REVISTA MATEMATICA de la
Universidad Complutense de Madrid
Volumen 5, números 2 y 3; 1992.
http://dx.doi.org/10.5209/rev_REMA.1992.v5.n2.17879

El Teorema de la Gráfica Cerrada con Condiciones Débiles de Continuidad

J. C. FERRANDO

ABSTRACT. In this paper we develop a duality theory of the closed graph theorem with weak continuity conditions, in order to obtain some permanence and maximality properties concerning the domain and range classes.

Todos los espacios que se consideran son localmente convexos de Hausdorff sobre el cuerpo de los reales o de los complejos.

En lo que sigue desarrollamos una teoría de dualidad para el teorema de la gráfica cerrada con objeto de obtener algunos resultados de carácter general, en la línea de los que aparecen en [8] o en el §6 de [9].

La sección primera se ocupa de la construcción de las clases de partida y de llegada asociadas a una clase de espacios con topologías débiles Σ, tomando como clase de partida la de todos los espacios cuyos duales débiles pertenezcan a la clase Σ dada, así como del estudio de algunas de sus propiedades que, como cabe esperar, dependen de las propiedades de la clase Σ considerada. Una serie de ejemplos particularizan al final de la sección la teoría desarrollada a algunas de las clases maximales usuales para el teorema de la gráfica cerrada.

En la sección segunda se establece una teoría que es en cierto modo simétrica de la desarrollada en la sección primera. Aquí es la clase de llegada la que se toma como la de todos los espacios cuyos duales débiles pertenezcan a la clase Σ dada.

1991 Mathematics Subject Classification: 46A07.
Editorial Complutense. Madrid, 1992.

1. CLASES DE LLEGADA PARA EL TEOREMA DE LA GRAFICA CERRADA CON CONDICIONES DE CONTINUIDAD DEBIL

Sea Σ una clase de espacios con las topologías débiles.

Definición 1. *Diremos que un espacio E pertenece a la clase* $A(\Sigma)$ *si* $E'(\sigma(E', E)) \in \Sigma$.

Si $E \in A(\Sigma)$, $E(\tau) \in A(\Sigma)$ para cualquier otra topología localmente convexa τ sobre E compatible con el par (E, E').

Definición 2. *Diremos que un espacio F es de la clase* $B(\Sigma)$ *si dado un subespacio vectorial G de* F^* *tal que* $G \cap F'$ *es denso en* $F'(\sigma(F', F))$ *y tal que* $G(\sigma(G, F)) \in \Sigma$, *entonces G contiene a F'.*

Nuevamente, si $F \in B(\Sigma)$ y τ es otra topología localmente convexa sobre F compatible con (F, F'), entonces $F(\tau) \in B(\Sigma)$.

Proposición 1. *Sea E un espacio vectorial y sean* τ *y* ρ *dos topologías localmente convexas sobre E, tales que* $E(\tau) \in A(\Sigma)$ *y* $E(\rho) \in B(\Sigma)$. *Si la aplicación identidad i de* $E(\tau)$ *sobre* $E(\rho)$ *tiene la gráfica cerrada, entonces i es débilmente continua.*

Demostración. Sea E' el dual de $E(\tau)$, G el dual de $E(\rho)$ y E^* el dual algebráico de E. Si $j: G \to E^*$ denota la traspuesta de i, entonces $E' \cap G = j^{-1}(E')$ es denso en $G(\sigma(G, E))$ por tener i la gráfica cerrada, (3, p. 114). Ahora, como $G(\sigma(G, E)) \in \Sigma$ y $E(\rho) \in B(\Sigma)$, entonces E' contiene a G. Así, pues, $j(G) \subset E'$ y, por consiguiente, i es débilmente continua.

