

Une Méthode intégrale de frontière. Application au Laplacien et à l'élasticité

MARIE-THÉRÈSE LACROIX

ABSTRACT. The aim of the paper is to give a method to solve boundary value problems associated to the Helmholtz equation and to the operator of elasticity. We transform these problems in problems on the boundary Γ of an open set of \mathbb{R}^3 . After introducing a symplectic form on $H^1/2(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ we obtain the adjoint of the boundary operator employed.

Then the boundary problem has a solution if and only if the boundary conditions are orthogonal, for this bilinear form, to the elements of the kernel, in a good space, of the adjoint operator. We illustrate this result for a mixed problem for the Helmholtz equation (th. II. 3) and the Dirichlet problem for elasticity (th. III.2), but there exists natural generalizations.

RESUME:

La résolution de problèmes de conditions aux limites associés à des opérateurs linéaires tels que le Laplacien, l'opérateur de l'élasticité, ..., peut être remplacée par l'étude de problèmes de transmission qui conduisent à la théorie du potentiel ([D.L.], [K1], [N1]) et à la recherche de solutions d'équations intégrales dans des espaces de fonctions définies au bord d'un ouvert de \mathbb{R}^N . On se propose ici de présenter dans un cadre général une méthode de dualité que l'on applique à quelques exemples représentatifs. Si X désigne un espace de Banach réflexif de dual X' , on introduit un produit symplectique sur $X \times X'$, auquel on associe l'adjoint d'un opérateur ainsi que l'orthogonal d'un ensemble (§1).

Puis, pour l'opérateur de Helmholtz, on définit un opérateur S sur $H^1/2(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, Γ bord d'un ouvert de \mathbb{R}^3 , et on détermine l'adjoint symplectique de $I+S$ et $I-S$, grâce à la formule de Green; puis on établit un théorème d'existence de solutions d'un problème mêlé associé à l'équation de

Helmholtz (th. II.3). On présente un résultat plus classique pour l'opérateur de l'élasticité dans le cas du problème de Dirichlet (th. III.2). On retrouve des résultats connus ([N1], [D.L.]) et on les étend à d'autres situations [L].

I. UN THEOREME ABSTRAIT:

Soit X un espace de Banach réflexif de dual X' , où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité. On introduit la définition suivante:

Définition I.1:

On appelle produit symplectique sur $X \times X'$ la forme bilinéaire:

$$(x, f) \times (g, y) \in (X \times X') \times (X' \times X) \rightarrow B((x, f), (g, y)) = \langle x, g \rangle - \langle y, f \rangle$$

Définition I.2:

Soit M un sous-ensemble de $X \times X'$; on appelle orthogonal symplectique de M et on note M^{\perp} le sous-ensemble de $X' \times X$ qui vérifie:

$$M^{\perp} = \{(g, y) \in X' \times X \mid B((x, f), (g, y)) = 0 \quad \forall (x, f) \in M\}$$

Remarque: Si $N \in X' \times X$ on définit son orthogonal dans $X \times X'$ par $N^{\perp} = \{(x, f) \in X \times X' \mid B_1((g, y), (x, f)) = B((x, f), (g, y)) = 0 \quad \forall (g, y) \in N\}$.

On montre alors [B] les résultats suivants:

pour tout $M \subset X \times X'$ M^{\perp} est un sous-espace vectoriel fermé de $X' \times X$; si M est un sous-espace vectoriel de $X \times X'$ alors $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$, et vaut M si M est fermé.

