, en función del grado de derivación de la magnitud que se define. En este sentido, por cada nivel se expone como mínimo una expresión matemática representativa del grado de derivación. Si un nivel queda en blanco, quiere decir que no se encontró ninguna expresión matemática correspondiente a dicho nivel, propia de la mecánica en cuestión.

Por su parte, las columnas representan:

Columna 1: Grado. La primera columna contiene el *grado de derivación* de la expresión matemática en la que se define la nueva magnitud.

Columna 2: Denominación. La segunda columna contiene la *denominación* de la ley, principio, postulado o ecuación a la que representa la expresión matemática analizada. Se utilizarán las abreviaturas de “ppio.”, “post.” y “ec.”, respectivamente, para las tres últimas.

Columna 3: Expresión matemática. La tercera columna contiene la *expresión matemática* con la cual en la mecánica correspondiente se conoce la definición de la nueva magnitud.

Columna 4: Expresión magnitudinal. La cuarta columna contiene la expresión matemática sistematizada mediante la gradación de las magnitudes articuladas, esto es, la *expresión magnitudinal*.

Los números y constantes que tomen parte en la ecuación física se designan todos de forma abstracta con la letra N.

Las tablas presentadas a continuación reflejan los siguientes resultados:

- La sistematización realizada de las expresiones matemáticas y las magnitudes físicas lleva a una *estructura común, subyacente al aparato formal* de las tres mecánicas.
- El aparato formal de cada mecánica se estructura en función de *los grados de derivación* de sus expresiones matemáticas y las magnitudes físicas.

Consideramos, por tanto, que cabe relacionar formalmente el grado de derivación de las expresiones matemáticas con la *fundamentalidad* de las leyes, principios, postulados o ecuaciones, que representan. Como consecuencia de estos resultados, establecemos como *Criterio de Fundamentalidad* de las leyes, principios, postulados y ecuaciones de la mecánica clásica, relativista y cuántica, *el grado de derivación de las expresiones matemáticas* que las representan, teniendo en cuenta que el grado de derivación nulo corresponde al nivel máximo de fundamentalidad.

Haciendo uso de este *Criterio de Fundamentalidad* hacemos un breve análisis de las leyes, principios, postulados y ecuaciones de la mecánica clásica, relativista y cuántica, que acompañará a su correspondiente tabla.

Tabla 1. Mecánica Clásica

Grado	Denominación	EXPRESIÓN MATEMÁTICA	Expresión magnitudinal
EF	EC. SUPERFICIE	$S = L^2$	$MF = MF^2$
	EC. VOLUMEN	$V = L^3$	$MF = MF^3$
	3ª LEY DE KEPLER	$t^2 = k a^3$	$MF^2 = N \cdot MF^3$
ED₁	EC. VELOCIDAD	$v = s/t$	$MD_1 = MF/MF$
	EC. MOMENTO DE INERCIA	$I = m r^2$	$MD_1 = MF \cdot MF^2$
	EC. FRECUENCIA	$v = 1/T$	$MD_1 = N/MF$
	LEY DE GRAVITACIÓN UNIV.	$F = G mn^1/d^2$	$MD_1 = N \cdot MF \cdot MF/MF^2$
	LEY DE COULOMB	$F = qq^1/r^2$	$MD_1 = MF \cdot MF/MF^2$
ED₂	EC. ACELERACIÓN	$a = v/t$	$MD_2 = MD_1/MF$
	EC. CANTIDAD DE MOVIMIENTO	$p = m v$	$MD_2 = MF \cdot MD_1$
	EC. ENERGÍA CINÉTICA	$E = \frac{1}{2} m v^2$	$MD_2 = N \cdot MF \cdot MD_1^2$
ED₃	2ª LEY DE NEWTON	$F = m a$	$MD_3 = MF \cdot MD_2$
	EC. MOMENTO ANGULAR	$L = p r$	$MD_3 = MD_2 \cdot MF$
ED₄	EC. TRABAJO	$W = F L$	$MD_4 = MD_3 \cdot MF$
	EC. PRESIÓN	$P = F/S$	$MD_4 = MD_3/MF$
ED₅	EC. POTENCIA	$P = W/t$	$MD_5 = MD_4/MF$

El aparato formal de la mecánica clásica *posee* leyes y ecuaciones propias de nivel máximo de fundamentalidad y se estructura de forma *continua* desde el grado nulo de derivación, sin niveles vacíos.

Tabla 2. Mecánica Relativista

Grado	Denominación	EXPRESIÓN MATEMÁTICA	Expresión magnitudinal
EF			
ED₁	EC. VELOCIDAD DE LA LUZ	$c = s/t$	$MD_1 = MF/MF$
ED₂	EC. DE EINSTEIN	$E = m c^2$	$MD_2 = MF \cdot MD_1^2$
	EC. DEL RADIO DE SCHWARZSCHILD	$r_g = 2Gm/c^2$	$MD_2 = N \cdot N \cdot MF / MD_1^2$
	EC. MASA RELATIVISTA ⁹	$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$	$MD_2 = MF / \sqrt{N - MD_1^2 / MD_1^2}$
	EC. TIEMPO RELATIVISTA	$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$	$MD_2 = MF / \sqrt{N - MD_1^2 / MD_1^2}$

⁹ Ver nota 1.

