REVISTA MATEMATICA de la
Universidad Complutense de Madrid
Volumen 3, número 1; 1990.
http://dx.doi.org/10.5209/rev_REMA.1990.v3.n1.18042

Approximations de la fonction de Heaviside et résultats d'unicité pour une classe de problèmes quasilinéaires elliptiques-paraboliques

G. GAGNEUX and F. GUERFI

ABSTRACT. In this paper, we concern ourselves with uniqueness results for an elliptic-parabolic quasilinear partial differential equation describing, for instance, the pressure of a fluid in a three-dimensional porous medium: within the frame of mathematical modelling of the secondary recovery from oil fields, the handling of the component conservation laws leads to a system including such a pressure equation, locally elliptic or parabolic according to the evolution of the gas phase.

INTRODUCTION

La mécanique des fluides en milieu poreux donne lieu en particulier à un grand nombre de problèmes quasilinéaires paraboliques dégénérés du type de la diffusion-convection; en effet, l'équation qui gouverne les phénomènes d'écoulements de fluides visqueux est obtenue à partir de la loi de conservation de masse, à laquelle on doit associer des lois de comportement macroscopiques (loi de Muskat-Darcy par exemple); certaines fonctions-paramètres de l'équation, telles l'expression de tenseur de diffusivité ou de la mobilité massique par exemple ne dépendent pas uniquement des variables géométriques mais varient de manière sensible en fonction des variations de l'inconnue du problème.

Ainsi est-on amené à étudier des problèmes de Cauchy associés à l'équation en l'inconnue u,

$$\text{(E)} \qquad c(x)\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(A(.,u)\nabla u) + \operatorname{div}(\psi(u)\nabla p) = f, \, c(x) \geq 0 \ ,$$

jointe à des conditions de bord mêlées, où $A(.,.)$ est un tenseur d'ordre 2, dont les coefficients sont des fonctions de Carathéodory connues de l'expérimentateur assurant une propriété d'uniforme ellipticité.

1980 Mathematics Subject Classification (1985 revision): 35K55, 35J60, 58G11.
Editorial de la Universidad Complutense. Madrid, 1990.

Dans les régions où la fonction c est nulle, l'équation devient elliptique, éventuellement paramétrée par le temps, alors qu'elle est parabolique en dehors de ces régions. Ce changement de nature mathématique illustre souvent en pratique un changement d'état physique, comme par exemple cela peut être le cas pour un système fluide, localement compressible (i.e. là où c est strictement positive) et ailleurs incompressible (i.e. là où c s'annule), ou bien dans les systèmes de l'hydrologie (cas de l'irrigation goutte à goutte dans le modèle de Richards) où l'on distingue les régions saturées en eau et les zones sous-saturées à humidifier.

L'étude du cas stationnaire correspondant, outre son intérêt physique propre, permet, comme cela est bien connu, une approche du problème d'évolution, soit numérique, par des techniques de semi-discrétisation par rapport à la variable de temps, soit théorique, par des méthodes de semi-groupes, au sens des bonnes-solutions (mild-solution en anglais).

Dans sa première partie, cet article étudie le cas stationnaire; formulés par semi-discrétisation en temps généralement, les résultats d'existence sont obtenus sans difficultés particulières grâce à des théorèmes de point fixe du type de Schauder; on propose ici des résultats d'unicité à partir, pour fixer les idées, d'un exemple pratique issu des modèles de l'ingénierie pétrolière (équation dite de la «pression», introduite dans [9]). La deuxième partie traite d'une équation d'évolution.

Pour cela, on montre l'intérêt de construire des approximations lipschitziennes de la fonction de Heaviside adaptées à la nature de la quasi-linéarité de l'équation, dans l'esprit des méthodes développées en particulier par N. S. TRUDINGER [10], Ph. BENILAN [2] et M. ARTOLA [1].

I - PROBLEME STATIONNAIRE APRES SEMI-DISCRETISATION

1. Les données du problème

On introduit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^3$, figurant la roche-réservoir, de bord Γ possédant en tout point un vecteur normal extérieur $\vec{n}$ et supposé a priori régulier.

On considére la division de Γ en les trois régions ouvertes disjointes Γ_e, Γ_s, Γ_L telles que

$$\Gamma = \Gamma_L \cup \Gamma_e \cup \Gamma_s \cup \partial\Gamma_L, \overline{\Gamma}_s \cap \overline{\Gamma}_e = \emptyset.$$

Γ_e et Γ_s étant de $d\Gamma$-mesure strictement positive.