Proposición 2. *Si E no pertenece a* $B(\Sigma)$, *entonces existe una topologia de Mackey* τ *sobre E tal que* $E(\tau) \in A(\Sigma)$ *y la identidad* $i: E(\tau) \to E$ *tiene la gráfica cerrada y no es continua.*

Demostración. Si E no pertenece a la clase $B(\Sigma)$, existe un subespacio G de E^* tal que $G \cap E'$ es denso en $E'(\sigma(E', E))$, $G(\sigma(G, E)) \in \Sigma$, pero G no contiene a E'. Ahora, denotando por $\mu(E, G)$ la topología de Mackey del par dual (E, G), $E(\mu(E, G)) \in A(\Sigma)$, ya que $G(\sigma(G, E)) \in \Sigma$. Por otro lado, la identidad $i: E(\mu(E, G)) \to E$ tiene la gráfica cerrada, pues si j denota su traspuesta, entonces $j^{-1}(G) = G \cap E'$, que es un subespacio denso de $E'(\sigma(E', E))$. Pero i no es débilmente continua, ya que $j(E')$ no está contenido en G.

Definición 3. *Diremos que una clase Σ de espacios con las topologías débiles es normal si contiene a los espacios débilmente completos y es estable para la formación de subespacios cerrados y productos finitos.*

Teorema 1. *Sea Σ normal y sean $E \in A(\Sigma)$ y $F \in B(\Sigma)$. Si f es una aplicación lineal de E en F con gráfica cerrada, entonces f es débilmente continua.*

Demostración. Sea H un complemento algebráico de $f(E)$ en F, provisto con la topología localmente convexa más fina. La aplicación lineal g de $E \times H$ sobre F definida como $g(x, y) = f(x) + y$ para cada $(x, y) \in E \times H$, tiene la gráfica cerrada. Puesto que $E'(\sigma(E', E)) \in \Sigma$ y $H^*(\sigma(H^*, H)) \in \Sigma$, entonces $(E \times H)'(\sigma((E \times H)', E \times H))$ pertenece a Σ. Por otro lado, si $L := g^{-1}(0)$, entonces el ortogonal L° de L en $(E \times H)'$ es débilmente cerrado en $(E \times H)'$; luego $L^\circ(\sigma(L^\circ, (E \times H)/L)) \in \Sigma$. De manera que $(E \times H)/L$ pertenece a la clase $A(\Sigma)$. Poniendo $g = h \circ k$, donde k es la aplicación canónica de $E \times H$ sobre $(E \times H)/L$ y h el isomorfismo de $(E \times H)/L$ sobre F, h tiene la gráfica cerrada, y aplicando la Proposición 1 a h, se deduce que h es débilmente continua. Lo que prueba que f es débilmente continua.

Proposición 3. *Sea Σ una clase normal y supongamos que $E \in B(\Sigma)$. Si F es un subespacio cerrado de E, entonces $F \in B(\Sigma)$.*

Demostración. Si F no pertenece a $B(\Sigma)$, existe una topología de Mackey τ sobre F tal que $F(\tau) \in A(\Sigma)$ y la identidad i de $F(\tau)$ sobre F tiene la gráfica cerrada y no es continua. Por otro lado, $i : F(\tau) \to E$ tiene la gráfica cerrada, ya que F es cerrado en E, y como $F(\tau) \in A(\Sigma)$ y $E \in B(\Sigma)$, entonces i es continua. Contradicción.

Proposición 4. *Sea F un subespacio de codimensión finita de un espacio E. Si Σ es normal y $F \in B(\Sigma)$, entonces $E \in B(\Sigma)$.*

Demostración. Es suficiente suponer que F es de codimensión uno. Si E no pertenece a $B(\Sigma)$, existe una topología de Mackey τ sobre E de manera que $E(\tau) \in A(\Sigma)$ y la identidad i de $E(\tau)$ sobre E tiene la gráfica cerrada y no es continua. La restricción j de i sobre F es una aplicación lineal de $F(\tau/F)$ sobre F que tiene la gráfica cerrada. Como F es de codimensión uno en E, se deduce de un conocido resultado dado independientemente por S. O. Iyahen, [2] y M. De Wilde [1], que j tiene una extensión lineal h de $E(\tau)$ sobre F con gráfica cerrada. Como Σ es normal, $E(\tau) \in A(\Sigma)$ y $F \in B(\Sigma)$, entonces $h : E(\tau) \to F$ es continua. Por consiguiente, $h : E(\tau) \to E$ es continua.

