REVISTA MATEMÁTICA COMPLUTENSE
Volumen 12, número 2: 1999
http://dx.doi.org/10.5209/rev_REMA.1999.v12.n2.17149

Topologie comparée d'une courbe polaire et de sa courbe discriminante.

Hélène MAUGENDRE

Résumé

Étant donné f un germe de fonction analytique à l'origine de $\mathbf{C}^2$, nous comparons la complexité topologique de la courbe discriminante de f à celle de sa courbe polaire.

Abstract

Let f be an analytic function germ at 0 in $\mathbf{C}^2$. We compare the topological complexity of the discriminant curve of f to the one of its polar curve.

1 Introduction

Soit f un germe de fonction analytique à l'origine de $\mathbf{C}^2$, et soit ℓ une forme linéaire sur $\mathbf{C}^2$, transverse à f et définie par $\ell(x,y) = ax + by$.

Définition. *Le* **germe polaire** *de f pour la direction ℓ, est le produit des composantes de l'expression $a(\partial f/\partial y) - b(\partial f/\partial x)$, qui ne divisent pas f. Nous le notons $\hat{\Gamma}$.*

La **courbe polaire** *de f pour la direction ℓ, notée Γ, est le lieu des zéros réduit de $\hat{\Gamma}$.*

Remarque. La courbe $\{\ell = 0\}$ n'est pas une branche de Γ.

Si f est à singularité isolée à l'origine, alors $\{a(\partial f/\partial y) - b(\partial f/\partial x) = 0\}$ et $\{f = 0\}$ n'ont pas de branche commune.

Si f est de la forme $f = g^r$ avec g germe lisse, alors Γ est vide.

Classification A.M.S.: 14B05, 32S05, 32S45, 57M25.
Servicio Publicaciones Univ. Complutense. Madrid, 1999.

Définition. *On appelle courbe discriminante de f pour la direction ℓ, l'image par l'application $\Phi = (\ell, f)$ de la courbe polaire Γ. On la note Δ.*

Le but de cet article est de comparer la complexité topologique de la courbe discriminante de f à celle de la courbe polaire de f pour une direction ℓ transverse à f.

2 Présentation des résultats

2.1 Premiers résultats

Définition. *La multiplicité à l'origine de la courbe $f^{-1}(0)$ est la valuation de f. On la note $m_0(f^{-1}(0))$.*

Désignons par (u, v) les coordonnées complexes de $\Phi((\mathbf{C}^2, 0))$. Comme $\{f = 0\}$ et Γ n'ont pas de branche commune, $\{v = 0\}$ n'est donc pas une branche de Δ. De plus, une branche δ de Δ est tangente à l'axe $v = 0$ (voir [L]). Par conséquent, il existe un développement de Puiseux de δ de la forme (voir [BK]) :

$$v = \sum_{k \in \mathbf{N}^*} b_k u^{\frac{k+m}{m}}$$

où $m \in \mathbf{N}^*$, $b_k \in \mathbf{C}$ et au moins un des b_k est non nul.

Remarque. La multiplicité à l'origine de δ est inférieure ou égale à m et divise m. Si m est minimum pour l'existence d'un tel développement de Puiseux, alors $m_0(\delta) = m$.

Étant donné une branche δ de Δ, nous notons γ une branche de Γ telle que $\Phi(\gamma) = \delta$.

Le premier résultat que nous obtenons est le suivant (voir aussi [T1] et [T2] pour une direction ℓ générale).

Proposition. *La multiplicité à l'origine de δ divise celle de γ.*

Corollaire 1. *Si γ est une branche lisse de Γ, alors δ est également lisse.*

2.2 Résolution minimale

Le théorème principal que nous démontrons s'obtient en considérant la résolution minimale de $f \cdot \ell \cdot \hat{\Gamma}$.

