EDICIONES
COMPLUTENSE

Revista de Filosofía
ISSN: 0034-8244 • e-ISSN: 1988-284X

ARTÍCULOS

Notas sobre el predicativismo de Weyl en relación con la paradoja de Richard

Víctor González Rojo
UNED

https://dx.doi.org/10.5209/resf.88851

Recibido: 24/5/2023 • Aceptado: 1/7/2024

Resumen: La resolución de la paradoja de Richard es clave en el desarrollo del sistema predicativista de Weyl. En este artículo analizamos su tratamiento en distintos textos del autor. Además, consideramos la *definibilidad* y la *numerabilidad* —núcleos fundamentales de la paradoja— en relación con las nociones: *conceptos extensionalmente definidos* e *indefinidamente extensibles*. Intentamos asimismo responder hasta qué punto estas nociones se pueden aplicar al conjunto de los números naturales y al de los reales weylianos.
Palabras clave: predicativismo; paradoja de Richard; extensionalmente definido; indefinidamente extensible.

ENG Notes on Weyl's predicativism in relation to Richard's paradox

Abstract: The resolution of Richard's paradox plays a crucial role in the development of Weyl's predicativist system. In this paper, we examine how the paradox is addressed in various texts by Weyl. Additionally, we explore the concepts of definability and numerability —fundamental aspects of the paradox— in relation to the notions of extensionally definite and indefinitely extensible concepts. Finally, we consider the extent to which these notions can be applied to the set of natural numbers and to the set of Weylian reals.
Keywords: predicativism; Richard's paradox; extensionally definite; indefinitely extensible.

Cómo citar: González Rojo, V. (2025) "Notas sobre el predicativismo de Weyl en relación con la paradoja de Richard", *Revista de Filosofía* 50 (2), 345-355.

1. Introducción[1]

En este artículo pretendemos analizar la importancia de la paradoja de Richard para la propuesta predicativista desarrollada por Weyl.

El predicativismo weyliano (sucintamente expresado) rechaza: 1) la operación (general) de potenciación sobre conjuntos arbitrarios infinitos. I.e., P(A) —conjunto de partes de A, con A infinito numerable—; 2) definiciones impredicativas, es decir, aplicación irrestricta de cuantificadores en definiciones de objetos matemáticos, v.gr.: definición clásica de supremo de un conjunto acotado de reales[2].

Weyl sólo dedica dos páginas a la paradoja en *Das Kontinuum*. En concreto, ésta se analiza en el epígrafe §5: 'Los números naturales. La paradoja (o antinomia) de Richard' ['*Die natürlichen Zahlen. Richardsche Antinomie*']. Quizá se pueda considerar exiguo su tratamiento. Sin embargo, creemos que esto no impide afirmar el papel fundamental que juega en el predicativismo de Weyl.

Entre otros argumentos, podemos citar sus artículos anteriores y posteriores a *Das Kontinuum* donde se hace referencia a la resolución de la paradoja en relación con el análisis del continuo y la teoría de conjuntos de Zermelo. Resolver la paradoja, tiene que ver en definitiva con cómo se definen (adecuadamente, según Weyl) conjuntos de naturales, y, por tanto, también con la pregunta sobre *cuántos* hay, o puede haber.

Lo que, a su vez, deja abierta la cuestión, que trataremos, sobre cómo *es* el conjunto de los reales: si indefinidamente extensible[3] (*indefinitely extensible*, *open-ended*); o determinado (i.e., el concepto es extensionalmente definido). Con lo cual, al investigar esta cuestión, estamos apuntando a la *esencia* misma del predicativismo.

El predicativismo weyliano se enfrenta con el problema del círculo vicioso estudiado por Russell y Poincaré, cuando analiza el análisis clásico. Una definición es impredicativa, si el objeto a definir forma ya parte de una totalidad usada en la definición para definir al propio objeto. Weyl cita a Russell en este punto de forma muy ilustrativa: “No totality can contain members defined in terms of itself” (Weyl, 1918, p. 36).

Estas definiciones contienen un círculo vicioso, y una de ellas es la definición clásica de supremo. Con lo cual, nos encontramos con un problema en el seno mismo del análisis. Weyl pretende desarrollar un análisis donde esto no suceda. Luego, acertar a resolver la paradoja de Richard es fundamental para el desarrollo del predicativismo, dado que su resolución implica el no poder cuantificar sobre conjuntos arbitrarios de naturales. Por lo tanto, resolver el círculo vicioso sin considerar una lógica ramificada de tipos.

Weyl parte de los números naturales como totalidad determinada e intuitivamente dada para construir los reales de forma segura. Segura quiere decir que se aparta de la concepción de Dedekind de cortadura (arbitraria) y de la teoría de conjuntos desarrollada por Zermelo, y sólo se atiene a unos principios básicos definidos que aseguran el control en la definición del concepto de conjunto (concretamente, de los naturales) y de la operación conjunto potencia sobre un conjunto *A* cualquiera, P(*A*).

La paradoja toca asimismo dos ideas fundamentales: la *numerabilidad* y la *definibilidad* de objetos matemáticos.

Creemos que resolver la paradoja es suficiente (sin contar el problema que supone en el sistema de Weyl su principio de iteración) para desarrollar de forma fundamentada el predicativismo.

Como Clark (1994, p. 227) afirma, la paradoja de Richard está “en el centro de la comprensión constructiva del continuo y de la interpretación del teorema de Cantor”[4] ideas que son básicas para entender adecuadamente el predicativismo de Weyl.

2. Enunciado (original) de la paradoja de Richard

En Richard (1905) se presenta por primera vez la paradoja del siguiente modo: Se forma el conjunto de las variaciones con repetición que es posible hacer con veintiséis letras tomadas de *p* en *p*, siendo *p* un número natural arbitrario[5].

---

1 Textos (originales) escritos en inglés no se traducirán.

2 La definición que analiza Weyl en (Weyl, 1918, p. 23) es: “Sea *M* un conjunto acotado de reales de primer nivel. Para construir su supremo, se tiene que formar un conjunto de racionales γ, al cual pertenece un racional *r* si y sólo si *existe* en *M* un real de primer nivel que es mayor que r. El conjunto γ tiene las propiedades *a*), *b*) y *c*) [definidas anteriormente en (Weyl, 1918, p. 22)], y es por tanto, un número real, *pero de segundo nivel*, pues en su definición, «existe» ocurre en conexión con «un real de primer nivel» (i.e., »un conjunto de primer nivel de racionales« o «una propiedad primitiva o derivada de primer nivel»)”. Lo importante de su crítica a esta definición es que el cuantificador existencial se usa de forma tal que no se consideran niveles. En la definición clásica se define al supremo a partir de una totalidad de la que *ya* forma parte, la de los números reales, pues el mismo *es* un real. Luego estamos ante una definición impredicativa.

3 Originalmente se habla de que un concepto es indefinidamente extensible u *open-ended*. Nosotros creemos que se puede preguntar, también, si los *conjuntos* son también indefinidamente extensibles, como hace, por ejemplo, Linnebo, 2018.

4 “Furthermore the Richard paradox is at the centre of the constructive understanding of the continuum and the interpretation of Cantor’s theorem”.