Pueden ocurrir dos cosas:

1) F es denso en $E(\tau)$

Sea $x \in E \setminus F$ y sea $\{x_i, i \in I, \geq\}$ una red de puntos de F que converge a x en $E(\tau)$. Por ser h continua, $h(x_i) \to h(x)$ en E. Pero como $i: E(\tau) \to E$ tiene la gráfica cerrada, ha de ser $i(x) = h(x)$, y esto es una contradicción, ya que entonces $x = h(x) \in F$.

2) F es cerrado en $E(\tau)$

Tomando nuevamente $x \in E \setminus F$, entonces $E(\tau)$ es la suma topológica directa de $F(\tau/F)$ y $<\{x\}>$. Por tanto, i será continua al ser continuas sus restricciones sobre $F(\tau/F)$ y sobre $<\{x\}>$. Contradicción.

Ejemplos. Si Σ es la clase de los espacios débilmente casi-completos, la clase $B(\Sigma)$ la constituyen los espacios Γ_r de Valdivia, [6]. Los espacios tonelados constituyen la subclase de $A(\Sigma)$ formada por todos los elementos de $A(\Sigma)$ provistos con las topologías de Mackey.

Si Σ es la clase de los espacios débil localmente completos, entonces la clase $B(\Sigma)$ la constituyen los espacios Λ_r de Valdivia, [7] y la clase $A(\Sigma)$ los espacios dual localmente completos, [7].

Si Σ es la clase de los espacios débil sucesionalmente completos, entonces los espacios con la propiedad (S) de Saxon, [5] constituyen la clase $A(\Sigma)$.

2. CLASES DE PARTIDA PARA EL TEOREMA DE LA GRAFICA CERRADA CON CONDICIONES DE CONTINUIDAD DEBIL

Sea como antes Σ una clase de espacios provistos con las topologías débiles.

Definición 4. *Diremos que un espacio E pertenece a la clase $C(\Sigma)$ si dado un subespacio G de E^* tal que $G \cap E'$ es denso en $E'(\sigma(E', E))$ y $G(\sigma(G, E)) \in \Sigma$, entonces G está contenido en E'.*

La definición anterior sólo depende del par dual (E, E') y no de la topología inicial de E.

Proposición 5. *Sea E un espacio vectorial y sean τ y ρ dos topologías localmente convexas sobre E tales que $E(\tau) \in C(\Sigma)$ y $E(\rho) \in A(\Sigma)$. Si la* *aplicación identidad i de $E(\tau)$ sobre $E(\rho)$ tiene la gráfica cerrada, entonces i es débilmente continua.*

Demostración. Sea E' el dual de $E(\tau)$, G el dual de $E(\rho)$ y $j: G \to E^*$ la traspuesta de i. Ahora, $G \cap E' = j^{-1}(E')$ es denso en $G(\sigma(G, E))$, ya que i tiene la gráfica cerrada. Así, $G \cap E'$ es denso en $E^*(\sigma(E^*, E))$ y, por tanto en $E'(\sigma(E', E))$. Dado que $G(\sigma(G, E)) \in \Sigma$ y dado que $E(\rho)$ está en $A(\Sigma)$, G estará contenido en E'; de donde $j(G) \subset E'$. Luego i es débilmente continua.

Proposición 6. *Si E no pertenece a la clase $C(\Sigma)$, entonces existe una topología τ sobre E tal que $E(\tau) \in A(\Sigma)$ y la identidad i de E sobre $E(\tau)$ tiene la gráfica cerrada, pero no es continua.*

Demostración. Si E no está en $C(\Sigma)$, existe un subespacio G de E^* tal que $G(\sigma(G, E)) \in \Sigma$, $G \cap E'$ es débilmente denso en E' y G no está contenido en E'. Como $G(\sigma(G, E)) \in \Sigma$, $E(\sigma(E, G))$ pertenece a $A(\Sigma)$. Por otro lado, la identidad $i: E \to E(\sigma(E, G))$ tiene la gráfica cerrada debido a que $G \cap E' = j^{-1}(E')$ es débilmente denso en E' y, por tanto, en G. Sin embargo, $j(G)$ no está contenido en E'. Luego i no es débilmente continua.