Soit π la résolution minimale d'un germe de fonction analytique g à l'origine de $\mathbf{C}^2$. L'arbre de la résolution minimale de g, noté $A(g^{-1}(0))$, se construit comme suit. Chaque composante irréductible E_S du diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ correspond à un sommet S de $A(g^{-1}(0))$. Lorsque deux composantes du diviseur exceptionnel s'intersectent on relie par une arête les sommets de $A(g^{-1}(0))$ qui les représentent. À chaque sommet S, on ajoute autant de flèches qu'il existe de composantes irréductibles de la transformée stricte, $\pi^{-1}(g^{-1}(0)\backslash\{0\})$, de $g^{-1}(0)$, qui intersectent E_S. Chaque flèche représente la transformée stricte d'une branche de $g^{-1}(0)$. Notons que le premier sommet de $A(g^{-1}(0))$ est le sommet représentant la composante du diviseur exceptionnel obtenue en éclatant l'origine dans $\mathbf{C}^2$.

Définition. *La* **géodésique** *d'une composante de $g^{-1}(0)$ est le chemin orienté qui joint le premier sommet de $A(g^{-1}(0))$ à la flèche qui représente cette composante.*

L'arbre $A(g^{-1}(0))$ est orienté avec pour origine le premier sommet.

Définition. *Un sommet S est un* **sommet de rupture** *si le nombre de flèches et d'arêtes qui le rencontrent est au moins égal à trois.*

Un **sommet de rupture caractéristique** *est un sommet de rupture qui provient d'une paire caractéristique de Puiseux d'au moins une branche de $g^{-1}(0)$.*

Tout autre sommet de rupture est appelé **sommet de rupture de coïncidence pure**. *(Voir [Ma2] et aussi [MW]).*

Considérons désormais l'arbre $A((f \cdot \ell \cdot \hat{\Gamma})^{-1}(0))$, noté $\hat{A}$.

Remarque. Il existe un plongement naturel de $A((f \cdot \ell)^{-1}(0)) := A$ dans $\hat{A}$ (voir [LMW2]).

On colore de rouge, respectivement jaune, chaque arête de $\hat{A}$ qui se trouve sur une géodésique de $(f \cdot \ell)^{-1}(0)$, respectivement $(\hat{\Gamma})^{-1}(0)$. Les autres parties de $\hat{A}$ (celles qui ne sont pas situées sur une géodésique) sont tracées en blanc.

Comme ℓ est transverse à f, la flèche qui représente la transformée stricte de $\ell^{-1}(0)$ s'accroche au premier sommet de $\hat{A}$.

Définition. *Soit S un sommet de rupture (rouge) de A. La* **zone de rupture** *de S est la réunion de S avec les composantes connexes de $A\backslash\{S\}$ qui ne possèdent aucun sommet de rupture.*

Soit S un sommet de rupture bicolore rouge-jaune de $\hat{A}$. La zone de rupture de S relative à $f \cdot \ell$ est la réunion de S avec les composantes connexes de $\hat{A}\backslash\{S\}$ qui partent de S par une arête unicolore (jaune, rouge ou blanche).

Définition. *On dit que la géodésique d'une branche γ de Γ sort par S si S est le dernier sommet bicolore de la géodésique de γ, i.e. la géodésique de γ devient unicolore jaune. (Ce sommet est forcément de rupture pour $\hat{A}$).*

Définition. *Soit S un sommet de rupture de $\hat{A}$. On appelle partie polaire associée à S et on note Γ_S la réunion des branches de Γ dont la géodésique sort par S. On note $\Delta_S = \Phi(\Gamma_S)$.*

D'après les résultats de [LMW2], le sommet S d'où la géodésique d'une branche γ de Γ sort est un sommet de rupture de A, et de plus, pour tout sommet de rupture S de A il existe une branche γ de Γ d'où la géodésique sort. Autrement dit, tout sommet de rupture S de $\hat{A}$ qui appartient au moins à une géodésique d'une composante de $(f \cdot \ell)^{-1}(0)$ est tel que Γ_S n'est pas vide.

Nous pouvons interpréter ce résultat en disant que les sommets de rupture de $\hat{A}$ qui ne sont pas des sommets de rupture de A sont unicolores jaune ; ou encore, tout sommet de rupture bicolore rouge-jaune dans $\hat{A}$ est un sommet de rupture de A. Autrement dit, pour tracer $\hat{A}$ à partir de A, on ne rajoute aucun sommet de rupture sur les géodésiques des branches de $(f \cdot \ell)^{-1}(0)$.