Si A désigne une application linéaire de domaine $D(A) \subset X \times X'$ dans $X \times X'$, on définit l'application adjointe symplectique de la façon suivante:

Définition I.3:

On appelle adjoint symplectique de A et on note A^* l'application de domaine

$$D(A^*) = \{(g, y) \in X' \times X \mid \exists C > 0 \mid B(A(x, f), (g, y)) \mid \leq C \|(x, f)\| \quad \forall (x, f) \in D(A)\}$$

et $\forall (g, y) \in D(A^*)$ on a:

$$B(A(x, f), (g, y)) = -B((x, f), A^*(g, y)) \quad \forall (x, f) \in D(A)$$

On montre selon des raisonnements classiques [B] les résultats suivants:

Proposition I.4:

1. Si $\overline{D(A)} = X \times X'$, alors A^* est fermé.
2. Si $\overline{D(A)} = X \times X'$ et A est fermé alors:
 - i) $N(A) = (R(A^*))^{\perp}$
 - ii) $N(A^*) = (R(A))^{\perp}$
 - iii) $N(A)^{\perp} = \overline{R(A^*)}$
 - iv) $N(A^*)^{\perp} = \overline{R(A)}$

Théorème I.5:

Si $\overline{D(A)} = X \times X'$ et si A est fermé alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

- i) $R(A)$ fermé
- ii) $R(A) = (N(A^*))^{\perp}$

II. APPLICATION A LA RESOLUTION D'UN PROBLEME MELE ASSOCIE A L'EQUATION DE HELMHOLTZ $\Delta + k^2 I$ DANS \mathbb{R}^3 :

A. Un exemple d'opérateurs adjoints pour un produit symplectique:

Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^3 dont la frontière Γ est lipschitzienne et tel que $\Omega' = \mathbb{R}^3 / \overline{\Omega}$ soit connexe. On note $H^{1,2}(\Gamma)$ l'espace de trace classique de dual $H^{-1,2}(\Gamma)$. [L.M] [N].

On note E_k la solution élémentaire de l'opérateur $\Delta + k^2 I$ qui vérifie $E_k = O\left(\frac{1}{r}\right)$ $r \rightarrow \infty$, ainsi que la condition de Sommerfeld sortante ([D.L] chap. II p. 756,

chap. XI B p. 681) $\frac{\partial E_k}{\partial r} + i k E_k = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ $r \rightarrow \infty$.

En suivant les notations de M. Cessenat [1] on introduit les opérateurs suivants, sous réserve d'existence, où n désigne la normale unitaire en un point de Γ :

$$q \rightarrow L_k(q): \left(z \in \Gamma \rightarrow L_k(q)(z) = \int_{\Gamma} q(y) E_k(z-y) d\gamma(y) \right)$$

$$q \rightarrow J_k(q): \left(z \in \Gamma \rightarrow J_k(q)(z) = 2 \int_{\Gamma} q(y) \frac{\partial E_k}{\partial n_z}(z-y) d\gamma(y) \right)$$

$$\varphi \rightarrow K_k(\varphi): \left(z \in \Gamma \rightarrow K_k(\varphi)(z) = -2 \int_{\Gamma} \varphi(y) \frac{\partial E_k}{\partial n_y}(z-y) d\gamma(y) \right)$$

$$\varphi \rightarrow R_k(\varphi): \left(z \in \Gamma \rightarrow R_k(\varphi)(z) = - \int_{\Gamma} \varphi(y) \frac{\partial^2 E_k}{\partial n_z \partial n_y}(z-y) d\gamma(y) \right)$$

$$\text{et on pose } S = \begin{pmatrix} K_k & 2L_k \\ 2R_k & J_k \end{pmatrix},$$

on a le résultat (où on néglige à présent l'indice k):

Proposition II.1:

([C1] page 158) Pour Γ lipschitzienne, S est une application de $H^{1,2}(\Gamma) \times H^{-1,2}(\Gamma)$ dans lui-même, les applications $\frac{1}{2}(I+S)$ et $\frac{1}{2}(-I+S)$ sont des projecteurs et $S^2 = I$.

Notation: On introduit l'application

$$J: H^{1,2}(\Gamma) \times H^{-1,2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1,2}(\Gamma) \times H^{1,2}(\Gamma)$$

$$(\varphi, q) \rightarrow J(\varphi, q) = (q, \varphi)$$

Proposition II.2:

Si on munit $H^{1,2}(\Gamma) \times H^{-1,2}(\Gamma)$ du produit symplectique (Déf. I. 1), alors l'adjoint symplectique de $\frac{1}{2}(I+S)$ est $J(\frac{1}{2}(-I+S))$. (Resp. $\frac{1}{2}(-I+S)$ est $J(\frac{1}{2}(I+S))$).