On propose d'étudier le problème variationnel *(P)*:

$$(P)\begin{cases} \text{trouver } P\in H^1(\Omega) \text{ telle que} \\ \int_\Omega c(x)\,(P-P^\circ)\,v\,dx+\int_\Omega d(x,P)\nabla P.\nabla v\,dx+\int_{\Gamma_s}\lambda(x)\,Pv\,d\Gamma=\int_{\Gamma_e} fv\,d\Gamma, \\ \hfill \forall v\in H^1(\Omega), \end{cases}$$

où:

$f\in L^2(\Gamma_e)$, $f\geq 0$ p.p. sur Γ_e en pratique,

$\lambda\in L^\infty(\Gamma_s)$, $\lambda(x)\geq 0$ p.p. sur Γ_s,

$d\Gamma-\text{mes}\{x\in\Gamma_s, \lambda(x)>0\}>0$,

$c\in L^\infty(\Omega)$, $c(x)\geq 0$ p.p. sur Ω,

avec $\Omega^+=\{x\in\Omega, c(x)>0\}$,

P° étant donné enfin dans $L^2(\Omega^+)$, la donnée de P° dans la région d'annulation de c étant sans objet.

En pratique, $c(x)$ peut représenter au point x la saturation de la phase gazeuse [cf.[9] par exemple] et P représente la pression d'une phase de référence,
et : (1) d est une fonction de Carathéodory sur $\Omega\times\mathbb{R}$:

i) pour presque tout x, $\tau\to d(x,\tau)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

ii) $\forall\tau, x\to d(x,\tau)$ est mesurable.

En outre, on suppose que :

$$(1)\begin{cases} \exists\,\alpha>0, \forall(x,\tau)\in\Omega\times\mathbb{R}, \\ \qquad d(x,\tau)\geq\alpha, \\ \exists\, l\geq 0,\ \forall(x,\tau)\in\Omega\times\mathbb{R},\quad \forall(x,\tau')\in\Omega\times\mathbb{R}, \end{cases}$$

$$|d(x,\tau)-d(x,\tau')|\leq l\,|\tau-\tau'|,$$

i.e. d est lipschitzienne en τ, uniformément par rapport à la variable d'espace.

Proposition: *Le problème (P) avec les hypothèses (1) et (2) admet une solution unique.*

Remarque: Pour la démonstration, on utilise des techniques dues à N.S. TRUDINGER et développées récemment par M. ARTOLA [1], G. GAGNEUX [8], à propos d'une classe de problèmes paraboliques quasilinéaires, et CHIPOT-CARRILLO [4] pour des problèmes elliptiques non linéaires.

La méthode se fonde sur l'utilisation d'approximations lipschitziennes, croissantes, de la fonction de Heaviside, adaptées à la structure du problème; cette technique généralise les méthodes de troncature employée par GILBARG-TRUDINGER [10], à la suite de G. STAMPACCHIA [12].

L'originalité de ces développements réside dans l'emploi systématique de fonctions-tests *modelées selon la nature de la quasi-linéarité de l'équation* et dont le principe peut être trouvé dans P. BENILAN [2], dans le cadre de la mise en oeuvre de L^1-techniques.

Enfin, il peut sembler intéressant de noter que les difficultés observées du point de vue analytique lorsque c est nulle se retrouvent lors du traitement numérique par les méthodes usuelles de résolution de grands systèmes linéaires, pour lesquelles les matrices définissant les algorithmes de calcul ne sont plus à diagonale dominante.

Démonstration: L'existence s'établit facilement par le théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff; pour l'unicité, on considère P, $\hat{P}$ deux éventuelles solutions de *(P)*; on a:

$$(1.1)\quad \begin{cases} \int_\Omega c(x)(P-\hat{P})\, v\, dx + \int_\Omega [d(x,P)\nabla P - d(x,\hat{P})\nabla\hat{P}].\ \nabla v\; dx + \\ \quad + \int_{\Gamma_s} \lambda(x)(P-\hat{P})\, v\, d\Gamma = 0, \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

Posons: $w = P - \hat{P}$;

On a:

$$(1.2)\quad \{\, d(x,P)\nabla P - d(x,\hat{P})\nabla\hat{P} = [d(x,P) - d(x,\hat{P})]\nabla\hat{P} + [\nabla(P-\hat{P})]\, d(x,P).$$

On remarquera que cette décomposition montre que les résultats s'étendent sans difficulté à l'équation complète (E), i.e. avec terme de transport, lorsque ψ est lipschitzienne.

Soit la fonction s_δ, définie par:

$$s_\delta(r) = \frac{(r-\delta)^+}{r} = \begin{cases} \dfrac{r-\delta}{r}, & \text{si } r \geq \delta > 0 \quad ; \\ 0 & , \text{si } r \leq \delta \end{cases}$$

s_δ est une approximation lipschitzienne croissante, nulle à l'origine de la fonction sign_0^+, de module Lipschitz $(1/_\delta)$, en usage dans [3].