Théorème. *Soit S un sommet de rupture bicolore rouge-jaune de $\hat{A}$ et soit $N - 1$ le nombre de sommets de rupture caractéristiques qui précèdent S dans $\hat{A}$ (S non compris). Alors le nombre de sommets de rupture de $A(\Delta_S)$ est supérieur ou égal au nombre de sommets de rupture de $A(\Gamma_S)$ moins N.*

Remarque. Il est clair que les $N-1$ sommets de rupture caractéristiques qui précèdent S sont aussi bicolores rouge-jaune. Le nombre de sommets de rupture caractéristiques de $A(\Gamma_S)$ est supérieur ou égal à $N - 1$.

Corollaire 2. *Si Γ_S est irréductible alors le nombre de paires caractéristiques de Δ_S est supérieur ou égal au nombre de paires caractéristiques de Γ_S moins N.*

3 Démonstrations

3.1 Démonstration de la proposition et du corollaire 1

3.1.1 Quotients polaires

Avec les notations du paragraphe 2.1, soit δ une branche de Δ de développement de Puiseux $v = \sum_{k \in \mathbf{N}^*} b_k u^{\frac{k+m}{m}}$, où $m \in \mathbf{N}^*$, $b_k \in \mathbf{C}$ et au moins un des b_k est non nul.

Soit k_0 le plus petit élément de $\mathbf{N}^*$ tel que b_{k_0} soit non nul. On note $(k_0 + m)/m = p_\delta/q_\delta$ avec pgcd $(p_\delta, q_\delta) = 1$.

Définition. *L'ensemble des quotients polaires de f pour la direction ℓ est l'ensemble constitué des nombres rationnels p_δ/q_δ, pour δ branche de Δ.*

Notons $(g^{-1}(0), h^{-1}(0))_0$ la multiplicité d'intersection à l'origine entre les germes de courbes $g^{-1}(0)$ et $h^{-1}(0)$ (voir [C]). Soit δ une branche de Δ et soit γ une branche de Γ avec $\Phi(\gamma) = \delta$. D'après [LMW1] on a :

Proposition a. *Le quotient polaire p_δ/q_δ est égal à*

$$(f^{-1}(0), \gamma)_0/(\ell^{-1}(0), \gamma)_0.$$

Soit S un sommet de rupture de A et $C_S^{-1}(0)$ un germe de courbe réduit à l'origine de $\mathbf{C}^2$ dont la transformée stricte est une curvette de E_S, c'est-à-dire un germe de courbe lisse qui intersecte E_S tansversalement en un point lisse. D'après [LMW2] nous avons :

Proposition b. *L'ensemble des quotients polaires de f est égal à l'ensemble constitué des nombres rationnels*

$$(f^{-1}(0), C_S^{-1}(0))_0/(\ell^{-1}(0), C_S^{-1}(0))_0.$$

3.1.2 Démonstrations

Commençons par montrer que si ℓ est transverse à f alors ℓ est transverse à $\hat{\Gamma}$.

Comme ℓ est transverse à f, à l'aide de la proposition b qui précède, on vérifie facilement que tout quotient polaire de f est supérieur ou égal à $m_0(f^{-1}(0))$. S'il existait une composante $\hat{\gamma}$ de $\hat{\Gamma}$ tangente à ℓ, $\hat{\gamma}$ serait transverse à f et par conséquent, d'après la proposition a qui précède, on aurait un quotient polaire strictement plus petit que $m_0(f^{-1}(0))$, ce qui est impossible.

Par conséquent, comme ℓ est transverse à $\hat{\Gamma}$, pour toute composante $\hat{\gamma}$ de $\hat{\Gamma}$ on a $m_0(\gamma) = (\ell^{-1}(0), \gamma)_0$.