Démonstration:

1. A tout $(\varphi, q) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ on associe le problème de transmission:

trouver $u \in \Omega \cup \Omega'$, $\Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$, vérifiant:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \Omega \cup \Omega'$$

$$[u] = \varphi \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = q$$

où $[\]$ désigne le saut $[u] = u_{\text{int}} - u_{\text{ext}} =$ saut de u sur Γ

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = \frac{\partial u}{\partial n} \text{ int} - \frac{\partial u}{\partial n} \text{ ext} = \text{saut de } \frac{\partial u}{\partial n}$$

$$\text{Alors [CI] } u = E_k * (q \delta_\Gamma + \text{div}(\varphi n \delta_\Gamma)) \tag{11.1}$$

ou encore $u(x) = \int_\Gamma q(y) E_k(x-y) d\gamma(y) - \int_\Gamma \varphi(y) \frac{\partial E_k}{\partial n_y}(x-y) d\gamma(y) \quad x \in \Omega \cup \Omega'$,
[NI] et on a $u|_{\Omega} \in H^1(\Omega) \quad u|_{\Omega'} \in W^1(\Omega')$.

$$\left(u_i, \frac{\partial u}{\partial n} \right)_i = \frac{1}{2} (I + S)(\varphi, q); \quad \left(u_i, \frac{\partial u}{\partial n} \right)_e = \frac{1}{2} (-I + S)(\varphi, q).$$

2. A tout $(\varphi, q)(\varphi_1, q_1)$ on associe respectivement u et v comme en 1. puis on utilise la formule de Green:

$$0 = \int_\Omega ((\Delta u + k^2 u) v - (\Delta v + k^2 v) u) dx = \int_\Gamma \left(v_i \frac{\partial u}{\partial n} - u_i \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\gamma.$$

on fait de même dans Ω' ce qui donne:

$$\int_\Gamma \left\{ \left(v_i \frac{\partial u}{\partial n} - u_i \frac{\partial v}{\partial n} \right) e \right\} - \left(u_i \frac{\partial v}{\partial n} - v_i \frac{\partial u}{\partial n} \right) e \Big| d\gamma = 0, \text{ d'où on déduit}$$

$$\int_\Gamma \left(v_i \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] - \frac{\partial u}{\partial n} i [v] \right) d\gamma = \int_\Gamma \left(v_e \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] - \frac{\partial v}{\partial n} e [u] \right) d\gamma, \text{ ou}$$

$$B \left(u_i, \frac{\partial u}{\partial n} \right)_i, \left(\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right], [v] \right) = -B \left(\left([u], \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \right), \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_e, v_e \right) \text{ soit:}$$

$$B \left(\frac{1}{2} (I + S)(\varphi, q), (q_1, \varphi_1) \right) = -B((\varphi, q), J \left(\frac{1}{2} (-I + S)(\varphi_1, q_1) \right)).$$

3. L'autre relation se montre de même façon.

B. Application à la résolution d'un problème aux limites pour l'équation de Helmholtz:

On a vu au théorème I.5 que si on a un opérateur A linéaire non borné de $X \times X'$ dans $X \times X'$, il existe des hypothèses pour lesquelles $R(A) = N(A^*)^{\perp}$. On va montrer, ici, un exemple d'utilisation de l'opérateur transposé, ainsi que $R(A) = (N(A^*))^{\perp}$ sans pouvoir appliquer directement le théorème I.5.