On prend $v=s_\delta(w)$ dans l'équation (1.1); ce choix est loisible d'après de lemme de MARCUS-MIZEL [11], généralisant le lemme de G. STAMPACCHIA [12].

i.e. : pour $w\in H^1(\Omega)$, alors $v\in H^1(\Omega)$ et $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}=s'_\delta(w)\dfrac{\partial w}{\partial x_i}$, p.p. dans Ω.

On a alors:

$$\int_\Omega c(x)\,w\,s_\delta(w)\,dx+\int_\Omega d(x,P)\nabla w.\,\nabla s_\delta(w)\,dx+$$
$$+\int_{\Gamma_s}\lambda(x)\,w\,s_\delta(w)\,d\Gamma=\int_\Omega[d(x,\hat P)-d(x,P)]\nabla\hat P.\nabla s_\delta(w)\,dx\;.$$

Plus précisément, il vient

$$\int_\Omega c(x)\,w\,s_\delta(w)\,dx+\delta\int_{[w\geq\delta]}d(x,P)\frac{|\nabla w|^2}{w^2}\,dx+\int_{\Gamma_s}\lambda w\;s_\delta(w)\,d\Gamma$$
$$=\delta\int_{[w\geq\delta]}[d(x,\hat P)-d(x,P)]\nabla\hat P.\,\frac{\nabla w}{w^2}\,dx\leq$$
$$\leq\delta l\int_{[w\geq\delta]}|w|\;\frac{|\nabla\hat P.\nabla w|}{w^2}\,dx=\delta l\int_{[w\geq\delta]}\frac{|\nabla\hat P.\nabla w|}{w}\,dx\,.$$

Puisque $d(x,P)\geq\alpha>0$, on a

$$\int_\Omega c(x)\,s_\delta(w)\,w\,dx+\delta\alpha\int_{[w\geq\delta]}\frac{|\nabla w|^2}{w^2}\,dx+\int_{\Gamma_s}\lambda w\;s_\delta(w)\,d\Gamma\leq$$
$$\leq\delta l\int_{[w\geq\delta]}\frac{|\nabla\hat P.\nabla w|}{w}\,dx\leq\frac{\delta l}{2}\Big[\alpha_0\int_{[w\geq\delta]}|\nabla\hat P|^2\,dx+$$
$$+\frac{1}{\alpha_0}\int_{[w\geq\delta]}\frac{|\nabla w|^2}{w^2}\,dx\Big]\;;$$

on prend $\alpha_0=\dfrac{l}{\alpha}$.

Donc, a fortiori, on dispose de l'estimation:

$$(1.3)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_\Omega c(x)\,w\,s_\delta(w)\,dx+\frac{\delta\alpha}{2}\int_{[w\geq\delta]}\frac{|\nabla w|^2}{w^2}\,dx+\int_{\Gamma_s}\lambda w\,s_\delta(w)\,d\Gamma\leq\\&\leq\frac{\delta l^2}{2\alpha}\;\|\hat P\|^2_{H^1(\Omega)}\quad;\end{aligned}\right.$$

or, on dispose de la propriété de positivité:

$c(x)\,w\,s_\delta(w)\geq 0$, car s_δ croissante, nulle à l'origine et $c(x)\geq 0$ p.p. dans Ω,

ce qui donne:

$$\int_\Omega c(x)\,w\,s_\delta(w)\,dx\geq 0\,,\quad \int_{\Gamma_s}\lambda(x)\,w\,s_\delta(w)\,d\Gamma\geq 0\,.$$

Donc, de (1.3), on a:

$$\frac{\delta\alpha}{2}\int_{[w\geq\delta]}\frac{|\nabla w|^2}{w^2}\,dx\leq\frac{\delta}{2}\,\frac{l^2}{\alpha}\,\|\hat{P}\|^2_{H^1(\Omega)}\quad,$$

d'où:

$$\int_{[w\geq\delta]}\frac{|\nabla w|^2}{w^2}\,dx\leq\frac{l^2}{\alpha^2}\,\|\hat{P}\|^2_{H^1(\Omega)}\quad\leq C,(C,\text{ indépendante de }\delta)\quad,$$

ce qui s'écrit également:

$$(1.4)\qquad \int_\Omega\left|\nabla\,\mathrm{Log}\left(1+\frac{(w-\delta)^+}{\delta}\right)\right|^2\,dx\leq C.$$

On a aussi de (1.3):

$$(1.5)\qquad \int_{\Gamma_s}\lambda(x)\,w\,s_\delta(w)\,d\Gamma\leq\delta.C\;;$$

or: $\quad|\lambda(x)\,w\,s_\delta(w)|\;\leq\;\lambda(x)\;|w|\in L^2(\Gamma_s)$,

et: $\quad\lambda(x)\,w(x)\,s_\delta(w(x))_{/\Gamma_s}\xrightarrow[\delta\to 0]{}\lambda(x)\quad w(x)^+{}_{/\Gamma_s}$, p.p. sur Γ_s ;

donc le théorème de la convergence dominée de Lebesgue assure que

$$\int_{\Gamma_s}\lambda(x)\,w\,s_\delta(w)\,d\Gamma\xrightarrow[\delta\to 0]{}\int_{\Gamma_s}\lambda(x)\,w^+\,d\Gamma\;;$$

de (1.5), on a: $\int_{\Gamma_s}\lambda\,w^+\,d\Gamma\;\leq\;0$.