De plus la restriction de Φ à γ est un revêtement, d'ordre k_γ, sur δ (voir [LMW1]). On obtient ainsi $(\ell^{-1}(0), \gamma)_0 = k_\gamma(\{u = 0\}, \delta)_0$. Comme δ est tangente à $\{v = 0\}$ donc transverse à $\{u = 0\}$ on a :

$$m_0(\gamma) = (\ell^{-1}(0), \gamma)_0 = k_\gamma(\{u = 0\}, \delta)_0 = k_\gamma m_0(\delta),$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

■

Le corollaire 1 est une conséquence directe de la proposition qui précède. En effet, si γ est lisse, on a $1 \leq m_0(\delta) \leq m_0(\gamma) = 1$.

■

3.2 Démonstration du théorème et du corollaire 2

La démonstration du théorème utilise la théorie de Waldhausen. Dans le paragraphe qui suit avant de procéder à la démonstration du théorème, nous commençons par donner quelques rappels sur les variétés de Waldhausen.

3.2.1 Rappels sur les variétés de Waldhausen

Définition. *Une* **variété de Seifert** *est une variété différentiable, de dimension trois, compacte, connexe et orientée, munie d'un feuilletage* *en cercles différentiable et orienté, pour lequel toute feuille possède un voisinage tubulaire compact qui est une réunion de feuilles. (Voir [JS]).*

Soit g un germe de fonction analytique à l'origine de $\mathbf{C}^2$.

Notons S^3_ε la sphère centrée à l'origine de $\mathbf{C}^2$, de rayon ε suffisamment petit pour que le type topologique de l'entrelacs $K_g = g^{-1}(0) \cap S^3_\varepsilon$ ne dépende pas de ε. (Voir [Mi]).

La résolution des singularités des courbes planes implique l'existence d'une décomposition de S^3_ε en une réunion finie de variétés de Seifert telle que les composantes de K_g soient des feuilles de certaines de ces variétés. Une telle décomposition de S^3_ε s'appelle une décomposition de Waldhausen de S^3_ε pour K_g. Elle est dite minimale si le nombre de variétés de Seifert est minimal. Elle est alors unique à isotopie près. Par conséquent, la décomposition minimale de Waldhausen de S^3_ε pour K_g est un invariant du type topologique de g. (Voir [J], [JS], [Jo], [W]).

Remarque. Nous rappelons que dans un cadre plus général il existe des cas exceptionnels avec non unicité de décomposition minimale (voir [N] et [W]). Cependant, ces cas ne se présentent jamais dans le contexte particulier de décomposition minimale de Waldhausen de S^3_ε pour un entrelacs associé à un germe de courbe plane (en effet les opérations R0 à R8 de [N, p. 304-306] n'apparaissent jamais).

3.2.2 Variétés de Waldhausen et résolution minimale

Il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des sommets de rupture de $A(g^{-1}(0))$ et l'ensemble des variétés de Seifert de la décomposition minimale de Waldhausen de S^3_ε pour K_g. Ainsi, toute zone de rupture associée à un sommet de rupture S de $A(g^{-1}(0))$ correspond à une variété de Seifert V de la décomposition minimale de Waldhausen de S^3_ε pour K_g.

Or, au paragraphe 2.2 nous avons vu que tout sommet de rupture bicolore rouge-jaune de $\hat{A}$ est un sommet de rupture de A. Par conséquent, toute zone de rupture relative à $f \cdot \ell$ associée à un sommet de rupture bicolore rouge-jaune de $\hat{A}$ correspond à une zone de rupture de A. Cette zone de rupture de A fournit une variété de Seifert V de la décomposition minimale de Waldhausen de S^3_ε pour $K_{f.\ell}$.

Connaître le nombre de sommets de rupture de $A(\Gamma_S)$ succédant à S revient à établir la décomposition minimale de Waldhausen de V pour

$K_{\Gamma_S} = \Gamma_S \cap S^3_\varepsilon$.

Comparer le nombre de sommets de rupture de $A(\Gamma_S)$ et $A(\Delta_S) = A(\Phi(\Gamma_S))$ revient ainsi à déterminer le nombre de variétés de Seifert des décompositions minimales de Waldhausen de S^3_ε pour K_{Γ_S} et de la sphère $\mathcal{S}^3$ (de $\Phi(\mathbf{C}^2)$) pour $K_{\Delta_S} = \Delta_S \cap \mathcal{S}^3$.

