REVISTA MATEMATICA de la
Universidad Complutense de Madrid
Volumen 5, números 2 y 3; 1992.
http://dx.doi.org/10.5209/rev_REMA.1992.v5.n2.17922

Contrôlabilité Exacte pour des Systèmes à Mémoire

JINHAI YAN

ABSTRACT. Combining HUM and Compactness arguments the exact controllability is proved for time dependent smooth Kernels.

Soit Ω un domaine borné dans $\mathfrak{R}^n$ à frontière régulière Γ. On considère le système suivant

$$(1)\qquad \begin{aligned} & y'' - \Delta y - \int_0^t K(t,\sigma)\, y(\sigma)\, d\sigma = 0 && \text{dans } Q = \Omega\times(0,T) \\ & y = \begin{cases} v \text{ (contrôle)} & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sur } \Sigma\setminus\Sigma(x^o) \end{cases} \\ & y(0) = y^0,\ y'(0) = y^1 && \text{sur } \Omega\times\{0\} \end{aligned}$$

Où $\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0)\times(0,T)$ avec $\Gamma(x^0) = \{x\in\Gamma\colon (x-x^0)\cdot\nu(x) > 0\}$, x^0 étant un point quelconque de $\mathfrak{R}^n$, et $\Sigma = \Gamma\times(0,T)$.

Par $\nu(x)$ on désigne le vecteur normal unitaire extérieur à Ω au point $x\in\Gamma$ et par $\circ$ le produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$. Dans (1) ′désigne la dérivée par rapport au temps.

Pour tout $\{y^0, y^1\}\in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$, on cherche un contrôle $v\in L^2(\Sigma(x^0))$, tel que

$$(2)\qquad y(T) = y'(T) = 0 \qquad \text{sur } \Omega\times\{T\}$$

1991 Mathematics Subject Classification: 35B30, 49J20.
Editorial Complutense. Madrid, 1992.

Si on peut le faire, alors, on dit que le système (1) est exactement contrôlable.

On fait sur K les hypothèses siuvantes:

$$
\begin{aligned}
& K(t,\sigma)\in L^1((0,T)\times(0,T)) \\
(3)\qquad & \frac{\partial K(t,\sigma)}{\partial\sigma}\in L^1((0,T)\times(0,T)) \\
& K(t,t)\in L^1((0,T))
\end{aligned}
$$

et on désign $T(x^0)=2\max_{x\in\bar\Omega}|x-x^0|$.

On a le résultat principal suivant:

Théorème 1.

Si $T>T(x^0)$ et K satisfait les hypothèses (3), alors le système (1) est exactement contrôlable. □

Démonstration

On procède en trois étapes.

Etape 1

D'abord, on observe que y s'écrit comme

(4) $\qquad y=y_0+z \qquad$ dans Q

où y_0 et z satisfont

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
& y_0''-\Delta y_0-\int_0^t K(t,\sigma)y_0(\sigma)\,d\sigma=0 && \text{dans } Q \\
& y_0=0 && \text{sur } \Sigma \\
& y_0(0)=y^0,\ y_0'(0)=y^1 && \text{sur } \Omega\times\{0\}
\end{aligned}
$$

$$
z''-\Delta z-\int_0^t K(t,\sigma)z(\sigma)\,d\sigma=0 \qquad \text{dans } Q
$$

$$(6)\qquad z=\begin{cases} v \text{ (contrôle)} & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sur } \Sigma\backslash\Sigma(x^0) \end{cases}$$

$$z(0)=0,\ z'(0)=0 \qquad \text{sur } \Omega\times\{0\}$$

La condition (2) équivaut à

$$(7)\qquad z(T)=-y_0(T),\ z'(T)=-y_0'(T) \qquad \text{sur } \Omega\times\{T\},$$

Donc, on peut également chercher un contrôle $v\in L^2(\Sigma(x^0))$, pour le système (6) tel que

$$(8)\qquad z(T)=z^0,\ z'(T)=z^1 \qquad \text{sur } \Omega\times\{T\},$$

pour $\{z^0, z^1\}\in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ quelconque.

On va employer la méthode HUM. On résout d'abord, pour tout $\{\varphi^0, \varphi^1\}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ le problème suivant

$$(9)\qquad \begin{aligned} &\varphi''-\Delta\varphi-\int_t^T K(\sigma,t)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma=0 && \text{dans } Q \\ &\varphi=0 && \text{sur } \Sigma \\ &\varphi(T)=\varphi^0,\ \varphi'(T)=\varphi^1 && \text{sur } \Omega\times\{T\} \end{aligned}$$