Puisque mes $(\Gamma_s^+=\{x\in\Gamma_s,\lambda(x)>0\})>0$, il s'ensuit que $w^+=0$, presque partout sur Γ_s^+, ce qui implique

$$(1.6)\qquad w(x)\;\leq\;0\;,\;\text{p.p. sur }\Gamma_s^+.$$

Posons $\chi_\delta=\mathrm{Log}\left(1+\dfrac{(w-\delta)^+}{\delta}\right)$; la fonction $x\to\mathrm{Log}\,(1+x)$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$ nulle à l'origine et $\frac{(w-\delta)^+}{\delta} \in H^1(\Omega)$; alors, les lemmes de Marcus-Mizel et de G. Stampacchia et (1.6) impliquent aussi:

$$(1.7)\quad \begin{cases} \chi_\delta \in H^1(\Omega), \\ \chi_\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_s^+, \left(\text{car}: w \leq 0, \text{p.p. sur } \Gamma_s^+ \text{ implique}: \frac{(w-\delta)^+}{\delta} = 0, \text{p.p. sur } \Gamma_s^+\right) \end{cases}$$

de (1.4), on a: $\int_\Omega |\nabla\chi_\delta|^2 dx \leq C$, ce qui implique, en appliquant l'inégalité de Poincaré, ici loisible, que:

$$(1.8)\qquad \|\chi_\delta\|_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left| \operatorname{Log}\left(1 + \frac{(w-\delta)^+}{\delta}\right)\right|^2 dx \leq \tilde{C}, \forall \delta > 0,$$

$\tilde{C}$ étant une constante indépendante de δ, ce qui entraîne que w est négatif ou nul, presque partout dans Ω.

En effet, sinon, il existerait un réel α_o strictement positif et $\Omega_o \subset \Omega$, de mesure non nulle, tels que

$$w \geq \alpha_o > 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega_o,$$

et donc pour δ suffisamment petit,

$$(w-\delta)^+ \geq \frac{\alpha_o}{2} \quad \text{p.p. dans } \Omega_o,$$

d'où, d'après (1.8),

$$\int_{\Omega_o} \left| \operatorname{Log}\left(1 + \frac{\alpha_o}{2\delta}\right)\right|^2 dx \leq \int_\Omega \left| \operatorname{Log}\left(1 + \frac{(w-\delta)^+}{\delta}\right)\right|^2 dx \leq \tilde{C},$$

ce qui est impossible, lorsque δ tend vers 0^+.

En inversant le rôle de P et de $\hat{P}$, il s'ensuit que $w = 0$ p.p. dans Ω d'où finalement $P = \hat{P}$ presque partout dans Ω.

2. Généralisation

La méthode de l'unicité du problème (P) peut être généralisée au problème (P') avec:

(H) $\left\{\begin{array}{l} \exists\, \theta : \tau \to \theta(\tau) \text{ définie de } [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}^+, \textit{ telle que cette fonction soit conti-} \\ \textit{nue, croissante, bornée et } \theta(0)=0, \textit{ avec:} \\ \qquad\qquad |\, d(x,P) - d(x,\hat{P})\,| \leq \theta(|P-\hat{P}|) \\ \textit{et de plus, on suppose que:} \\ \qquad\qquad \displaystyle\int_{\to 0^+} \frac{\mathrm{d}\tau}{\theta(\tau)} = +\infty . \end{array}\right.$

Ces hypothèses remplacent le fait que $d(x,\tau)$ est uniformément lipschitzienne par rapport à τ.

Preuve:

soit P, $\hat{P}$ deux éventuelles solutions de *(P')*.

Posons $w = P - \hat{P}$.

Soit $w_\eta^+ = \mathrm{Sup}(w^+ - \eta, 0)$ élément de $H^1(\Omega)$, $\forall \eta > 0$.