Definición 5. *Diremos que una clase de espacios Σ con las topologías débiles es regular si dados $E \in \Sigma$ y una aplicación lineal débilmente continua f de E sobre otro espacio F, entonces $F \in \Sigma$.*

Proposición 7. *Si Σ es regular, entonces $C(\Sigma)$ es estable para la formación de productos finitos.*

Demostración. Si $E, F \in C(\Sigma)$, veremos que $E \times F \in C(\Sigma)$, para lo que identificaremos E y F con los subespacios $E \times \{0\}$ y $\{0\} \times F$ de $E \times F$, respectivamente.

Sea G un subespacio de $(E \times F)^*$ verificando que $G \cap (E \times F)'$ es denso en $(E \times F)'(\sigma((E \times F)', E \times F))$ y $G(\sigma(G, E \times F)) \in \Sigma$. Vamos a probar que G está contenido en $(E \times F)'$. Si p denota la proyección de $E^* \times F^*$ sobre E^*, entonces $p(G) \cap E'$ es denso en $E'(\sigma(E', E))$, ya que $p[G \cap (E' \times F')]$ está contenido en $p(G) \cap E'$. Como $p/G: G \to E^*$ es débilmente continua, entonces $p(G) \in \Sigma$ en virtud de las hipótesis. Luego $p(G) \subset E'$. Por otro lado, si q denota la proyección de $E^* \times F^*$ sobre F^*, se demuestra análogamente que $q(G) \subset F'$. Por consiguiente, $G \subset p(G) \times q(G) \subset E' \times F'$.

En los resultados siguientes $C_0(\Sigma)$ denotará la subclase de $C(\Sigma)$ formada por todos los espacios E de $C(\Sigma)$ con la propiedad de que $(E\times F)/G\in C(\Sigma)$ para cada espacio F provisto con la topología localmente convexa más fina y cada subespacio cerrado G de $E\times F$. Es obvio que la clase $C_0(\Sigma)$ no es vacía.

Teorema 2. *Sea $E\in C_0(\Sigma)$ y $F\in A(\Sigma)$. Si f es una aplicación lineal de E en F con gráfica cerrada, entonces f es débilmente continua.*

Demostración. Sea H un complemento algebráico de $f(E)$ en F, provisto con la topología localmente convexa más fina. La aplicación g de $E\times H$ sobre F, definida como $g(x,y)=f(x)+y$, es lineal y tiene la gráfica cerrada.

En virtud de las propiedades de la clase $C_0(\Sigma)$, si $L:=g^{-1}(0)$, se tiene que $(E\times H)/L\in C(\Sigma)$. Descomponiendo $g=h\circ k$ como en el Teorema 1, h tiene la gráfica cerrada y la conclusión se sigue con la Proposición 5.

Proposición 8. *Sea Σ regular y sea F un subespacio de codimensión finita de un espacio E. Si $E\in C_0(\Sigma)$, entonces $F\in C(\Sigma)$.*

Demostración. Si F no pertenece a la clase $C(\Sigma)$, existe una topología localmente convexa τ sobre F tal que $F(\tau)\in A(\Sigma)$ y la identidad $i: F\to F(\tau)$ tiene la gráfica cerrada, pero no es débilmente continua. Como F es un subespacio de E de codimensión finita, existe una extensión lineal h de i, definida en E, sobre $F(\tau)$ con gráfica cerrada. Ahora, $E\in C_0(\Sigma)$ y $F(\tau)\in A(\Sigma)$, de manera que por el resultado anterior, h es débilmente continua. Pero entonces $i: F\to F(\tau)$ es débilmente continua. Contradicción.