Ensuite, on résout

$$\psi''-\Delta\psi-\int_0^t K(t,\sigma)\,\psi(\sigma)\,d\sigma=0 \qquad \text{dans } Q$$

$$(10)\qquad \psi=\begin{cases} \partial\psi/\partial\nu & \text{sur } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{sur } \Sigma\backslash\Sigma(x^0) \end{cases}$$

$$\psi(0)=0,\ \psi'(0)=0 \qquad \text{sur } \Omega\times\{0\}$$

On sait que (voir J. L. Lions [1], Tome 1, Chapitre I, Th.4.2)

$$(11)\qquad \begin{aligned} &\varphi\in C^0(0,T;\ H_0^1(\Omega))\cap C^1(0,T;\ L^2(\Omega)) \\ &\psi\in C^0(0,T;\ L^2(\Omega))\cap C^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \end{aligned}$$

et que de plus

$$(12)\qquad \begin{aligned} &\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\leq C(\|\varphi^0\|^2_{H_0^1(\Omega)}+|\varphi^1|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\|\psi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap W^{1,\infty}(0,T;H^{-1}(\Omega))}\\
(13)\qquad &\leq C\|\partial\varphi/\partial\nu\|_{L^2(\Sigma(x^0))}\\
&\leq C(\|\varphi^0\|^2_{H_0^1(\Omega)}+|\varphi^1|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}
\end{aligned}
$$

Ainsi, on peut définir un opérateur Λ_K:

$$
\begin{aligned}
(14)\qquad &\Lambda_K\colon H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)\\
&\quad\{\varphi^0,\varphi^1\}\longrightarrow\{-\psi'(T),\psi(T)\}.
\end{aligned}
$$

Cet opérateur est linéaire et continu.

On sait (voir J. L. Lions [1]) que si $T>T(x^0)$, alors, $\Lambda(=\Lambda_0)$ avec $K=0$ est un isomorphisme, on va démontrer que pour ce même T, $\Lambda_K(K\neq 0)$ est aussi un isomorphisme. On va utiliser la méthode qui est introduite par E. Zuazua dans l'Appendice 1 de J. L. Lions [1].

Etape 2

Lemme 1

Si $T>T(x^0)$, alors

(15) *ker Λ_K est de dimension fine.* □

Démonstration

Comme Λ est un isomorphisme, on peut voir que

$$(16)\qquad \ker\Lambda_K=\ker\Lambda^{-1}\circ\Lambda_K$$

mais

$$(17)\qquad \Lambda^{-1}\circ\Lambda_K=1-\Lambda^{-1}\circ(\Lambda-\Lambda_K)$$

Par l'alternative de Fredholm, il suffit alors de vérifier que $\Lambda-\Lambda_K$ est compact.

Si φ_0 vérifie le système

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
&\varphi_0''-\Delta\varphi_0=0 &&\text{dans } Q\\
&\varphi_0=0 &&\text{sur } \Sigma\\
&\varphi_0(T)=\varphi^0,\ \varphi_0'(T)=\varphi^1 &&\text{sur } \Omega\times\{T\}
\end{aligned}
$$

on a

$$(19)\qquad \begin{aligned} &(\varphi_0-\varphi)''-\Delta(\varphi_0-\varphi)=-\int_t^T K(\sigma,t)\varphi(\sigma)\,d\sigma && \text{dans } Q\\ &\varphi_0-\varphi=0 && \text{sur } \Sigma\\ &(\varphi_0-\varphi)(T)=0,\ (\varphi_0-\varphi)'(T)=0 && \text{sur } \Omega\times\{T\} \end{aligned}$$

Il faut alors que l'application

$$(20)\qquad \begin{aligned} &\{\alpha^0,\alpha^1\}\to\partial(\alpha_0-\alpha)/_{\partial_\nu}|_{\Sigma(x^0)}\\ &H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\to L^2(\Sigma(x^0)) \end{aligned}$$

soit compacte. Mais, on sait que (voir J. L. Lions [1], Tome 1, Chap. I, Th. 4.1).

$$(21)\qquad \left\|\frac{\partial(\varphi_0-\varphi)}{\partial v}\right\|_{L^2(\Sigma)}\leq C\left\|\int_t^T K(\sigma,t)\varphi(\sigma)\,d\sigma\right\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}$$

D'après (3) et (12) on a

$$(22)\qquad \begin{aligned} &\int_t^T K(\sigma,t)\varphi(\sigma)\,d\sigma\in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))\\ &\partial/\partial t\left(\int_t^T K(\sigma,t)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma\right)\in L^1(0,T;\ L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

avec continuité.

Par (22) et (11) on a

$$(23)\qquad \varphi_0-\varphi\in C^0(0,T;\ H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)),$$

et, donc de (21) et de (22) il résulte que

$$(24)\qquad \partial((\varphi_0-\varphi)')/\partial v\in L^2(0,T;\ L^2(\Gamma)),$$

Ainsi, de (21), (23) et (24) on obtient

$$(25)\qquad \partial(\varphi_0-\varphi)/\partial v\in L^\infty(0,T;\ H^{1/2}(\Gamma))\cap W^{1,2}(0,T;\ L^2(\Gamma)),$$

Par ailleurs l'injection

$$(26)\qquad L^\infty(0,T;H^{1/2}(\Gamma))\cap W^{1,2}(0,T;L^2(\Gamma))\ L^2(0,T;\ L^2(\Gamma))=L^2(\Sigma)$$

est compacte. Ceci implique la compacité de l'application (20). □

Lemme 2

Si $T > T(x^0)$, alors

(27) $\quad ker\ \Lambda_K = \{0\}$.