5 Aquí, quizá hay que ser un poco flexible en cuanto a los espacios vacíos y otros caracteres. Pero la idea intuitiva está clara.

Luego se tachan los elementos que no sean definiciones de números[6]. Sea E el conjunto resultante. Ahora, se puede hacer una lista con los números definidos con un número finito de palabras, de manera que el conjunto resultante es numerable. A continuación, construimos un número que no pertenece a este conjunto del siguiente modo: sea *p* la n-ésima cifra decimal del n-ésimo número de E [“*Soit* p*, la* n$^{\text{ième}}$ décimale du n$^{\text{ième}}$ *nombre de l'ensemble E*” (Richard, 1905, 541)]. Se forma un número nuevo N, que tiene un cero en su parte entera, y donde el n-ésimo decimal es *p*+1, si *p* no es igual ni a 8 ni a 9, e igual a 1 en caso contrario. Este número N así formado, no pertenece al conjunto E. Pues, si fuera el n-ésimo número del conjunto E, su n-ésima cifra sería la n-ésima cifra decimal de este número. Pero este no es el caso. Veámoslo detalladamente, en un caso finito (y con números racionales).

Sea por ejemplo E, el siguiente conjunto finito de cinco racionales (con un número finito de decimales):

1° número de E: 0,**1**2345

2°número de E: 0,6**7**891

3°número de E: 0,98**7**65

4° número de E: 0,432**1**9

5° número de E: 0,1122**8**

Siguiendo a Richard, p_1 es 1, p_2 es 7, p_3 es 7, p_4 es 1 y p_5 es 8. Luego N es, siguiendo lo anterior: 0,28821. Como se observa, N, no es ninguno de los cinco números descritos. Este procedimiento puede seguirse igualmente si E es un conjunto infinito numerable, de hecho, esto es lo único interesante. De modo que se obtiene un N que no está en E.

Richard sigue su explicación haciendo que G sea la *definición del proceso* descrito más arriba. Esto es, G es el *conjunto de letras* que “significan” este proceso, i.e.: “Sea *p* la n-ésima [...] en caso contrario”. El nuevo número N se ha definido mediante G, que es un conjunto finito de palabras. Luego, debería estar en E. Pero acabamos de ver que esto no es así. Por tanto, la contradicción está servida.

Sin embargo, Richard (1905, p. 541) replica: “Veamos que esta contradicción es sólo aparente. Volvamos a nuestras permutaciones. El grupo de letras G es una de estas permutaciones; existirá en mi tabla. Pero, en el lugar que ocupa, no tiene sentido. Aquí se trata del conjunto E, y éste aún no está definido. Así que tendré que tacharlo [se refiere a G]. El grupo G [el “grupo” de letras que forman la definición] sólo tiene sentido si el conjunto E está totalmente definido, y éste solo está definido por un número infinito de palabras. Por tanto, no hay contradicción”[7].

3. Paradoja de Richard en Weyl

Veamos ahora, cronológicamente, textos en los que Weyl hace referencia a la paradoja.

En su escrito de habilitación de 1910 «Sobre la definición de conceptos matemáticos fundamentales» [«*Über die Definition der mathematischen Grundbegriffe*»], Weyl explica su posición respecto a ésta, partiendo de la exposición de la geometría euclídea de Pieri. Es de la opinión, de que conceptos como línea o plano se pueden sustituir por conceptos relacionales [*Beziehungsbegriffe*] que sólo tienen que ver con puntos (considerados en número finito). El desarrollo de la geometría euclídea se puede por tanto reducir a cinco principios de definición relacionales entre puntos: 1) permutación, 2) negación, 3) adjunción, 4) exclusión, 5) coordinación o cópula.

Weyl sostiene —siguiendo a Pieri— que cada concepto relacional de la geometría elemental (la que afirma propiedades de grupos finitos de puntos y de conjuntos de puntos), se puede expresar mediante la identidad y la relación fundamental “dos puntos se encuentran a la misma distancia de un tercero”, además de la aplicación finita de los cinco principios mencionados.

Se pregunta después sobre lo que nos dirá la paradoja de Richard, considerando “que ha jugado un papel nada despreciable en la discusión sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos”[8], si se tiene en cuenta el punto de vista respecto de la geometría elemental y la posibilidad de definir *cualquier* relación entre puntos o conjuntos de puntos de forma explícita mediante una relación fundamental.

---

6 Richard no explicita qué clase de números, si racionales o reales. Sin embargo, es claro colegir que se refiere a reales.

7 “Montrons que cette contradiction n'es qu'apparente. Revenons à nos arrangements. Le groupe de lettres G est un de ces arraagements; il existera dans mon tableau. Mais, à la place qu'il occupe, il n'a pas de sens. Il y est question de l'ensemble E, et celui-ci n'est pas encore défini. Je devrai donc le biffer. Le groupe G n'a de sens que si l'ensemble E est totalement defini, et celui-ce ne l'est que par un nombre infini de mots. Il n'y donc pas contradiction”.

8 “Was wird man nun von dem hier eingenommenen Standpunkt aus zu der Richardschen Antinomie sagen wollen, die in der Diskussion über die Grundlagen der Mengenlehre eine nicht unbedeutende Rolle gespielt hat?”. [“¿Qué se dirá ahora, desde el punto de vista aquí adoptado, sobre la antinomia de Richard, que ha jugado un papel nada despreciable en la discusión sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos?”] (Weyl, 1968, vol. I, p. 300).

La paradoja de Richard trata en definitiva de que lo que puede ser objeto de nuestro pensamiento se debe *definir con un número finito de palabras*, por lo que sólo puede ser numerable. Sin embargo, Weyl observa aquí una dificultad evidente, pues el conjunto de los reales es no-numerable.

Relacionando esto con la teoría de conjuntos de Zermelo, la dificultad radica en concreto en que el concepto "definible" juega un papel fundamental, y que viene expresado a su vez por los axiomas ["*der Begriff "definierbar" in die Axiome dieser Disziplin selbst hineinspielt*" (Weyl, 1968, vol. I, p. 304)].

El axioma de separación o comprehensión [*Aussonderungsaxiom*] de Zermelo (1908, p. 263) afirma la existencia de un conjunto, si los elementos de un conjunto dado M, cumplen una cierta propiedad, la cual, a su vez, se da o no para aquellos elementos de forma definida. Se puede entonces decidir si un elemento pertenece al conjunto que define la propiedad. La definición del axioma es: "Sea $P(x)$ un predicado [*Klassenaussage*] definido [*definit*][9] para todos los elementos de un conjunto M. Entonces M posee siempre un subconjunto MP, el cual contiene aquellos elementos de M y sólo aquéllos, para los cuales $P(x)$ es verdadero". Sin embargo, Weyl busca más precisión en su formulación. De este modo escribe antes de formular el axioma: "Bajo *relación definida*, se debe entenderse aquélla que en base a las dos relaciones = y ∈ se explica con la aplicación finita de nuestros principios de definición modificados de forma adecuada"10. Por el contrario (según Weyl) Zermelo, afirma con su axioma de separación que: "[A]quellos elementos *x* de un conjunto dado *M*, los cuales cumplen un cierto enunciado definido [*definite Aussage erfüllen*], forman siempre un conjunto". Luego añade: "[Y] entonces, según la explicación de Zermelo, un enunciado definido es tal que el cumplirse o no cumplirse, entre las cosas de la teoría de conjuntos [*Dingen der Mengenlehre*] sobre las que se da la relación fundamental ∈, es algo claro y no arbitrario que se puede decidir"[11].