La résolution d'un problème aux limites associé à l'équation de Helmholtz peut se ramener à résoudre un problème de transmission dans des sous-espaces de $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$. Plus précisément, on envisage le problème mêlé intérieur:

— soient Γ_1 et Γ_2 deux sous-ensembles ouverts de Γ vérifiant:

$$\Gamma = \overline{\Gamma_1} \cup \Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \overline{\Gamma_2} \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset \quad \mu(\Gamma_1) \times \mu(\Gamma_2) \neq 0.$$

— On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution du problème

$$\text{P.M.I.} \quad \begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u \upharpoonright \Gamma_1 = u_0 \quad \frac{\partial u}{\partial n} \upharpoonright \Gamma_2 = g \end{cases}$$

avec $u_0 = \text{Tr } U_0 \upharpoonright \Gamma_1$ $U_0 \in H^1(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$.

— On lui associe le problème de transmission:

$$\text{P.T.I.} \quad \begin{cases} \text{trouver } \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2) = \{ \varphi \in H^{1/2}(\Gamma) / \varphi \equiv 0 \text{ sur } \Gamma_2 \\ q \in H^{-1/2}(\Gamma_2) \text{ (prolongement nul de } q \text{ à } \Gamma \text{ appartient à } H^{-1/2}(\Gamma)) \\ \text{vérifiant:} \\ \frac{1}{2} (I + S)(\varphi, p) \upharpoonright H^{1/2}(\Gamma_1) \times H^{-1/2}(\Gamma_2) = (u_0, g). \end{cases}$$

Si (φ, q) est solution de P.T.I., alors

$$u = E_k^* (q \delta_{\Gamma_2} + \text{div}(\varphi_n \delta_{\Gamma_1})) \upharpoonright \Omega$$

est solution de P.M.I.

Théorème II.3:

Soit $(u_0, g) \in H^{1/2}(\Gamma_1) \times H^{-1/2}(\Gamma_2)$, $u_0 = \text{Tr}(U_0) \upharpoonright \Gamma_1$ $U_0 \in H^1(\Omega)$, alors on a équivalence entre les deux propriétés suivantes:

i) $\exists (\varphi, q) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2) \times H^{-1/2}(\Gamma_2)$ solution de:

$$\frac{1}{2} (I+S)(\varphi, q) = (u_0, g) \quad \text{dans } H^{1/2}(\Gamma_1) \times H^{-1/2}(\Gamma_2)$$

ii) $B((u_0, g), (q_1, \varphi_1)) = 0$

$\forall (\varphi_1, q_1) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_1) \times H^{-1/2}(\Gamma_1)$ solution de:

$$\frac{1}{2} (-I+S)(\varphi_1, q_1) = 0 \quad \text{dans } H^{1/2}(\Gamma_2) \times H^{-1/2}(\Gamma_1)$$

Remarques:

1. On obtient le même résultat en échangeant $\frac{1}{2} (I+S)$ et $\frac{1}{2} (-I+S)$ (problème mêlé extérieur).

2. On peut étudier par la même méthode le problème de Dirichlet (Neumann) intérieur (extérieur); le problème de Neumann extérieur est étudié dans Dautray-Lions ([D.L] chap. I.B p. 684).

La démonstration du théorème s'appuie sur trois lemmes.

Lemme, II.4:

Soit Ω ouvert borné connexe de \mathbb{R}^3 , $\Omega' = \mathbb{R}^3 / \overline{\Omega}$ connexe, de bord Γ lipschitzien: (Γ_1 et Γ_2 deux sous-ensembles ouverts de Γ , $\Gamma = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} = \Gamma_1 \cup \overline{\Gamma_2}$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\mu(\Gamma_1)$ et $\mu(\Gamma_2) \neq 0$)

Alors $\Delta u + k^2 u = 0$ dans Ω' $u = 0$ sur Γ

(resp. $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur Γ ; $u = 0$ sur Γ_1 et $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur Γ_2), avec $u \in W_{00}^{1,2}(\overline{\Omega'})$ $u = O(\frac{1}{r})$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ik u(r) = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad r \rightarrow \infty \quad \text{admet pour unique solution } u \equiv 0$$

Démonstration:

1. Dans le cas Dirichlet ou Neumann ceci est un résultat énoncé dans Dautray-Lions ([D.L] chap. II p. 759, chap. XI.B p. 681).