Le moyen d'obtenir ces décompositions utilise les résultats de [LMW1] et [Ma1]. Rappelons-en ici succinctement le contenu.

Soient $\eta, \theta, \varepsilon, \omega$ des réels strictement positifs tels que $1 \gg \varepsilon \gg \theta \gg \eta \gg \omega > 0$. Notons D^4_ε la boule de bord S^3_ε.

Désignons par B la boule $B = \{(x,y) \in D^4_\varepsilon \ / \ | \ell(x,y) | \leq \theta\}$. Il existe un difféomorphisme à coins de $\Sigma = (f^{-1}(S^1_\eta) \cap B) \cup (f^{-1}(D^2_\eta) \cap \partial B)$ (où ∂B désigne le bord de B) sur la sphère S^3_ε. (Voir [LMW1]). Comme nous l'avions déjà constaté dans [Ma1], il est plus facile de travailler avec Σ plutôt qu'avec S^3_ε. C'est pourquoi, au lieu de V, nous considérons $\tilde{V}$ une variété de Seifert de la décomposition minimale de Waldhausen de Σ pour $\tilde{K}_{f\cdot\ell} = \Sigma \cap (f \cdot \ell)^{-1}(0)$, $\tilde{V}$ isotope à V. Le complémentaire dans Σ d'un petit voisinage tubulaire ouvert de $\tilde{K}_{f\cdot\ell}$ est noté $\tilde{M}_{f\cdot\ell}$.

Pour un bon choix de η, θ et ε (voir [Ma1]), la restriction de Φ à Σ est un revêtement ramifié qui admet $\Gamma \cap \Sigma$ et les branches de $f^{-1}(0)$ non réduites pour lieu de ramification et $\Delta \cap [(D^2_\theta \times S^1_\eta) \cup (S^1_\theta \times D^2_\eta)] = \Delta \cap (D^2_\theta \times S^1_\eta)$, union $S^1_\theta \times \{0\}$ (s'il existe des branches de $f^{-1}(0)$ non réduites), pour valeurs de ramification.

Pour une description plus approfondie de tels revêtements voir [S].

En fait, nous allons établir la décomposition minimale de Waldhausen de $\tilde{M}_{f\cdot\ell}$. En effet, la décomposition minimale de Waldhausen de Σ pour $\tilde{K}_{f\cdot\ell}$ s'obtient facilement à partir de celle de $\tilde{M}_{f\cdot\ell}$ en prolongeant le feuilletage induit sur le bord de chaque tore, composante connexe du voisinage tubulaire ouvert de $\tilde{K}_{f\cdot\ell}$, au tore tout entier. Pour établir la décomposition minimale de Waldhausen de $\tilde{M}_{f\cdot\ell}$, nous choisissons un réel ω suffisamment petit pour que $(D^2_\omega \times S^1_\eta) \cap \Delta = \emptyset$ (un tel ω existe car $\{0\} \times S^1_\eta$ n'appartient pas à $\Delta \cap (D^2_\theta \times S^1_\eta)$). Un voisinage tubulaire ouvert de $\tilde{K}_{f\cdot\ell}$ est alors :

$$U(\tilde{K}_{f\cdot\ell}) = \Phi^{-1}(S^1_\theta \times \overset{\circ}{D^2_\eta}) \cup \Phi^{-1}(\overset{\circ}{D^2_\omega} \times S^1_\eta).$$

Dès lors la restriction de Φ à $\Sigma \backslash U(\tilde{K}_{f\cdot\ell})$ est un revêtement ramifié sur

$(D^2_\theta \times S^1_\eta)\backslash(\overset{\circ}{D^2_\omega} \times S^1_\eta)$ qui admet

$$\Gamma \cap \Sigma = \Gamma \cap (\Sigma \backslash U(\tilde{K}_{f.\ell}))$$

pour lieu de ramification et

$$\Delta \cap (D^2_\theta \times S^1_\eta) = \Delta \cap ((D^2_\theta \times S^1_\eta)\backslash(\overset{\circ}{D^2_\omega} \times S^1_\eta))$$

pour valeurs de ramification.