Weyl critica a Zermelo que la expresión: "*eindeutigen und ohne Willkür zu treffenden Entscheidung*" ["decisión que se toma de forma precisa y no arbitraria"] es vaga y requiere precisión.

En concreto formula el axioma de este modo: "Sea *M* un conjunto cualquiera, sea *a* un objeto cualquiera y *A* una relación cualquiera definida entre dos objetos. Entonces, los elementos x de *M* que están con *a* en la relación *A* forman un conjunto"[12]. Lo importante aquí es que Weyl hace notar que la relación definida se *refiere* a un elemento *a*. Es importante porque Weyl ha sustituido la definición de *enunciado finito* en el sentido de Zermelo[13] por una relación definida que se da entre un elemento fijo *a* (o entre varios) de un conjunto dado. Esta *referencia* no aparece en la formulación de Zermelo, y por tanto, no sólo peca de vaguedad, sino que abre la puerta –en teoría– a definiciones impredicativas, no controladas por la aplicación finita de principios o axiomas definidos sobre elementos fijados en la definición.

Para Weyl, el problema reside en el hecho de que en la teoría axiomática de conjuntos, así como en lógica matemática, sólo se pueden definir una cantidad numerable de conceptos relacionales, pero no así de objetos, ya que para la introducción de nuevos conjuntos *no* sólo se tiene en cuenta la forma de introducirlos a través del axioma sobre propiedades definidas de conjuntos que forman subconjuntos, sino también a través de las operaciones de la unión, la intersección y el conjunto potencia (o partes de un conjunto).

Por tanto, se han identificado dos aspectos básicos de la paradoja:

> a) Si definimos objetos basados en conceptos y principios de definición fundamentales aplicados un número finito de veces, *sólo* obtenemos un número numerable de objetos definidos.
>
> b) En la teoría de conjuntos de Zermelo, el número de objetos no es numerable, porque se permite además la definición de conjuntos mediante operaciones sobre ellos.

En Weyl (1918, p. 18), se explica la paradoja diciendo que su forma usual tiene esta forma: "Las posibles combinaciones finitas de letras forman un conjunto numerable, y como cada número real determinado se debe poder definir con un número finito de palabras, sólo puede existir una cantidad numerable de números reales —en contradicción con el teorema clásico de Cantor y su demostración"[14]. Después, se afirma

---

9 Zermelo define una pregunta o enunciado ["*Eine Frage oder Aussage*"] "definido" [*definit*] si las relaciones básicas (pertenencia e inclusión) sobre un dominio de cosas, con ayuda de los axiomas y de las leyes lógicas deciden (sin arbitrariedad) sobre su validez o invalidez. Asimismo, un predicado $P(x)$ de clase es definido si para todo los x de la clase C, si es definido para todo elemento x de C. Luego la pregunta si a ∈ b o N ⊂ M son definidas (Zermelo, 1908, p. 263).

10 "Unter einer definiten Beziehung soll eine solche verstanden werden, welche auf Grund der beiden Beziehungen = und ∈ durch endlichmalige Anwendung unserer in geeigneter Weise modifizierten Definitionsprinzipien erklärt ist" (Weyl, 1968, vol I. p. 304).

11 "[D]iejenigen Elemente *x* einer vorgelegten Menge *M*, welche irgend eine definite Aussage erfüllen, stets wieder eine Menge bilden, und dabei ist nach Zermelos Erklärung eine definite Aussage eine solche, deren Zutreffen oder Nichtzutreffen eindeutig und ohne Willkür auf Grund der zwischen den Dingen der Mengenlehere bestehenden Grundbeziehung entscheiden werden kann" (Weyl, 1968, vol I. p. 304).

12 "Ist denn *M* irgend eine Menge, *a* irgend ein Ding, *A* eine definite Zweidingbeziehung, so bilden diejenigen Elemente *x* von *M*, welche zu *a* in der Beziehung *A* stehen, stets eine Menge" (Weyl, 1968, vol I. p. 304).

13 "An Stelle einer definiten Aussage im Zermelo'schen Sinne tritt also hier die definite Beziehung zu einem festen Element *a* (oder auch zu mehreren festen Elementen)" ["En lugar de un enunciado definido en el sentido de Zermelo aparece aquí la relación definida entre un elemento fijo *a* (o también entre varios elementos fijos)"] (Weyl, 1968, vol. I, p. 304).

14 "Die mögliche Kombinationen endlichvieler Buchstaben bilden eine abzählbare Menge, und da jede bestimmte reelle Zahl sich durch endlichviele Worte definieren lassen muß, kann es nur abzählbar viele reelle Zahlen geben —im Widerspruch mit Cantors klassischem Theorem und dessen Beweis".

que esto va contra lo que Cantor demuestra, a saber, que el cardinal de los naturales es estrictamente menor que el de los reales. Weyl considera, en vez del concepto 'número real' el de 'conjunto de números naturales'[15]. Como dominio operacional [*Operationsbereich*] establece a los naturales y la operación F: ser sucesor de un número natural. Después, y a partir del principio de iteración que introduce[16], Weyl afirma, que los conjuntos (unidimensionales) de naturales [*die eindimensionalen Zahlmengen*] —luego todos los posibles[17], surgidos de este modo, se dejan enumerar en una sucesión, mediante un proceso de creación [*Erzeugungsprozess*] de esquemas de juicios de propiedades y relaciones derivadas, todos los posibles conjuntos de naturales.

Este hecho supone para Weyl el núcleo de la paradoja que, gracias a la "precisión objetiva" del concepto *definición finita* [*endliche Definition*] —precisión alcanzada mediante los principios de formación[18] de juicios expuestos por Weyl—, se puede llegar a entender y a solucionar.

Seguidamente dice que la numerabilidad del conjunto de los subconjuntos de números naturales está en efecto refutada [*widerlegt*] por la demostración de Cantor, añadiendo que este hecho sólo es relevante para la matemática[19]. Después afirma que en su dominio operacional *no existe* una relación binaria $\mathrm{R(x, y)}$ tal que para cada conjunto de números (i.e., para cada propiedad derivada) existe un número *a* tal que el conjunto mencionado es idéntico [*identisch*] al conjunto que se define por la propiedad $\mathrm{R(x, a)}$, es decir, el conjunto de los naturales x, que están con a en la relación R[20].

Por consiguiente, y reformulando la afirmación de Weyl, lo que no se da es esta identificación: Dado un conjunto cualquiera X, existe un natural *a*, tal que $\mathrm{X} = \{x \mid \mathrm{R}(x, a)\}$. Si es así, no se puede formar por diagonalización la relación $—\mathrm{R(n, n)}$ (negación de R), que es como procede Cantor para demostrar la no-numerabilidad de los reales. Esta relación se corresponde según Weyl con una propiedad que define un conjunto unidimensional de naturales: "zu jeder (einer abgeleiteten Eigenschaft entsprechenden eindimensionalen) Zahlmenge[21]" ["para cada propiedad derivada que se corresponde con un conjunto unidimensional de números" (Weyl, 1918, p. 19)].