Proposición 9. *Sea E la envoltura localmente convexa de una familia $\{E_i, i\in I\}$ de espacios dotados con las topologías de Mackey, definida por las aplicaciones $\{h_i, i\in I\}$ de los E_i en E. Si cada $E_i\in C_0(\Sigma)$, entonces $E\in C(\Sigma)$.*

Demostración. Si E no pertenece a la clase $C(\Sigma)$, por la Proposición 6 existe una topología localmente convexa τ sobre E tal que $E(\tau)\in A(\Sigma)$ y la identidad $i: E\to E(\tau)$ tiene la gráfica cerrada y no es continua. Ahora, las aplicaciones $i\circ h_i$ de E_i en $E(\tau)$ tienen la gráfica cerrada y son, por el Teorema 2, débilmente continuas. Como cada E_i tiene la topología de Mackey, estas aplicaciones $i\circ h_i$ son continuas y, por ello, i es continua. Contradicción.

Necesitaremos el siguiente resultado, dado en [4].

Lema. *Sean E y F dos espacios vectoriales topológicos y sea G un subespacio de E de codimensión numerable. Si f es una aplicación lineal de G en F con gráfica cerrada, entonces existe una aplicación lineal h de E en $F \times \varphi$ con gráfica cerrada tal que $h(x) = (f(x), 0)$ para cada $x \in G$.*

Proposición 10. *Supongamos que Σ es tal que si $E \in \Sigma$, entonces $E \times \omega \in \Sigma$. Sea F un subespacio de codimensión numerable de un espacio E. Si $E \in C(\Sigma)$, entonces $F \in C(\Sigma)$.*

Demostración. Si F no pertenece a $C(\Sigma)$, existe una topología localmente convexa τ sobre F tal que $F(\tau) \in A(\Sigma)$ y la identidad $i: F \rightarrow F(\tau)$ tiene la gráfica cerrada, pero no es débilmente continua. Entonces, aplicando el lema anterior, existe una aplicación lineal h de E en $F(\tau) \times \varphi$ con gráfica cerrada, tal que $h(x) = (i(x), 0)$ para cada $x \in F$. Como $F(\tau) \times \varphi$ está en $A(\Sigma)$, entonces h es débilmente continua y, por consiguiente, i es débilmente continua. Contradicción.

Referencias

[1] DE WILDE, M.: *Finite codimensional subspaces of topological vector spaces and the closed graph theorem.* Arch. Math. **23**, 180-181 (1972).

[2] IYAHEN, S. O.: *On the closed graph theorem.* Israel J. Math. **10**, 96-105 (1971).

[3] ROBERTSON, A. P., ROBERTSON, W. J.: *Topological vector spaces.* Cambridge University Press 1973.

[4] SAIFEN, H., TWEDDLE, I.: *From B-completeness to countable codimensional subspaces via the closed graph theorem.* Proc. Roy. Soc. Edinburg **86**, 107-114 (1980).

[5] SAXON, S. A.: *Nuclear and product spaces, Baire-like spaces and the strongest locally convex topology.* Math. Ann. **197**, 82-106 (1972).

[6] VALDIVIA, M.: *Sobre el teorema de la gráfica cerrada.* Collect. Math. **22**, 51-72 (1971).

[7] VALDIVIA, M.: *Mackey convergence and the closed graph theorem.* Arch. Math. **25**, 649-656 (1974).

[8] VALDIVIA, M.: *Algunos nuevos resultados sobre el teorema de la gráfica cerrada.* Rev. Mat. Hispano-Americana **39**, 27-47 (1979).

[9] VALDIVIA, M.: *Topics in locally convex spaces.* North Holland Math. Studies **67**. North Holland 1982.

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Informática
Universidad Politécnica de Valencia
Apartado 22012, E-46071 VALENCIA
ESPAÑA

Recibido: 6 de mayo de 1991
Revisado: 27 de febrero de 1992