2. Dans le cas mêlé une démarche analogue conduit au résultat.

Lemme II.5:

Sous les hypothèses du lemme II.4, on a équivalence entre les deux propriétés:

i) k^2 valeur propre du problème

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$u = 0 \quad \Gamma_1 \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_2 \quad (u \in H^1(\Omega)).$$

ii) $(\varphi_1, q_1) \in H_{00}^{1,2}(\Gamma_1) \times H^{-1,2}(\Gamma_1)$ solution de

$$\frac{1}{2} (-I + S)(\varphi_1, q_1) = (0, 0) \quad \text{dans } H^{1,2}(\Gamma_2) \times H^{-1,2}(\Gamma_1).$$

De plus $(\varphi_1, q_1) = (u, \frac{\partial u}{\partial n})$ pour u valeur propre du problème i).

Démonstration: i) \rightarrow ii)

Si k^2 est valeur propre alors il existe $u \neq 0$ solution de

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

Soit v solution de $\Delta v + k^2 v = 0 \quad \Omega'$

$$v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

d'après le lemme II.6 on a $v \equiv 0$

Alors $w = u \chi_{\Omega} + v \chi_{\Omega'}$ vérifie $\Delta w + k^2 w = 0 \quad \Omega \cup \Omega'$

$$[w] = \varphi_1 \equiv 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad \left[\frac{\partial w}{\partial n} \right] = q_1 \equiv 0 \quad \text{sur } \Gamma_2,$$

où $\varphi_1 \in H_{00}^{1,2}(\Gamma_1)$, $q_1 \in H^{-1,2}(\Gamma_2)$ et comme $v \equiv 0$

$$\text{on a } \frac{1}{2} (-I + S)(\varphi_1, q_1) = (0, 0) \quad \text{dans } H^{1,2}(\Gamma_2) \times H^{-1,2}(\Gamma_1)$$

ii) \Rightarrow i)

Si on a $(\varphi_1, q_1) \neq (0, 0)$, alors

$$u = E_k * (\varphi_1 n \delta_{\Gamma_1} + \text{div}(\varphi_1 n \delta_{\Gamma_1})) \quad \text{vérifie}$$

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega' \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_1$$

mais d'après le lemme II.4 $u \equiv 0$.

Alors $u_i = [u] = \varphi_1$ nul sur Γ_1 et non $\equiv 0$

$$\frac{\partial u}{\partial n} i = \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = q_1 \text{ nul sur } \Gamma_2 \text{ non } \equiv 0$$

et $\Delta u + k^2 u = 0 \quad \Omega$

$u = 0$ sur $\Gamma_1 \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur Γ_2 admet une solution non $\equiv 0$ d'où k^2 est valeur propre du problème mêlé intérieur.

Lemme II.6:

Pour que le problème mêlé intérieur admette des solutions avec (u_0, g) donnés, il faut et il suffit que l'on ait: $B((u_0, g), (q_1, \varphi_1)) = 0$

$$\forall (q_1, \varphi_1) \in H^{-1/2}(\Gamma_2) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_1) \text{ solution de } \frac{1}{2} (-I + S)(\varphi_1, q_1) = (0, 0)$$

dans $H^{1/2}(\Gamma_2) \times H^{-1/2}(\Gamma_1)$.

Démonstration:

Pour que le problème mêlé admette des solutions pour $(u_0, g) \leftrightarrow B((u_0, g), (\frac{\partial v}{\partial n}, v)) = 0 \quad \forall v$ valeur propre du problème mêlé intérieur.

Or, d'après le lemme II.5 $(v, \frac{\partial v}{\partial n}) = (\varphi_1, q_1) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_1) \times H^{-1/2}(\Gamma_1)$ solution de $\frac{1}{2} (-I + S)(\varphi_1, q_1) = (0, 0)$.