Y que es lo que Richard considera "paradójico", si el concepto de *definibilidad* y el de *numerabilidad* se aplican a los números reales.

Queremos notar que Weyl no se "opone" a la demostración de Cantor. En *Das Kontinuum*, comenta dos cosas interesantes. Una de ellas es algo oscura. En 1918, p. 19, escribe que la numerabilidad de *todos* los conjuntos de naturales es refutada por la demostración de Cantor, pero de una forma completamente distinta [*in einem ganz andern* [...] *Sinn*] y sólo pertinente para la matemática.

¿Qué quiere decir Weyl con que *sólo* es pertinente para la matemática [*für die Mathematik allein in Frage kommenden Sinn*]? Para nosotros no está (suficientemente) claro. Como explicaremos más abajo, Cantor demuestra de forma constructiva, aplicando la diagonalización, que no existe una biyección entre los naturales y los reales. Pero se basa en una forma 'numeral' de *representación* de los reales. Esto es, si se nos permite decirlo así, la "ontología" del número real, lo que este número *sea*, queda en suspenso.

La otra cosa interesante es que en (Weyl, 1918, p. 19) se afirma que, si se entiende el concepto de numerabilidad como lo ha expuesto, no existe ningún motivo para afirmar que todo conjunto infinito numerable contiene un subconjunto numerable. Una consecuencia que no asusta a Weyl [*von der ich durchaus nicht zurückschrecke*]. Los traductores ingleses de *Das Kontinuum* afirman en (Weyl, 1987, p. 120, nota 23, I cap.), que a lo que se refiere el matemático con esto es a que: la infinitud de un conjunto M, por ejemplo, no asegura la existencia de una biyección *constructiva*, cuyo dominio es el conjunto de los naturales, y su imagen un subconjunto de M. Con esto estamos de acuerdo. Nos preguntamos sólo, cómo, o si se aseguraría, si la biyección *no* fuese constructiva.

---

15 Weyl considera a los reales números racionales *especiales*, y éstos, a su vez, conjuntos cuatridimensionales de naturales. Suponemos además que sería conocedor del teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein, que tiene como corolario que el conjunto potencia de los naturales tiene la misma potencia que el continuo.

16 Aunque no esté completamente formulado, como indica.

17 "[U]nd durch den angedeuteten Prozeß werden also im gleichen Sinne auch alle möglichen Mengen natürlicher Zahlen" ["[Y] mediante el proceso mencionado del mismo modo todos los posibles conjuntos de números naturales] (Weyl, 1918, p. 19).

18 Weyl escribe *Erzeugungsprinzipe*. 'Erzeugen' es *crear*, *generar*. Estos principios los expone en la parte primera de *Das Kontinuum* y son: negación, sustitución de variables libres por otras variables libres, conjunción, disyunción, sustitución de una variable libre por un elemento y formación de juicio existencial. Después se les añaden los de sustitución de variables libres por funciones en juicios e iteración. Véase (Weyl, 1918, pp. 4-6 y pp. 27 y ss.).

19 "Dagegen wird die Abzählbarkeit aller Zahlmengen in einem ganz andern und, wie ich glaube, für die Mathematik allein in Frage kommenden Sinn durch den Cantorschen Beweis in der Tat widerlegt" ["Por contra la numerabilidad de todos los conjuntos de números es de hecho contradicha por la demostración de Cantor en una forma completamente distinta, y como creo, sólo en un sentido relevante para la matemática"] (Weyl, 1918, p. 19). No sabemos cómo se debe entender esto exactamente, pues Weyl escribe (esencialmente) sobre matemáticas, y sobre cómo fundamentarlas "sólidamente". Una posible interpretación es que, partiendo de que Weyl en (1918, p. 29, nota) no acepta la definición de Dedekind de conjunto infinito, como aquél que es equipotente a un subconjunto propio suyo, y tampoco una escala *general* de cardinales y ordinales infinitos cantorianos (Weyl, 1918, p. 16). Acepta, sin embargo, la demostración como demostración de la existencia de números trascendentes. Creemos que la demostración no contradice el sistema de Weyl, sino que afirma la posibilidad de *construir* números trascendentes en su sistema.

20 Véase (Weyl, 1918, p. 19).

21 Paréntesis en el original.

En (Weyl, 1921, 47-48) se hace referencia de nuevo a la paradoja en estos términos: "*¿Qué sucede con la numerabilidad del continuo?*[22] La antinomia de Richard tiene en el siguiente sentido razón: se puede regular el uso de los principios lógicos de construcción, tal que en un proceso ordenado de generación [*in einem geordneten Entstehungsprozeß*] surjan las propiedades y relaciones de manera precisa en una sucesión, donde se tiene la seguridad, de que cada relación será creada en una precisa posición de proceso. Por tanto, también está, en particular, el sistema de los "números reales" (en nuestro sentido) ordenado en una sucesión"[23].

En (Mancosu, 1997, p. 130)24 se presenta la paradoja de forma algo distinta. Primero, se consideran los numerales de 0 a 9, las letras del alfabeto y los signos de puntuación. Weyl escribe que en alemán existe un número finito de números definibles con menos de mil signos de los anteriores. Después, se considera la expresión: "El primer número natural que no puede ser definido por medio de una oración que contiene menos de mil signos". Como esto es para Weyl impreciso, prefiere sustituir esta referencia al lenguaje natural por cuatro principios de construcción aritméticos simples, y un quinto que hace referencia a sí mismo.

Esta es una presentación poco habitual de la paradoja, pues, originalmente, en ella no aparece ninguna auto-referencia, sólo un principio de construcción.

Lo que escribe más adelante es, sin embargo, lo interesante: "Desde un punto de vista constructivista la antinomia [se refiere a la paradoja de Russell[25]] se resuelve ella misma análogamente a la de Richard; nos enseña que está fuera de lugar decretar un límite y una totalidad determinada a todos los conjuntos de números naturales o a todas las posibles propiedades de números naturales. No todo concepto b de contenido definido [*inhalts-definit*] ha de ser extensionalmente definido *[umfangs-definit*]"[26].

Decir que un concepto *b* es extensionalmente definido es más *fuerte* que decir que sólo es de contenido definido. Para Weyl, preguntar si un objeto *X* tiene la propiedad *A*, tiene un sentido preciso, pues la respuesta se corresponde con un estado de cosas válido en sí mismo. Es decir, tiene sentido afirmar su verdad o falsedad. Pero ser un concepto de extensionalmente definido implica además que para cada objeto *X* significado por *b*, la pregunta existencial de si existe un tal objeto con la propiedad A tiene sentido. I.e., existe una manera "precisa" de *mostrar* el objeto[27].