Par conséquent, si nous notons $\tilde{W}$ la variété de la décomposition minimale de Waldhausen de $\tilde{M}_{f.\ell}$, qui donne $\tilde{V}$ après avoir rebouché les tores de $U(\tilde{K}_{f.\ell})$, la restriction de Φ à $\tilde{W}$ est un revêtement ramifié de $\tilde{W}$ sur une zone polaire Z_i – laquelle est un tore épaissi d'âme $\{0\} \times S^1_\eta$ (voir [LMW1] ou [Ma1]) – qui admet $\tilde{K}_{\Gamma_S} = \tilde{W} \cap \Gamma_S$ pour lieu de ramification et $\tilde{K}_{\Delta_S} = \Delta_S \cap Z_i$ pour valeurs de ramification.

Dans [Ma1] nous avons décrit la construction de la décomposition de Waldhausen de $\tilde{M}_{f.\ell}$ qui admet les composantes de $\Gamma \cap \Sigma$ pour feuilles, à partir de la décomposition minimale de Waldhausen de $(D^2_\theta \times S^1_\eta)\backslash(\overset{\circ}{D^2_\omega} \times S^1_\eta)$ relative à $\Delta \cap (D^2_\theta \times S^1_\eta)$.

Par la même méthode nous pouvons, en particulier, décrire la décomposition de Waldhausen de $\tilde{W}$ pour $\tilde{K}_{\Gamma_S}$, à partir de la décomposition minimale de Waldhausen de Z_i pour $\tilde{K}_{\Delta_S}$.

Remarque. *(i)* Les $N-1$ premiers sommets de rupture de $A(\Gamma_S)$, lesquels sont caractéristiques (paragraphe 2.2) correspondent à des variétés de Seifert $\tilde{W}_k$ de la décomposition minimale de Waldhausen de $\Sigma \backslash U(\tilde{K}_{f.\ell})$ pour $\tilde{K}_{\Gamma_S}$ qui sont telles que $\Phi(\tilde{W}_k) = Z_k$ où $k < i$. (Voir [LMW1] et [LMW2]). Par conséquent ces $N-1$ sommets n'interviennent pas dans la décomposition minimale de Waldhausen de Z_i pour $\tilde{K}_{\Delta_S}$.

(ii) En outre le sommet S, n'est pas forcément associé à un sommet de rupture de $A(\Delta_S)$. Par construction, une condition nécessaire pour que S ne soit pas associé à un sommet de rupture de $A(\Delta_S)$ est que le quotient polaire associé à S soit un entier. En effet, sinon, comme le quotient polaire associé à S correspond au premier exposant des développements de Puiseux de chaque branche δ de Δ_S, cet exposant est alors un exposant caractéristique de Puiseux et fournit donc un sommet de rupture caractéristique de $A(\Delta_S)$. La condition devient nécessaire

et suffisante si, de plus, ce quotient polaire n'est pas un exposant de coïncidence entre deux branches δ de Δ_S, car alors il ne correspond pas non plus à un sommet de rupture de coïncidence pure.

Démonstration du théorème

La décomposition minimale de Waldhausen de Z_i pour $\tilde{K}_{\Delta_S}$ s'établit uniquement avec la topologie de Δ_S. En particulier, lorsque l'on a considéré tous les sommets de rupture de $A(\Delta_S)$, i.e. que l'on a construit toutes les variétés de Seifert qui leur sont associées, alors pour chaque branche δ de Δ_S, on peut trouver dans Z_i un voisinage tubulaire T de $\delta \cap Z_i$, lequel est constitué d'une réunion de feuilles de la décomposition minimale de Waldhausen de Z_i pour $\tilde{K}_{\Delta_S}$. Ce voisinage tubulaire est le fibré normal de $\delta \cap Z_i$. Lorsqu'on le relève par l'application Φ, chacune des composantes connexes obtenues est (par définition de Φ) une réunion de feuilles de la décomposition de Waldhausen de $\tilde{W}$ pour $\tilde{K}_{\Gamma_S}$. Ceci est vrai en particulier pour la composante connexe qui contient $\gamma \cap \tilde{W}$ (où $\Phi(\gamma) = \delta$) laquelle est le fibré normal de $\gamma \cap \tilde{W}$. À ce stade on a donc obtenu une décomposition de Waldhausen de Σ pour $\tilde{K}_{\Gamma_S}$, non nécessairement minimale, mais à partir de laquelle on peut établir la minimale. Par conséquent tous les sommets de rupture de $A(\Gamma_S)$ ont été considérés et leur nombre est bien inférieur ou égal au nombre de sommets de rupture de $A(\Delta_S)$ plus N.