Démonstration du théorème II.3:

1. Trouver $(\varphi, q) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2) \times H^{-1/2}(\Gamma_2)$ solution du problème $\frac{1}{2} (I + S)(\varphi, q) = (u_0, g)$ dans $H^{1/2}(\Gamma_1) \times H^{-1/2}(\Gamma_2)$, revient à trouver (φ, q) tels que $\Delta u + k^2 u = 0 \quad \Omega \cup \Omega' \quad [u] = \varphi \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = q \quad u_i = u_0 \text{ sur } \Gamma_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} i = g \text{ sur } \Gamma_2.$

2. On sait que le problème mêlé intérieur admet des solutions si et seulement si $B((u_0, g), (q_1, \varphi_1)) = 0$. (φ_1, q_1) définis aux lemmes II.5 et II.6; si cette condition est vérifiée, il existe une solution de

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \Omega$$

$$u = u_0 \quad \Gamma_1; \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \Gamma_2$$

Comme on veut $[u] = 0$ sur Γ_2 ($[\frac{\partial u}{\partial n}] = 0$ sur Γ_1), on lui associe le problème extérieur:

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad \Omega'$$

$$v = u \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

alors $w = u \chi_{\Omega} + v \chi_{\Omega'}$ vérifie le problème de transmission cherché avec

$$[w] = \varphi \equiv 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad \left[\frac{\partial w}{\partial n} \right] = q \equiv 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

ainsi que $\frac{1}{2} (I + S)(\varphi, q) = (u_0, g)$ sur $H^{1/2}(\Gamma_1) \times H^{-1/2}(\Gamma_2)$.

III. Une application à l'élasticité dans \mathfrak{R}^3 :

Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathfrak{R}^3 , $\Omega' = \mathfrak{R}^3 / \overline{\Omega}$ connexe, de bord Γ lipschitzien.

On note A l'opérateur de l'élasticité [DU.L.] [K1]; on néglige les notations vectorielles, $x \in \Omega \cup \Omega' \rightarrow u(x) \in \mathfrak{R}^3$:

$$A(u) = -\mu \Delta u - (\lambda + \mu) \text{grad div}(u),$$

où λ et $\mu > 0$ désignent les coefficients de Lamé.

On note T l'opérateur de dérivation au bord

$$T(u) = 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda n \text{div } u + \mu(n \wedge \text{Rot } u).$$

A cet opérateur de dérivation, on associe une forme bilinéaire continue coercive sur $(H^1(\Omega))^3$ grâce à l'inégalité de Korn ([DU.L.] p. 107) (resp. sur $(W^1(\Omega'))^3$ d'après une propriété montrée par Giroire ([D.L.] chap. XI B p. 689).

On a ainsi les théorèmes de trace:

si $u \in (H^1(\Omega))^3$ $u|_{\Gamma} \in (H^{1/2}(\Gamma))^3$ (resp. $(\dot{W}^1(\Omega'))^3$)

si $Au = f \in (L^2(\Omega))^3$ $u \in (H^1(\Omega))^3$ alors $T(u) \in (H^{-1/2}(\Omega))^3$ [C2]

(resp. Ω).

Aussi peut-on reprendre tout ce qui été fait pour le Laplacien, en utilisant une matrice de solution élémentaire de l'opérateur de l'élasticité, ainsi que la formule de Betti.

Formule de Betti: pour u et v régulières:

$$\int_{\Omega} (u \cdot (-Av + k^2v) - v \cdot (-Au + k^2u)) dx = \int_{\Gamma} (u \cdot T(v) - v \cdot T(u)) d\gamma.$$

Soit E_k matrice de solutions élémentaires de $-A + k^2I$, on note $\overset{\circ}{E}_k$ la matrice transposée de $T(E_k)$ [K1].