Propiedades del nivel básico son aquéllas asociadas a objetos de un dominio operacional simple, como, v.gr., los números naturales. Y se expresan aplicando a los objetos del dominio, los cuantificadores existenciales. A partir de estas propiedades (dominio extensionalmente definido), a su vez, se definen otras de nivel superior aplicando los cuantificadores a aquéllas, y así sucesivamente. De esta forma fue como Russell solucionó la paradoja homónima. Weyl escribe en (Weyl, 1918, p. 36), que, sin embargo, el *axioma de reducibilidad* [*Axiom of reducibility*] introducido por Russell para simplificar la lógica ramificada de tipos, no es admisible, si se pretende trabajar con un análisis sin niveles. En *Das Kontinuum*, Weyl propone una solución que no contempla la aplicación del axioma. Lo hará en definitiva, por medio de la aplicación de procedimiento restringido[28] y de su principio de iteración. Volveremos sobre esto más adelante.

En (Weyl, 1949) se expone el procedimiento de diagonalización de Cantor en relación con la paradoja.

Pero analicemos primeramente lo que Cantor (1890-1891, pp. 75-78) escribe, para ver seguidamente cómo lo trata Weyl.

Para la demostración de que el cardinal de un intervalo real (α, β) es estrictamente mayor que el de los naturales, Cantor considera primero dos caracteres distintos m y w. Después, el conjunto M de elementos E de la forma

$$E = (x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots).$$

donde cada coordenada es m o w[29].

---

22 Cursivas en el original.

23 "Wie steht es mit der *Abzählbarkeit des Kontinuums*? Die Richardsche Antinomie bekommt hier im folgenden Sinne Recht: Man kann offenbar die Anwendung der logischen Konstruktionsprinzipien so regulieren, daß in einem geordneten Entstehungsprozeß die definiten Eigenschaften und Relationen in bestimmter Reihenfolge erscheinen, wobei man die Sicherheit hat, daß derartige Relation an einer gewissen Stelle des Prozesses erzeugt werden wird. Damit ist dann auch insbesondere das System der reellen Zahlen (in unserm Sinne) in eine abgezählte Reihe geordnet".

24 En Mancosu se presenta traducido el artículo: "Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik", *Symposion* 1, 1925-1927, pp. 1-32.

25 La paradoja surge al considerar: 'El conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos'.

26 La definición de extensionalmente definido en (Weyl, 1919) es que tiene sentido hablar de un objeto que cae bajo la esfera de existencia del concepto, que es definida, delimitada, una totalidad idealmente cerrada ["*an sich bestimmten und begrenzten, ideal geschlossenen Inbegriff*"(Weyl, 1919, p. 85)].

27 Esta manera supone construir el objeto. Y creemos que ello sólo es posible dando un algoritmo para su construcción (o un algoe ritmo que decide la pregunta sobre su existencia), o, asimismo, admitiendo la inducción como forma "precisa" de construcción. Esto es, de hecho, lo que hace Cantor.

28 El procedimiento restringido [*engeres Verfahren*] se resume como una restricción impuesta a la cuantificación, la cual sólo es válida aplicada a la categoría básica del dominio operacional definido.

29 "Sind nämlich m und w irgend zwei einander ausschliessende Charaktere, so betrachten wir einen Inbegriff M von Elementen:

$$E = (x_1, x_2, \ldots x_\nu)$$

Welche von unendlich viele Coordinaten $x_1, x_2, \ldots x_\nu, \ldots$ abhängen, wo jede dieser Coordinaten entweder m oder w ist. M sei die Gesamtheit aller Elemente E" (Cantor, 1890-1891, p. 76).

Al conjunto M corresponden por ejemplo los elementos:

$$E^1 = (m, m, m, m, \ldots)$$

$$E^2 = (w, w, w, w, \ldots)$$

$$E^3 = (m, w, m, w, \ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Al asumir que las coordenadas, esto es, los E^n, con n natural, pueden ser ordenadas en una secuencia $E^1, E^2, E^3 \ldots$ se obtiene una contradicción.

Weyl analiza el argumento diagonal de Cantor, relacionándolo con la paradoja de Richard. Considera en vez de m y w, el 0 y el 1, y continúa diciendo que, si en la diagonal cambiamos el 0 o 1 por 1 o 0 según sea el caso, obtenemos una fracción dual[30] Q, tal que no está en la previa ordenación de las R, pues Q está formada por los elementos de la diagonal transmutados.

Si se interpreta 0 y 1 como verdadero y falso [“*on interpreting 0, 1 as the two truth values true and false*” (Weyl, 1949, p. 223)], una secuencia como R resulta en un predicado $R(x)$ que es verdadero, si $x = n$, con $r_n = 0$, o falso, si $r_n = 1$.

Si escribimos ahora las fracciones duales una debajo de otra del siguiente modo, podemos formar la siguiente matriz:

$$R^1 = r_1^{\,1}\, r_2^{\,1} \ldots r_n^{\,1}$$

$$R^2 = r_1^{\,2}\, r_2^{\,2} \ldots r_n^{\,2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R^m = r_1^{\,m}\, r_2^{\,m} \ldots r_n^{\,m}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Para la matriz descrita más arriba se puede definir una relación $S(y, x)$ de modo que para los números $x = n$, $y = m$ es verdadera si $r_n^{\,m} = 0$, y falsa si $r_n^{\,m} = 1$. El predicado $R^m(x)$ es equivalente a $S(m, x)$. La demostración de Cantor se basa en construir el predicado $—S(x, x)$. El predicado $R^k(x)$ coincide con $S(k, x)$, entonces para $k = x$, $S(x, x)$ implica $—S(x, x)$[31], y a la inversa. Esto, como apunta Weyl[32], no es una paradoja, sino la prueba indirecta de la no-numerabilidad del continuo de las fracciones duales en un intervalo. Sin embargo, deviene en paradoja si sostenemos que un número real puede ser definido mediante un número finito de palabras.

Weyl escribe: “Pero si describimos los x-predicados[33] mediante un proceso sistematizado de definiciones recursivas (sistema Δ) o mediante un formalismo M, siempre podemos enumerar los x-predicados construibles. (...) Luego formamos la relación binaria $S(z, x)$, ‘x tiene la propiedad número z’. La paradoja de Richard es inevitable si se da (i) las proposiciones de nuestro sistema son decidibles y (ii) la relación S es ella misma construible. Para Δ, (i) se da, por tanto, concluimos que S no es construible. Fue esencialmente de esta forma como discutí y resolví la paradoja de Richard en mi libro *Das Kontinuum*, 1918. Gödel, sin embargo, descubrió que en un formalismo M suficientemente amplio S es construible, luego concluye que no todas las fórmulas de M son decidibles” (Weyl, 1949, pp. 224-225).

Weyl “resuelve” la paradoja, tratando la *definibilidad*, a partir de lo que ha denominado *definiciones finitas* (definiciones de conceptos a partir de la aplicación *finita* de los principios de definición introducidos en (Weyl, 1918, pp. 4-6)), y que sólo dan lugar a una cantidad *numerable* de conjuntos de naturales. Esto es así, porque sus principios sólo dan lugar a proposiciones “decidibles” sobre números naturales, en el sentido de computables: esto es, se puede decidir (mediante un algoritmo) si un elemento pertenece o no al conjunto[34].