A la suite de M. ARTOLA [1], on définit $\forall \eta > 0$, la fonction ψ_η par:

(2.1) $$\psi_\eta(\tau) = \int_0^\tau \frac{\mathrm{d}\sigma}{[\theta(\overline{\eta+\sigma})]^2} .$$

On vérifie que:

$$\left\{\begin{array}{l} \forall \eta > 0,\ \psi_\eta \text{ est de classe } C^1,\ \psi_\eta(0) = 0,\ \psi'_\eta \text{ est bornée,} \\ \psi_\eta \text{ est croissante,} \\ \forall \eta > 0, \forall v \in H^1(\Omega), \psi_\eta \circ v \in H^1(\Omega). \end{array}\right.$$

Prenant dans l'équation de *(P)*, $v = \psi_\eta \circ w_\eta^+$, on a:

$$\int_\Omega c(x)\, w\, \psi_\eta(w_\eta^+)\, dx + \int_\Omega d(x,P) \nabla w . \nabla \psi_\eta(w_\eta^+)\, dx + \int_{\Gamma_s} \lambda w\, \psi_\eta(w_\eta^+)\, \mathrm{d}\Gamma =$$

$$= -\int_\Omega [d(x,P) - d(x,\hat{P})] \nabla \hat{P} . \nabla \psi_\eta(w_\eta^+)\, dx .$$

or:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[\psi_\eta(w_\eta^+)] = \frac{\partial}{\partial x_i}(w_\eta^+) \frac{1}{[\theta(\eta + w_\eta^+)]^2}, \text{ d'où:}$$

$$\int_{\Omega} c(x) w \psi_\eta(w_\eta^+)\, dx + \alpha \int_{\Omega} \frac{|\nabla w_\eta^+|^2}{[\theta(\eta + w_\eta^+)]^2}\, dx + \int_{\Gamma_s} \lambda w \psi_\eta(w_\eta^+)\, d\Gamma \leq$$

$$\leq \int_{\Omega} \frac{\theta(w_\eta^+)\, |\nabla \hat{P}| \cdot |\nabla w_\eta^+|}{[\theta(\eta + w_\eta^+)]^2}\, dx \leq \int_{\Omega} |\nabla \hat{P}| \cdot \frac{|\nabla w_\eta^+|}{\theta(\eta + w_\eta^+)}\, dx \leq$$

$$\left(\text{car}: 0 \leq \frac{\theta(w_\eta^+)}{\theta(w_\eta^+ + \eta)} \leq 1 \text{ puisque } \theta \text{ est croissante}\right),$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha}\, \|\hat{P}\|^2_{H^1(\Omega)} + \alpha \int_{\Omega} \frac{|\nabla w_\eta^+|^2}{[\theta(\eta + w_\eta^+)]^2}\, dx\right],$$

d'où l'estimation:

$$\text{(2.2)} \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega} c(x) w \psi_\eta(w_\eta^+)\, dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \frac{|\nabla w_\eta^+|^2}{[\theta(\eta + w_\eta^+)]^2}\, dx + \int_{\Gamma_s} \lambda w \psi_\eta(w_\eta^+)\, d\Gamma \leq \\ \displaystyle\leq \frac{1}{2\alpha}\, \|\hat{P}\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_1, \text{(indépendant de } \eta). \end{cases}$$

or:

$$(*) \int_{\Omega} c(x) w \psi_\eta(w_\eta^+)\, dx = \int_{\Omega} c(x) w^+ \psi_\eta(w_\eta^+)\, dx \geq 0$$

$$\text{car } c(x) \geq 0,\, w^+ \geq 0,\, \psi_\eta(w_\eta^+) \geq 0,$$

$$(*) \int_{\Gamma_s} \lambda w \psi_\eta(w_\eta^+)\, d\Gamma = \int_{\Gamma_s} \lambda w^+ \psi_\eta(w_\eta^+)\, d\Gamma \geq 0.$$

Donc

$$\text{(2.3)} \quad \text{de (2.2), on a: } \int_{\Omega} \frac{|\nabla w_\eta^+|^2}{[\theta(\eta + w_\eta^+)]^2}\, dx \leq C, \text{ indépendamment de } \eta,$$

et:

$$\text{(2.4)} \quad \int_{\Gamma_s} \lambda w^+ \psi_\eta(w_\eta^+)\, d\Gamma \leq C \text{ (indépendant de } \eta).$$

On introduit $\Gamma_s^+ = \{x \in \Gamma_s ; \lambda(x) > 0\}$, mes $(\Gamma_s^+) > 0$.