Alors pour $\varphi \in (H^{1/2}(\Gamma))^3$ $q \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3$

$$u(x) = \int_{\Gamma} E_k(x-y)(q(y)) d\gamma(y) - \int_{\Gamma} \overset{\circ}{E}_k(x-y)(\varphi(y)) d\gamma(y) \quad \Omega \cup \Omega'$$

vérifie

$$-Au + k^2u = 0 \quad \Omega \cup \Omega'$$

$$[u] = \varphi \quad [Tu] = q$$

Comme dans le cas du Laplacien, on introduit les opérateurs:

$$q \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3 \rightarrow L_k(q) \quad (z \in \Gamma \rightarrow L_k q(z) = \int_{\Gamma} E_k(z-y)(q(y)) d\gamma(y))$$

$$q \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3 \rightarrow J_k(q) \quad (z \in \Gamma \rightarrow J_k q(z) = 2 \int_{\Gamma} T_z E_k(z-y)(q(y)) d\gamma(y))$$

$$\varphi \in (H^{1/2}(\Gamma))^3 \rightarrow K_k(\varphi) \quad (z \in \Gamma \rightarrow K_k \varphi(z) = -2 \int_{\Gamma} \overset{\circ}{E}_k(z-y)(\varphi(y)) d\gamma(y))$$

$$\varphi \in (H^{1/2}(\Gamma))^3 \rightarrow R_k(\varphi) \quad (z \in \Gamma \rightarrow R_k \varphi(z) = -T_z \int_{\Gamma} \overset{\circ}{E}_k(z-y)(\varphi(y)) d\gamma(y))$$

On néglige l'indice k , et on note

$$S = \begin{pmatrix} K & 2L \\ 2R & J \end{pmatrix} \quad \text{si } u = E * q \delta_{\Gamma} - \overset{\circ}{E} * \varphi \delta_{\Gamma},$$

Alors

$$(u_p, Tu_p) = \frac{1}{2} (I + S)(\varphi, q); \quad (u_p, Tu_p) = \frac{1}{2} (-I + S)(\varphi, q).$$

Propriétés:

L est auto-adjoint $(H^{-1/2}(\Gamma))^3 \rightarrow (H^{1/2}(\Gamma))^3$

R est auto-adjoint $(H^{1/2}(\Gamma))^3 \rightarrow (H^{-1/2}(\Gamma))^3$

$-K$ est l'adjoint de J ($-J$ de K) dualité $(H^{-1/2}(\Gamma))^3 \rightarrow (H^{1/2}(\Gamma))^3$

de plus $\frac{1}{2}(I+S)$ et $\frac{1}{2}(-I+S)$ sont des projecteurs et $S^2 = I$.

De la formule de Betti, on déduit l'analogue de la proposition II.2.

Proposition III.1:

1. Si on munit $(H^{1/2}(\Gamma))^3 \times (H^{-1/2}(\Gamma))^3$ du produit symplectique; alors l'adjoint symplectique de $\frac{1}{2}(I+S)$ est $J(\frac{1}{2}(-I+S))$ (resp. $\frac{1}{2}(-I+S)$ et $J(\frac{1}{2}(I+S))$ avec $J: (\varphi, q) \rightarrow J(\varphi, q) = (q, \varphi)$.

On va établir le théorème suivant:

Théorème III.2:

Sous les hypothèses précédentes on a équivalence entre les propriétés suivantes:

i) $\forall u_0 \in (H^{1/2}(\Gamma))^3$ il existe $\varphi \in (H^{1/2}(\Gamma))^3$ solution de

$$\frac{1}{2}(I+k)(\varphi) = u_0 \quad (I \text{ de } (H^{1/2}(\Gamma))^3)$$

ii) $B((u_0, 0), (q, 0)) = 0 \quad \forall q \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3$ solution de

$$\frac{1}{2}(-I+J)(q) = 0 \quad (I \text{ de } (H^{-1/2}(\Gamma))^3).$$

Démonstration:

1. Trouver de i) revient à résoudre le problème

$$\text{P.D.I.} \quad \begin{cases} -Au + k^2u = 0 & \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

sous forme d'un potentiel de double couche. $u = -\dot{E}^*(\varphi \delta_{\Gamma})$.

Or on sait que le problème de Dirichlet intérieur admet une solution si et seulement si on a:

$B((u_0, 0), (Tv, 0)) = 0$ pour tout v valeur propre du problème de Dirichlet intérieur. On obtient le résultat en suivant le raisonnement fait pour démontrer le théorème II.3.