Nótese que lo que hace Cantor —y Weyl rechaza— es la “elección”[35] de un elemento de cada fila (en este caso el elemento de la diagonal $r_{11}, r_{22}, r_{33}\ldots$ de la matriz). Si R_n se interpreta como conjuntos de naturales,

---

30 Weyl no considera coordenadas, sino fracciones duales, i.e.: secuencias de 0 y 1. Escribe: “Writing a real number in the interval (0,1) as a dual fraction, Cantor replaces that number by an infinite sequence R of 0’s and 1’s” (Weyl, 1949, p. 223).

31 Negación de S.

32 “This is of course no paradox, but simply an indirect proof for the non-denumerability of the continuum of dual fractions (or of the predicates of natural numbers)” (Weyl, 1949, p. 224).

33 Son fórmulas en un lenguaje formal que tienen esta forma A(x), con x variable libre. Por ejemplo, ‘x es divisible por 2’.

34 Una clase más general son los conjuntos recursivamente enumerables, o semidecidibles. Para los cuales *no* se puede decidir (de forma general), si un elemento *no* pertenece al conjunto.

35 Por tanto, para Weyl no es posible aplicar el axioma de elección en este punto.

lo que no es posible para Weyl es la formación de un nuevo conjunto, a partir de la elección de elementos de cada fila.

Esta permisión no está fundamentada en principio, en cómo es el sistema de Weyl, o qué permite técnicamente el sistema. Es una restricción impuesta, para sortear el círculo vicioso. Es decir, exclusivamente, de cómo Weyl presenta sus principios no se concluye que S no se pueda "construir". Lo que no es posible es construirla, a partir de la definición de conjunto (y su dependencia ontológica). Además de del hecho de no permitirse la cuantificación sobre objetos que no pertenezcan a la categoría básica. Y los conjuntos no lo son.

Hemos visto que Weyl apela al *principio de iteración*, para generar los posibles conjuntos de naturales potencialmente definibles en su sistema, y afirma que en su dominio operacional *no existe* la relación R[36]. Sin embargo, en (Feferman, 1998) se construye una relación que no es aritmética, siguiendo aquel principio por un proceso de diagonalización.

Feferman procede del siguiente modo.

En primer lugar, afirma que al definir el *principio de iteración* se puede llegar a la conclusión de que la relación definida por Weyl (1918, p. 28)

$$R(x\,x' \mid X)$$

(donde x y x' son variables dependientes, y X independiente. X es un conjunto bidimensional, cuyos elementos pertenecen a la misma categoría que x y x'. Y donde a partir de R se puede definir la función $\Phi(X)$ cuyo valor es un conjunto de la misma categoría que X) se puede "diagonalizar", lo que supone que Weyl se coloca fuera del nivel de los números naturales donde pretendía desarrollar su programa predicativista.

Weyl define primeramente el principio de iteración de esta forma:

$$R(x\,x' \mid X) = R_1(x\,x' \mid X)$$

$$R_2(x\,x' \mid X) = R_1(x\,x' \mid \Phi(X)) \text{ (por sustitución),}$$

la función Φ que se define a partir de R_2 es $\Phi(\Phi(X)) = \Phi^2(X)$, luego

$$R_{n+1}(x\,x' \mid X) = R_n(x\,x' \mid \Phi(X))$$

Y la función $\Phi^{n+1}(X)$ es la que resulta de R_{n+1}.

Para Feferman (1998, p. 265) se debe asumir que, de los principios expuestos por Weyl, se pueden obtener todas las funciones recursivas primitivas y las relaciones en N. Ahora bien, si definimos

$$R_1(x\,x' \mid X) \;\; = \Phi^*(1, X) \qquad = \Phi(X)$$

$$R_n{+}1(x\,x' \mid X) = \Phi^*(n+1, X) = \Phi^*(n, \Phi(X))$$

y se considera la función jump de Turing[37] definida de tal manera que $\Phi(X) = X'$ se sigue[38] que toda relación

$$U(m, X) = (Q1k1)\ldots(Q_n k_n)\, S(m, k_1 \ldots k_n, X)$$

con Q_i cuantificador existencial o universal y S recursiva primitiva en X
es recursiva primitiva en $\Phi^n(X)$. Luego toda relación aritmética en X es recursiva primitiva en la función Φ^*.

Por tanto, la relación

$$R_{\Phi^*}(p|n, X)$$

$$con\ P = \{\, p : R_{\Phi^*}(p|n, X)\} = \Phi^*(n, X).$$

no es aritmética en *X* por diagonalización. En particular, si $X = \mathbb{N}$, obtenemos una relación, definible aplicando el principio de iteración, la cual no es aritmética[39], luego no definible a nivel 0, i.e., el de los naturales.

Por tanto, en el sistema de Weyl es posible la construcción de una tal relación. Como ya hicieron notar Feferman y Longo[40], aquí cabe observar una "incoherencia" en el sistema de Weyl.

---

36 Véase (Weyl, 1918, p. 19).

37 El operador (o función) *jump* de Turing intuitivamente asigna a cada problema de decisión *P* uno más difícil *P'*, el cual no es decidible por una máquina oráculo con un oráculo para *P*. Dado que el teorema de Post relaciona las jerarquías aritméticas y los grados de complejidad que el operador *jump* establece, sabemos, entre otras cosas, que, si una relación es aritmética en un conjunto, es recursivamente enumerable en él y, por tanto, recursiva primitiva en la función que lo enumera.

38 Véanse los detalles en (Feferman, 1998, p. 265).

39 Esto es así, pues se puede demostrar que el conjunto de las funciones recursivas primitivas es un subconjunto propio numerable de las funciones recursivas totales. Luego, considérese la función $h(x) = g(x,x) + 1$, con x natural y $g(x,x)$ primitiva recursiva. Según esta definición, h es primitiva recursiva. Pero bajo esta suposición llegamos a una contradicción, pues de ser así, h tiene que estar en la lista numerable de funciones recursivas primitivas, luego $h(x_0) = g(x_0, x_0) = g(x_0, x_0) + 1$. Para más detalles, véase (Rogers, 1967, p. 11). Luego, suponiendo que Φ^*, surgida de la aplicación del principio de iteración, es recursiva primitiva, llegamos a la contradicción de que no está en la lista generada por el principio.

40 Véase (Feferman, 1998, p. 265, nota 24).

Considerando la 'matriz de Richard', cada fila se corresponde con un conjunto definido de naturales, como hace Weyl. Lo que no se permite es *elegir* un elemento de un *conjunto-fila*, para formar sucesivamente un conjunto nuevo con aquellos elementos. La forma en que se definen los conjuntos de la matriz es completa, o decidible. Es decir, totalmente computables los predicados intensionales que se corresponden con los conjuntos.

En (Storer, 2010, p. 174) se compendia el asunto de forma clara: Si suponemos, siguiendo a Weyl, que podemos enumerar los conjuntos de naturales A_1, A_2... entonces existe una clase que no está en la lista. Esta "lista" de conjuntos de naturales se puede formalizar mediante un conjunto $\mathrm{B} = \{\ (n, m) : m \in A_n\ \}$ con $n,m \in \mathbb{N}$. Luego, mediante un argumento de diagonalización se observa que la lista es incompleta, pues el conjunto $\{n : n \notin A_n\ \}$ no está en ella, aunque se pueda probar que existe.