Montrons que: $w^+/_{\Gamma_s^+} = 0$, presque partout ; pour cela, on observe que de (2.4), on a: $\forall \rho > 0$; l'ensemble $E_\rho = \{x \in \Gamma_s^+ ; w(x) \geq \rho, \text{ p.p.}\}$ est de mesure nulle ; en effet, s'il n'en était pas ainsi, en raisonnant par l'absurde, il existerait $\rho_o>0$, tel que: mes $(E_{2\rho_o})>0$ et vérifiant:

$$2\int_{E_{2\rho_o}} \lambda \cdot \rho_o \left[\int_o^{w_\eta^+} \frac{d\sigma}{[\theta(\eta+\sigma)]^2} \right] d\Gamma \leq C.$$

On peut supposer que $(\eta<\rho_o)$, d'où l'estimation:

$$2\int_{E_{2\rho_o}} \lambda \rho_o \left[\int_o^{\rho_o} \frac{d\sigma}{[\theta(\eta+\sigma)]^2} \right] d\Gamma \leq \int_{\Gamma_s} \lambda w^+ \psi_\eta(w_\eta^+)\, d\Gamma \leq C; \tag{2.5}$$

or: $$\int_{E_{2\rho_o}} \lambda \rho_o \int_o^{\rho_o} \frac{d\sigma}{[\theta(\eta+\sigma)]^2}\, d\Gamma \geq \lambda_o \rho_o \text{ mes } (E_{2\rho_o}) \int_o^{\rho_o} \frac{d\sigma}{[\theta(\eta+\sigma)]^2},$$

car $\lambda(x)>0$ sur $E_{2\rho_o}$, et on peut se ramener à supposer

$$\exists\, \lambda_o>0 ;\ \lambda(x) \geq \lambda_o, \text{p.p. sur } E_{2\rho_o}, (\lambda \in L^\infty(\Gamma_s)) ;$$

alors,

de (2.5), on a: $\displaystyle\int_o^{\rho_o} \frac{d\sigma}{[\theta(\eta+\sigma)]^2} \leq \hat{C}$ ($\hat{C}$ indépendant de η).

En faisant le changement de variable: $x=\eta+\sigma$, il vient en particulier:

$$\lim_{\eta\to o^+} \int_\eta^{\rho_o+\eta} \frac{dx}{[\theta(x)]^2} \leq C; \tag{2.6}$$

or, l'hypothèse (H) implique, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que

$$\int_{\to o+} \frac{dx}{[\theta(x)]^2} = +\infty, \text{ce qui contredit (2.6)} ;$$

on a alors: $\forall \rho>0$, mes $(E_\rho)=0$, d'où $w^+(x)=0$, p.p. sur Γ_s^+ et donc finalement:

$$w \leq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_s^+. \tag{2.7}$$

Introduisons la fonction: $\displaystyle\chi_\eta(\tau)=\int_o^\tau \frac{d\sigma}{\theta(\eta+\sigma)}$.

alors de (2.3), on a:

$$(2.8) \qquad |\nabla \chi_\eta(w_\eta^+)|_{(L^2(\Omega))^{n=3}} \leq C;$$

on dispose désormais des propriétés suivantes:

$$(2.9) \begin{cases} \chi_\eta(w_\eta^+) \in H^1(\Omega), \\ \chi_\eta(w_\eta^+)_{/\Gamma_s^+} = 0, \text{ car de (2.7), on a } w_\eta^+ = 0 \text{ p.p. dans } \Gamma_s^+. \end{cases}$$

On peut alors utiliser l'inégalité de Poincaré ici loisible, et de (2.8), on déduit l'existence d'une constance C, indépendante de η, telle que

$$(2.10) \qquad |\chi_\eta(w_\eta^+)|_{L^2(\Omega)} \leq \overline{C}.$$

On refait le même raisonnement que lors de l'obtention de (2.7) .

On a:

$$(2.11) \qquad \int_\Omega \left| \int_0^{w_\eta^+} \frac{d\sigma}{\theta(\eta+\sigma)} \right|^2 dx \leq \overline{C}, \ \forall \eta > 0.$$

Alors, $\forall \rho > 0$ l'ensemble $E_\rho = \{x \in \Omega : w^+(x) \geq \rho, \text{ p.p.}\}$ est de mesure nulle.

En effet, raisonnons par l'absurde: sinon, il existerait un réel ρ_0 strictement positif, tel que mes $(E_{2\rho_0}) > 0$. Dès lors, en choisissant η suffisamment petit, on aurait

$$\int_{E_{2\rho_0}} \left| \int_0^{\rho_0} \frac{d\sigma}{\theta(\eta+\sigma)} \right|^2 dx \leq \int_\Omega \left| \int_0^{w_\eta^+} \frac{d\sigma}{\theta(\eta+\sigma)} \right|^2 dx \leq \overline{C}; \ \forall \eta > 0,$$

et donc en particulier, on pourrait écrire:

$$\text{mes } (E_{2\rho_0}) \left| \int_0^{\rho_0} \frac{d\sigma}{\theta(\eta+\sigma)} \right|^2 \leq \overline{C}, \ \forall \eta > 0.$$

Faisant le changement de variable défini par:

$$x = \eta + \sigma,$$

il vient que la limite de $\displaystyle\int_\eta^{\rho_0+\eta} \frac{dx}{\theta(x)}$ est finie, lorsque η tend vers 0^+, ce qui contredit l'hypothèse (H).