Donc, par l'alternative de Fredholm, Λ_K est un isomorphisme. □

Démonstration

On désigne

(28) $\quad Y = \{\varphi | \varphi$ est une solution de (9) pour un certain $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ telle que $\partial\varphi/\partial v = 0 \quad$ sur $\Sigma(x^0)\}$

Alors, (24) est équivalente à

(29) $\quad Y = \{0\}$.

Par le Lemme 1, on sait que

(30) $\quad Y$ est de dimension finie

Si on a

(31) $\quad \varphi \in Y$

alors

(32) $\quad \{\varphi^0, \varphi^1\} \in \ker \Lambda_K$,

Donc

(33)
$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial v}|_{\Sigma(x^0)} = \frac{\partial(\varphi_0 - \varphi)}{\partial v}|_{\Sigma(x^0)} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}|_{\Sigma(x^0)} = \frac{\partial(\varphi_0 - \varphi)}{\partial v}|_{\Sigma(x^0)}$$

Mais, $\varphi_0 - \varphi$ est la solution de (19) acvec un membre de droite tel que

(34)
$$-\int_t^T K(\sigma, t)\varphi(\sigma)\, d\sigma \in W^{1,1}(0, T;\ H_0^1(\Omega))$$

En appliquant des résultats de J. L. Lions [1] (Tome 1, Chap. I, Th. 4.2).

(35) $\quad \partial(\varphi_0 - \varphi)/\partial v \in H^2(0, T;\ L^2(\Sigma))$,

donc

(36) $\partial\varphi_0/\partial v | \Sigma(x^0) \in H^2(0, T;\ L^2(\Sigma(x^0)))$

Ainsi, par l'inégalité inverse

$$\|\varphi^0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + |\varphi^1|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_{\Sigma(x^0)} \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial v}\right|^2 d\Sigma$$

valable pour les solutions de (18) lorsque $T > T(x^0)$ (J. L. Lions [1], Tome 1, Chap. I, Th. 5.1) on obtient

(37) $\varphi_0 \in C^2(0, T;\ H_0^1(\Omega)) \cap C^3(0,\ T;\ L^2(\Omega))$

Ceci conduit, grâce à (34), à

(38) $\varphi = \varphi_0 - (\varphi_0 - \varphi) \in C^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^3(0, T; L^2(\Omega))$

Comme φ est la solution de (9), on déduit de (38) que

(39) $-\Delta\varphi \in C^0(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$

Maintenant, il est facile de vérifier que

(40) $-\Delta\varphi \in Y.$

Vayons maintenent que $Y = \{0\}$. En effet, si

(41) $Y \neq \{0\}$,

comme l'application

(42) $-\Delta\colon\ Y \to Y$

est symétrique et positive, alors il existe un $\lambda \geq 0$ et un $\varphi \in Y$, $\varphi \neq 0$, tels que

(43) $-\Delta\varphi = \lambda\varphi$ dans Q

Mais, comme $\varphi \in Y$, on a

(44)
$\varphi = 0$ sur Σ
$\partial\varphi/\partial v = 0$ sur $\Sigma(x^0)$

Par (43) et (44) et grâce au Théorème d'unicité (voir J. L. Lions, Tome 1, Chap. I, Corollaire 5.1) on a

(45) $\varphi \equiv 0$ dans Q

ce qui est en contradiction avec (41). □

Corollaire (Théorème d'unicité)

Soit $T > T(x^0)$ et φ la solution de (9). Si

(46) $\partial\varphi/\partial\nu = 0$ *sur* $\Sigma(x^0)$

alors

(47) $\varphi \equiv 0$ *dans* Q. □

Etape 3

On retourne maintenant au problème du début. Pour tout $\{-z^1, z^0\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, on peut trouver un $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, tel que

(48) $\Lambda_K\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{-z^1, z^0\}$

On prend dans (6)

(49) $v = \partial\varphi/\partial\nu$ *sur* $\Sigma(x0)$

alors

(50) $z \equiv \psi$ dans Q

Donc, on a (8)

Si on prend

(51) $z^0 = y_0(T),\ z^1 = -y_0'(T)$

alors, $y = y_0 + z$ satisfait (1) et (2) et ainsi la démonstration du Théorème 1 est achevée. □

Reference bibliographique

[1] J. L. LIONS: *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués.* Tome 1, Contrôlabilité exacte. Tome 2, Peturbations. Masson, Paris, Collection R.M.A. Vol. 8 et 9 (1988).

[2] J. L. LIONS: *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems.* John Von Neumann Lecture, Boston 1986. SIAM Review, March 1988.

Institute de Mathématiques
Université of Fudan
200433 Shangai
R. P. Chine

Recibido: 11 de marzo de 1991
Revisado: 27 de mayo de 1922