Sin embargo, Storer no considera que el propio sistema de Weyl admita la definición de una tal función à la Richard. Escribe en (Storer, 2010, p. 174):

> What Weyl does not discuss is the possibility of seeing Cantor's method of diagonalization as something which can be applied to the system from outside, as it were, to go from an enumeration of the classes definable in a formal system to a class which is not so definable. Weyl seems not to recognize that that class ought to exist; and that it has indeed been adequately defined, though of course not in terms of the principles of definition which the system permits.

Feferman (1998, p. 262) comenta la solución de Weyl de este modo: "In other words, there is a shift in the meaning of "definability" in the course of the argument for the paradox. However, Weyl does not face up to the fact that the enumeration of D [conjunto de los conjuntos definibles de naturales] *ought*[41] to be accepted as a legitimate definition once D is accepted, and that this is perfectly reasonable under a definitionist philosophy, even if it means that there is no one privileged concept of definability".

Nosotros, si bien estamos de acuerdo con el análisis y consecuencias de Ferferman sobre el principio de iteración, creemos que Weyl no puede admitir la enumeración de D, pues el procedimiento restringido lo "impide".

4. Numerabilidad y definibilidad. Conceptos extensionalmente definidos e indefinidamente extensibles

Weyl, se enfrenta en la paradoja a cómo poder articular los conceptos de *numerabilidad* y de *definibilidad* de forma que, aplicados al desarrollo del análisis, no den lugar a contradicciones: V. gr., la definición del supremo de un conjunto de reales (arbitrario). Además, en (Weyl, 1919, p. 85) y (Weyl, 1968, II, p. 525) se introducen las nociones: ser un concepto "extensionalmente definido" y de "contenido definido".

Uno de los objetivos de Weyl en *Das Kontinuum* es, tratar (o modificar) conceptos matemáticos (para él vagamente definidos) como, por ejemplo, el de conjunto y función[42].

Como ya vimos, para Weyl, la demostración de Cantor *tiene* sentido, aunque sólo sea relevante para la matemática. En esta demostración se *construye* un elemento que no está en la enumeración de los conjuntos de naturales mostrados. La construcción misma, ¿no es ya una definición? Esto es lo que Storer y Feferman objetan a Weyl.

Si observamos la paradoja de Richard, advertimos que, si bien el concepto *conjunto de números naturales* es para Weyl, por definición (entiéndase que se acepta la existencia de aquella totalidad como intuitivamente dada), extensionalmente definido, no es posible hacer que el concepto *número real definible* (o conjunto de naturales definible en general) lo sea. Es de esta pretensión de donde surge la paradoja, si es que la relación R[43] es definible/construible en el propio sistema.

Pero Weyl, según nuestro análisis, pretende hacer que la definibilidad se pueda tratar de forma extensionalmente definida. Al introducir su sistema, los conjuntos los define como objetos extensionales correlatos de propiedades intensionales, de modo que (sólo) existe una cantidad numerable de conjuntos.

Conceptos indefinidamente extensibles son aquellos para los que, considerando una totalidad como su referente, existe la posibilidad de extender la totalidad mediante una operación aplicada a sus objetos[44] de forma que la totalidad no está dada o está delimitada a priori.

Si consideramos colecciones indefinidamente extensibles, surge de forma natural, al analizar la paradoja de Richard, la pregunta de si la definibilidad es, asimismo, indefinidamente extensible. También podemos preguntarnos, si la consideración de ésta por parte de Weyl depende de una suerte de "normatividad", como cuando se eligen axiomas al introducir un sistema formal. Es decir, si Weyl la "restringe" haciéndola extensionalmente definida.

---

[41] Cursivas en el original.
[42] Véase (Weyl, 1918, p. 15; p. 23; p. 34).
[43] Véase su tratamiento más arriba.
[44] Véase (Dummett, 1993) y (Linnebo, 2018).

En *Das Kontinuum* parece ser este el caso, pues no se acepta la "definición externa"[45] que da lugar a la paradoja de Richard, ya que, en definitiva —al igual que Poincaré— no se acepta el concepto de (sub)conjunto infinito arbitrario de naturales.

Si el concepto de definibilidad *no* es indefinidamente extensible, si ha de ser cabal (tal y como, por otro lado, Richard explica[46]), y Weyl —como pensamos— pone de manifiesto este hecho en su análisis de la paradoja. Entendemos que en *Das Kontinuum* parece considerarse esto algo propio del sistema; de hecho, algo característico del mismo. Pues, para Weyl, sólo existe una cardinalidad numerable de *objetos* a definir de forma correcta, i.e., sin caer en contradicción o en un círculo vicioso.

Otra cuestión a destacar, es que ya vimos que Weyl considera, de forma general[47], sus principios de definición como un sistema que *no* es cerrado. Esto le faculta para afirmar que una función puede *no* ser continua en un determinado real, pero que si se amplían los principios puede ocurrir que sí lo sea.

Obtendríamos aquí una suerte de incoherencia si se pretendiese interpretar a Weyl en este punto afirmando: por un lado, el ajuste del concepto de definibilidad al de numerabilidad, haciendo que se aplique sólo a totalidades extensionalmente definidas. Y por otro, que los principios de definición (en teoría, aunque no en la práctica para el análisis desarrollado, como indica Weyl (1918, p.66)) se pueden ampliar de forma arbitraria.

Podemos plantearnos además las siguientes cuestiones: ¿Es el concepto *conjunto de reales weyliano* extensionalmente definido? ¿Es indefinidamente extensible? ¿Hasta qué punto son estos conceptos contrarios o, quizá, contradictorios?

Considerando la definición que da Weyl de concepto extensionalmente definido, creemos que un concepto *no* puede ser asimismo indefinidamente extensible. Weyl afirma que la pregunta: "*Is there* an object falling under *b* with the property A?" (Mancosu, 1997, p. 131)[48] tiene sentido. Es decir, el cuantificador existencial se refiere a un objeto por cuya *relación de pertenencia* se pregunta. Aunque el sentido de la pregunta no implica afirmar *a priori* nada sobre la existencia de una *operación* aplicada a la totalidad, la propiedad A —según Weyl— define a la totalidad existente y determinada, si el concepto ha de ser extensionalmente definido.

El concepto *conjunto de números reales*, es, por tanto —como creemos que se puede colegir de los textos aportados de Weyl— extensionalmente definido *en* el sistema weyliano; luego, no es indefinidamente extensible. Además, el conjunto es numerable.

De forma general, Weyl pretende con su sistema "controlar" el concepto definibilidad en su sistema de forma que no resulte paradójica la definición de objetos dentro del mismo. Y pretende hacer a este concepto depender del de numerabilidad, considerando al conjunto de naturales intuitivamente dado. Aquí observamos cierta normatividad.