Donc, $\forall \rho > 0$, mes $(E_\rho) = 0$, ce qui implique que $w^+ = 0$ p.p. dans Ω et donc $w \leq 0$ p.p. dans Ω, d'où finalement $w = 0$ p.p. dans Ω et l'égalité presque partout dans Ω de P et $\hat{P}$, en leur faisant jouer les rôles symétriques.

3 - Remarque

Supposons que: $(x, \tau) \to d(x, \tau)$ est telle que:

$$(\tilde{\mathrm{H}}) \ |d(x, \tau) - d(x, \tau')| \leq l. \, |\tau - \tau'|^\beta, \ \forall x \in \Omega, \text{ i.e. } \theta(\tau) = 0(\tau^\beta);$$

alors la condition:

$$\int_{\to 0^+} \frac{d\tau}{\theta(\tau)} = +\infty \text{ est vérifiée uniquement pour } \beta = 1.$$

Proposition: *Pour le cas où* $\beta \in [1/2, 1[$, *on dispose de l'information: la solution P du problème* (P) *est définie d'une manière unique dans* Ω^+ *et sur* Γ_s^+, $\Gamma_s^+ = \{x \in \Gamma_s ; \lambda(x) > 0\}$.

Démonstration:

On se place dans la situation où:

$$|d(x, \tau) - d(x, \tau')| \leq \theta(|\tau - \tau'|) \text{ indépendamment de } x,$$

avec: θ est croissante, bornée continue et $\theta(0) = 0$,

$\theta : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ a un comportement au voisinage de l'origine tel que:

$$\int_{\to 0^+} \frac{ds}{\theta^2(s)} = +\infty, \tag{3.1}$$

ce qui admet comme cas particulier l'hypothèse $(\tilde{\mathrm{H}})$ décrite plus haut.

La démonstration peut se faire à partir de (2.2), qui implique que:

$$\int_\Omega c(x) w^+ \psi_\eta(w_\eta^+) \, dx \leq C, \quad \forall \eta > 0 \tag{3.2}$$

$$\int_{\Gamma_s} \lambda w^+ \psi_\eta(w_\eta^+) \, d\Gamma \leq C, \quad \forall \eta > 0. \tag{3.3}$$

En introduisant les ensembles:

$$E_\rho = \{x \in \Gamma_s^+, w(x) \geq \rho, \text{p.p.}\}, \ F_\rho = \{x \in \Omega^+, w(x) \geq \rho, \text{ p.p.}\}, \forall \rho > 0,$$

et en supposant que:

$$\exists\, \lambda_0 > 0 \,;\, \lambda(x) \geq \lambda_0 \text{ p.p. sur } E_{\rho_0}$$

$$\exists\, \alpha_0 > 0 \,;\, c(x) \geq \alpha_0 \text{ p.p. sur } F_{\rho_0}$$

le résultat se déduit de la même façon que pour (2.7).

On peut également établir cette remarque en introduisant d'après CARRILLO J. et CHIPOT M. [4], l'approximation P_ϵ, lipschitzienne, croissante nulle à l'origine de la fonction sign_0^+, définie comme suit: de (3.1), on a:

$$(3.4)\quad \begin{cases} \forall \epsilon > 0\,;\ \exists!\, \delta = \delta(\epsilon) \text{ avec } 0 < \delta < \epsilon, \text{ tel que} \displaystyle\int_\delta^\epsilon \frac{ds}{\theta^2(s)} = 1, \\ P_\epsilon(r) = \begin{cases} 0 \text{ si } r \leq \delta, \\ \displaystyle\int_\delta^r \frac{ds}{\theta^2(s)} \text{ si } \delta \leq r \leq \epsilon, \\ 1 \text{ si } r \geq \epsilon. \end{cases} \end{cases}$$

Pour d'autres choix possibles, on pourra se reporter à [8].

Soit P, $\hat{P}$ deux éventuelles solutions de (P).

Posons $w = P - \hat{P}$ et on prend dans l'équation de (P), $v = P_\epsilon(w)$, ce qui est loisible d'après les lemmes de Marcus-Mizel et G. Stampacchia. On a:

$$\int_\Omega c(x)\, w\, P_\epsilon(w)\, dx + \int_\Omega d(x, P) \nabla w \cdot \nabla P_\epsilon(w)\, dx +$$

$$+ \int_{\Gamma_s} \lambda w\, P_\epsilon(w)\, d\Gamma \leq \int_\Omega |d(x, P) - d(x, \hat{P})|\ |\nabla \hat{P} \cdot \nabla P_\epsilon(w)|\, dx \leq$$

$$\leq \int_{[\delta \leq w \leq \epsilon]} \theta(w) \left| \nabla \text{P} . \frac{\nabla w}{\theta^2(w)} \right| dx \leq \frac{\alpha}{2} \int_{[\delta \leq w \leq \epsilon]} \frac{|\nabla w|^2}{\theta^2(w)} dx + C(\alpha) \int_{[\delta \leq w \leq \epsilon]} |\nabla \hat{P}|^2 dx$$

où α est tel que $d(x, P) \geq \alpha > 0$.