	EC. LONGITUD RELATIVISTA	$L = L_0 \sqrt{1-v^2/c^2}$	$MD_2 = MF \sqrt{N - MD_1^2 / MD_1^2}$
ED₃	EC. CANTIDAD DE MOV. RELAT.	$p = P_0 / \sqrt{1-v^2/c^2}$	$MD_3 = MD_2 / \sqrt{N - MD_1^2 / MD_1^2}$
	EC. ENERGÍA TOTAL	$E = E_0 / \sqrt{1-v^2/c^2}$	$MD_3 = MD_2 / \sqrt{N - MD_1^2 / MD_1^2}$

El aparato formal de la mecánica relativista *no posee* leyes y ecuaciones propias de nivel máximo de fundamentalidad y se estructura de forma *continua sólo a partir del grado uno de derivación*, estando vacío el nivel correspondiente al grado nulo de derivación.

Tabla 3. Mecánica Cuántica

Grado	Denominación	EXPRESIÓN MATEMÁTICA	Expresión magnitudinal
EF			
ED₁	EC. VELOC. DE PROPAGACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGN.	$c = \lambda v$	$MD_1 = MF \cdot MD_1$
ED₂			
ED₃	EC. CONSTANTE DE PLANCK	$h = E/v$	$MD_3 = MD_2 / MD_1$
	EC. CTE. DE PLANCK REDUCIDA ¹⁰	$\hbar = h/2\pi$	$MD_3 = MD_3 / N$
	PPIO. DE INDETERMINACIÓN	$\hbar = \Delta x \Delta p$	$MD_3 = \Delta MF \cdot \Delta MD_2$
		$\hbar = \Delta E \Delta t$	$MD_3 = \Delta MD_2 \cdot \Delta MF$
ED₄	POST. DE BROGLIE	$\lambda = h/p$	$MD_4 = MD_3 / MD_2$
	EC. LONG. DE ONDA COMPTON	$\lambda = h/mc$	$MD_4 = MD_3 / MF \cdot MD_1$
	EC. MOM. ANGULAR ELECTRÓN	$L = n\hbar$	$MD_4 = N \cdot MD_3$
	EC. MAGNETÓN DE BOHR	$\mu_b = eh/2m_e$	$MD_4 = MF \cdot MD_3 / N \cdot MF$
	EC. RADIO DE BOHR	$a_0 = \hbar / m_e e^2$	$MD_4 = MD_3 / MF \cdot MF^2$
	EC. CUANTO DE FLUJO MAGN	$\Phi_0 = \hbar / 2e$	$MD_4 = MD_3 / N \cdot MF$
ED₅	EC. RADIO ORBITALES	$r_n = n^2 a_0$	$MD_5 = N \cdot MD_4$
	EC. EFECTO FOTOELÉCTRICO	$E = W + \frac{1}{2}mv^2$	$MD_5 = MD_4 + N \cdot MF \cdot MD_1^2$

¹⁰ La constante de Planck reducida \hbar es, únicamente, una modificación numérica de la constante de Planck h , por lo cual magnitudinalmente se identifican. La incluimos en esta tabla sólo para que se entienda su procedencia en las expresiones matemáticas subsiguientes que la incluyen.

ED_x	EC. DE SCHRÖDINGER ¹¹	$H\Psi = E\Psi$	---
--------	----------------------------------	-----------------	-----

El aparato formal de la mecánica cuántica *no posee* leyes y ecuaciones propias de nivel máximo de fundamentalidad y se estructura de forma *discontinua* a partir del grado uno de derivación, con el segundo nivel vacío.

Como *conclusión* podemos constatar que el Criterio de Fundamentalidad establecido permite detectar cuantitativa y cualitativamente los posibles vacíos magnitudinales en los aparatos formales de la mecánica clásica, relativista y cuántica.

La crítica del contenido conceptual de los aparatos formales de las mecánicas clásica, relativista y, con acento especial, de la mecánica cuántica, a través del prisma del *Criterio de Fundamentalidad*, será el contenido de siguientes publicaciones, como resultado del estudio en curso.

Referencias bibliográficas

- DIRAC, P.M.A. “La concepción física de la Naturaleza” en *Misterios de la física cuántica* de Temas 10, 4º trimestre 1997, pp.4-12.
- KRAGH, H. “Paul Dirac: seeking beauty.” en *Physics World*, Agosto 2002.
- TAYLOR, J. (2002) *It must be beautiful: great equations of modern science*, Graham Farmelo (Ed.), Granta Books.
- SALAM, HEISENBERG, DIRAC (1990): *La unificación de las fuerzas fundamentales*, Gedisa, Barcelona.
- Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1996) *Vocabulario científico y técnico*. Espasa. Madrid.
- Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (2001) *Diccionario esencial de las ciencias*. Espasa. Madrid.

¹¹ La Ecuación de Schrödinger es un caso muy especial de expresión matemática, que no nos atrevemos ni a clasificar dentro de los niveles de la tabla ni a representar en forma magnitudinal. Hemos optado por la expresión física que contiene el operador hamiltoniano (H), ya que, la forma en la que se presenta comúnmente esta ecuación es muy extensa. Schrödinger la presentó así:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V)\psi$$

Al aparecer una función que, según la interpretación de M. Born, es una función de densidad de probabilidad, que aparece derivada con segundas derivadas parciales respecto de x,y,z no nos imaginamos por ahora cual puede ser su significado físico, a nivel de la derivación de magnitudes, y no podemos clasificarla.