■

Démonstration du corollaire 2

Si Γ_S est irréductible, alors Δ_S l'est aussi. Par conséquent $A(\Gamma_S)$ et $A(\Delta_S)$ ne possèdent aucun sommet de rupture de coïncidence pure (voir [Ma2]). Ainsi, chaque sommet de rupture de $A(\Gamma_S)$ et de $A(\Delta_S)$ correspond à une paire caractéristique de Puiseux ; d'où le corollaire 2.

■

Remerciements.

Je remercie Françoise Michel et Claude Weber pour leurs précieux conseils.

Bibliographie

[BK] E. BRIESKORN et H. KNÖRRER, *Plane Algebraic Curves*, Birkhauser Verlag, 1986.

[C] A. CHENCINER, *Courbes algébriques planes*, Publications mathématiques de l'Université Paris 7, 1978.

[J] W. JACO, *Lectures on Three-Manifold Topology*, A.M.S., 43 (1980).

[JS] W. JACO et P. SHALEN, *Seifert Fibered Spaces in Three-Manifolds*, A.M.S., Memoirs, n^0 220, 1979.

[Jo] K. JOHANNSON, *Homotopy equivalence of three-manifolds with boundaries*, Lect. Notes Math., 761 (1979) New York Berlin Heidelberg, Springer.

[L] D.T. LÊ, *Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe*, Ann. Inst. Fourier 23, fasc. 4, 1973, p. 261-270.

[LMW1] D.T. LÊ, F. MICHEL, C. WEBER, *Courbes polaires et topologie des courbes planes*, Ann.Scien.E.N.S., 4ième série, T 24, 1991, p.141-169.

[LMW2] D.T. LÊ, F. MICHEL, C. WEBER, *Sur le comportement des courbes polaires associées aux germes de courbes planes*, Compositio Mathematica 72, 1989, p. 87-113.

[Ma1] H. MAUGENDRE, *Discriminant of a germ* $\Phi : (\mathbf{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$ *and Seifert fibered manifolds*, Journal of the London Mathematical Society, Vol. 59, part 1, 1999, p. 207-226.

[Ma2] H. MAUGENDRE, *Discriminant d'un germe* $\Phi : (\mathbf{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$ *et résolution minimale de* $f \cdot g$, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, vol. VII, n^0 3, 1998, p. 497-525.

[MW] F. MICHEL, C. WEBER, *Topologie des germes de courbes planes à plusieurs branches*, Prépublication de l'Université de Genève, 1985.

[Mi] J. MILNOR, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Princeton University Press, 1968.

[N] W. NEUMANN, *A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves*, Transactions of the A.M.S. , vol. 268, n^0 2, 1981, 299-344.

[S] C. SAFONT, *Coverings of S^3_ϵ branched over iterated torus links*, Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid, vol. 3, n^0 2 y 3, 1990.

[T1] B. TEISSIER, *Singularities, Arcata 1974*, Proc. A.M.S. Symp., n^0 29.

[T2] B. TEISSIER, *Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces*, Inv. Math., vol. 40, 1977, p. 267-292.

[W] F. WALDHAUSEN, *Eine klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Invent. Math., 3 (1967) 308-333 and Inv. Math., 4 (1967) 87-117.

Hélène Maugendre
Centre de Mathématiques et d'Informatique
39 rue F. Joliot-Curie
13 453 MARSEILLE Cedex 13
e-mail: `maugendr@gyptis.univ-mrs.fr`

Recibido: 8 de Febrero de 1999
Revisado: 27 de Abril de 1999