2. On a besoin de l'unicité de la solution du problème de Dirichlet extérieur. La condition de Sommerfeld est remplacée par une *condition de radiation* [N2] [K2].

$$|u| = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad r \rightarrow \infty$$

$$|T(u) - iT_1(u)| = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad r \rightarrow \infty$$

avec $T_1(u) = (\lambda + 2\mu)k_1(u \cdot n)n + \mu k_2(u - (u \cdot n)n)$

$$k_1 = \frac{k}{\sqrt{2\mu + \lambda}} \quad k_2 = \frac{\omega}{\sqrt{\mu}}$$

Lemme III.3: [N2]

$\Omega' = \mathbb{R}^3 / \Omega$ connexe (Ω borné) Γ lipschitzienne, alors

$$\begin{aligned} -Au + k^2u &= 0 & \Omega' \\ u &= 0 & \Gamma \end{aligned}$$

$u \in (H^1_{loc}(\Omega'))^3$, vérifiant les conditions de radiation, admet pour seule solution la solution nulle.

Lemme III.4:

Avec le même choix de Ω , on a équivalence entre les deux propriétés:

i) k^2 valeur propre du problème

$$\begin{aligned} -A(u) + k^2u &= 0 & \Omega & \quad u \in (H^1(\Omega))^3 \\ u &= 0 \end{aligned}$$

ii) $\exists q \in (H^{-1/2}(\Gamma))^3$ solution de $\frac{1}{2}(-I + J)(q) = 0$

de plus $q = T(v)$ pour tout v valeur propre de i).

Le lemme III.4 se démontre de même façon que le lemme II.5. Puis de i. et de ii) du lemme III.4, on déduit le théorème.

IV. COMPLEMENTS:

On peut traiter de la même façon $\frac{1}{2} (I+K)(\varphi)=u_0$, $\frac{1}{2} (-I+K)(\varphi)=u_0$; $\frac{1}{2} (I+J)(q)=g$ et $\frac{1}{2} (-I+J)(q)=g$, ainsi que des problèmes mêles, tant pour l'opérateur de Laplace que pour l'opérateur de l'élasticité.

Le lemme III.3 se démontre dans les différentes hypothèses [L] (on trouve $\frac{1}{2} (-I+J)(q)=g$ dans Dautray-Lions chap. XI. B [D.L.]). On obtient l'analogie des théorèmes II.3 et III.2,

On pourra trouver les résultats en détail ainsi que pour la dimension 2, et $n \geq 3$, dans les publications mathématiques de Besançon [L].

Bibliographie:

- [B] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, 1983.
- [C1] M. CESSENAT. *Résolution de problèmes de Maxwell en régime harmonique par des méthodes intégrales*. CEA, 1987.
- [C2] M. CESSENAT. *Communication personnelle*, 1989.
- [D.L.] M. DAUTRAY, J. L. LIONS. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*. Masson, 1987.
- [DU.L.] G. DUVAUT, J. L. LIONS. *Les inéquations en mécanique et physique*. Dunod, 1972.
- [K1] V. D. KUPRADZE. *Potential methods in the theory of elasticity*. Oldbourne Press, 1965.
- [K2] V. D. KUPRADZE. *Three dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*. North-Holland, 1979.
- [L] M. Th. LACROIX. A paraître aux P.M.B.
- [L.M.] J. L. LIONS, E. MAGENES. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Dunod, 1968.
- [N] J. NECAS. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson, 1967.
- [N1] J. Cl. NEDELEC. *Approximation des équations intégrales en mécanique et en physique*. Cours polytechnique, 1977.
- [N2] J. Cl. NEDELEC. *The double layer potential periodic elastic waves in \mathbb{R}^3* . Proceedings international conference. Beijing China, 1986.

Equipe de Mathématiques
U.A. - C.N.R.S. n.º 744
Laboratoire de Mathématiques
UFR Sciences et Techniques
16, Route de Gray
F - 25030 BESANCON CEDEX

Recibido: 8 de enero de 1990