5. Observaciones sobre el método de diagonalización de Cantor

Hemos visto que Weyl acepta la demostración sobre la no-numerabilidad de los reales basada en el método de diagonalización. Debemos aclarar, sin embargo, que esto no contradice el último párrafo del punto anterior. Weyl acepta la demostración de Cantor, aunque ésta no pueda llevarse a cabo en *su* sistema. Se podría, quizás, llamar a la demostración de Cantor el *tratamiento numeral* de la paradoja de Richard. Pues, en efecto, la demostración se basa —como dijimos— en la representación numeral[49] de los reales. Esta demostración es constructiva, sin embargo, creemos que existen puntos en la demostración que merecen la pena ser comentados adoptando la perspectiva de Weyl.

Por ejemplo, Poincaré —como afirma Clark en (Clark, 1993, p. 131)— admite la parte constructiva de la demostración de Cantor[50]. Sin embargo, no admite la existencia de un subconjunto arbitrario de naturales ¿No es esto cierto modo lo que (implícitamente) hace Weyl al aplicar el procedimiento restringido?

La, para nosotros, oscura expresión de Weyl: "*[F]ür die Mathematik allein...*" esconde una duda. Cuando la paradoja se trata desde el punto de vista conjuntista, es decir, definiendo los reales como conjuntos "especiales" de racionales (i.e., como cortaduras de Dedekind), es inevitable. Pero, sin embargo, si se trata al real como un objeto (por ejemplo, el objeto geométrico *punto* de una recta) con representación numeral, se puede admitir el resultado sobre la no-numerabilidad de los reales. No obstante, esto implica que, *ontológicamente*, los reales no podrían ser tratados como conjuntos arbitrarios. ¿No es quizá por esto por lo que Weyl no discute la demostración cantoriana?

[45] Nos referimos a la definición que proporciona el proceso de diagonalización.

[46] A nuestro juicio, Richard apunta acertadamente que no existe *tal* paradoja, pues supondría —considerando todos los reales definidos mediante definiciones finitas— que el nuevo real se definiría a partir de una "definición infinita"; algo que es absurdo. Así, creemos (frente a (Storer, 2010, p. 53)) que Richard muestra que la *definibilidad* no es indefinidamente extensible, pues, no estamos ante un *objeto* que legítimamente se pueda denominar *definición*.

[47] Si nos referimos al análisis, la lista de principios no es ampliable.

[48] "*Gibt es* einen unter b fallenden Gegenstand mit der Eigenschaft A?" (Weyl, 1968, vol. II, p. 525).

[49] Sea binaria o decimal, el tratamiento numeral es el mismo.

[50] "Clearly then Poincaré accepts the constructive part of Cantor's proof, but rejects the notion of arbitrary subset of ω as unintelligible" (Clark, 1993, p. 131).

Pues, si se admite que los reales son un *tipo* de conjuntos de racionales, la demostración de Cantor (aséptica, o agnóstica en cuanto a este hecho) juega un papel dentro del programa predicativista de Weyl, *sólo* para poner de relieve la circunstancia de que existen conjuntos que no son equipotentes con los naturales. Nos preguntamos, por tanto, hasta qué punto Weyl tiene que *admitir*, para poder si quiera *expresar* la diferencia de *su* análisis con el análisis clásico, la existencia de un conjunto como el de los reales clásico aunque no sea el continuo intuitivo. Algo que *no* forma parte de su sistema, pero que, en cierto modo, de forma externa, tiene que existir como referente[51].

6. Conclusiones

Entender cuál es el papel preciso que juega la paradoja de Richard en el predicativismo es algo fundamental. La paradoja nos coloca en la situación de tener que tomar partido o no por la propuesta de desarrollo de análisis weyliano. Con ello, se adopta un punto de vista particular sobre cómo fundamentar la matemática adecuadamente.

Este punto de vista no está exento de algunos problemas, en el sentido de que se muestra que la paradoja —más concretamente, el procedimiento de diagonalización aplicado a relaciones—, se cuela por el resquicio del principio de iteración. Sin embargo, Weyl resuelve la paradoja convenientemente, en aras de su propuesta definicionista.

Existe, a nuestro entender, cierto punto no del todo claro, que proviene del hecho de que si para Weyl, la demostración constructiva de Cantor de la no-equipotencia entre naturales y reales es admisible, a partir de la definición de los reales en el sistema de Weyl ésta no es posible, pues supone cuantificar sobre subconjuntos arbitrarios de naturales.

Hemos visto también cómo las nociones centrales sobre las que trata la paradoja de Richard: numerabilidad y definibilidad, son para Weyl -según interpretamos de los textos estudiados en el artículo- conceptos que no son indefinidamente extensibles sino extensionalmente definidos.

Sucede también esto con el concepto de conjunto de reales weyliano, cuya cardinalidad, además, ha de ser la de los naturales, esto es, un conjunto numerable.

7. Referencias bibliográficas

Cantor, G. (1890-1891): “Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre”, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, pp. 75-78.
Clark, P. (1993): “Logicism, the Continuum and Anti-Realism”, *Analysis*, Jul., Vol. 53, No. 3, pp. 129-141.
Clark, P. (1994): “Poincaré, Richard’s Paradox and Indefinite Extensibility”, *Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*. Volume 2: Symposia and Invited Papers, pp. 227- 235.
Dummett, M. (1993): “What is mathematics about?”, *The Seas of Language*, pp. 429-445.
Oxford University Press, New York
Feferman, S. (1998*): In the Light of Logic*, New York: Oxford University Press.
Linnebo, Ø. (2018): “Dummett on Indefinite Extensibility”, *Philosophical Issues*, 28, n. 1, pp. 196-220.
Mancosu, P. (1997): *From Brouwer to Hilbert: The debate on the foundations of mathematics in the 1920s*, New York, Oxford University Press.
Richard, J. (1905): “Les Principes des mathématiques et le problème des ensembles”*, Revue générale des Sciences pures et appliquées*, 12, p. 541.
Rogers, H. (1967): *Theory of reursive functions and effective computability*, New York: McGraw-Hill.
Storer, T. J., (2010): *A defence of predicativism as a philosophy of mathematics*, Diss. submitted for the degree of doctor of philosophy, Trinity College, University of Cambridge.
Weyl, H. (1918): *Das Kontinuum*, Leipzig: Veit & Comp.
Weyl, H. (1919): “Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis”. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung/Zeitschriftenband*, pp. 85-92.
Weyl, H. (1921): “Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik”, *Mathematische Zeitschrift*, 10, pp. 39-79.
Weyl, H. (1949): *Philosophy of mathematics and natural science*, Princeton: Princeton University Press.
Weyl, H. (1968): *Gesammelte Abhandlungen*, 4 vols., K. C. Chandrasekharan (Hrsg.), Berlin: Springer.
Weyl, H. (1987): *The continuum. A critical examination of the foundation of Analysis*, Trans. Stephen Pollard & Thomas Bole, New York: Dover Publications, Inc.
Zermelo, E. (1908): “Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre”, *Mathematische Annalen* 65, pp. 261-281.

[51] Esto lo fundamentamos de forma concreta, a partir de expresiones de Weyl como: “*ergossene Kontinuum*”. En (Weyl, 1921, p. 47) escribe: “Nunca fui de la opinión de que el continuo dado en la intuición fuera un sistema weyliano, antes bien que el análisis sólo necesita de tal sistema y que no tiene que preocuparse por el continuo vertido entre medias [*das dazwischen ergossene “Kontinuum”*]”.