donc on a, en particulier:

$$(3.5)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega c(x)\, w\, P_\epsilon(w)\, dx + \int_{\Gamma_s} \lambda w\, P_\epsilon(w)\, d\Gamma + \frac{\alpha}{2} \int_{[\delta \leq w \leq \epsilon]} \frac{|\nabla w|^2}{\theta^2(w)}\, dx \leq \\ \qquad \leq C(\alpha) \displaystyle\int_{[\delta \leq w \leq \epsilon]} |\nabla \hat{P}|^2\, dx. \end{cases}$$

Si on note χ_ϵ la fonction caractéristique de l'ensemble $\{x \in \Omega; \delta \leq w(x) \leq \epsilon,$ p.p. $\}$, on observe que lorsque $\epsilon \to 0$, la fonction χ_ϵ tend presque partout sur Ω vers la fonction nulle.

Donc:

$$\int_{[\delta \leq w \leq \epsilon]} |\nabla \hat{P}|^2 dx = \int_\Omega \chi_\epsilon |\nabla \hat{P}|^2 dx, \text{ de sorte que,}$$

par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, il vient

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{[\delta \leq w \leq \epsilon]} |\nabla \hat{P}|^2 dx = 0.$$

De (3.5), on a:

$$0 \leq \int_\Omega c(x) w\, P_\epsilon(w) dx \leq C(\alpha) \int_{[\delta \leq w \leq \epsilon]} |\nabla \hat{P}|^2 dx,$$

et donc, à la limite, lorsque ϵ tend vers 0^+:

$$\int_\Omega c(x) w^+ dx = 0 \text{ (théorème de Lebesgue)}$$

et

$$0 \leq \int_{\Gamma_s} \lambda w\, P_\epsilon(w) d\Gamma \leq C(\alpha) \int_{[\delta \leq w \leq \epsilon]} |\nabla \hat{P}|^2 dx,$$

d'où: $\int_{\Gamma_s} \lambda\, w^+ d\Gamma = 0$ (théorème de Lebesgue), ce qui implique l'unicité de P dans les régions où c est non nulle et sur Γ_s^+.

4 - Résultats de comparaison pour: $\theta(\tau) = 0(\tau^\beta), \beta \in [1/2, 1]$.

Proposition

Soit P (resp. $\hat{P}$) solution du problème (P) *associé aux données P° et f (resp. $\hat{P}^\circ$ et $\hat{f}$), avec*

$$f \geq \hat{f} \text{ p.p. } sur\ \Gamma_e\ et\ P^\circ \geq \hat{P}^\circ \text{ p.p. } sur\ \Omega,$$

Alors, on a

$$P \geq \hat{P} \text{ p.p. } dans\ \Omega\ dans\ le\ cas\ particulier\ où\ \beta = 1,$$

$$P \geq \hat{P} \text{ p.p. } dans\ \Omega^+\ et\ sur\ \Gamma_s^+,\ sinon.$$

Plus généralement, on dispose de l'estimation:

$$\int_{\Gamma_s} \lambda (P - \hat{P})^+ d\Gamma + \int_\Omega c(x)(P - \hat{P})^+ dx \leq \int_{\Gamma_e} (f - \hat{f})^+ d\Gamma + \int_\Omega c(x)(P^\circ - \hat{P}^\circ)^+ dx.$$

En outre, on a, lorsque: $P^\circ = 0$ p.p. *dans* Ω^+, $0 \leq P(x) \leq \sup_{\Gamma_e} P$ p.p. *dans* Ω.

En effet, il vient par différence entre l'équation relative à P et l'équation relative à $\hat{P}$ et après avoir posé

$w = P - \hat{P}$:

$$(4.1) \begin{cases} \int_\Omega c(x)\, w\, v\, dx + \int_{\Gamma_s} \lambda\, w\, v\, d\Gamma + \int_\Omega d(x, P) \nabla w .\, \nabla v\, dx \leq \\ \leq \int_\Omega c(x)(P^\circ - \hat{P}^\circ)\, v\, dx + \int_{\Gamma_e} (f - \hat{f})\, v\, d\Gamma + \int_\Omega |d(x, P) - d(x, \hat{P})|\, |\nabla \hat{P} .\, \nabla v|\, dx. \end{cases}$$

Pour le cas particulier $\beta = 1$, on prend $v = s_\delta(w)$ introduit dans la partie (1), ce qui donne en particulier:

$$(4.2) \begin{cases} \int_\Omega c(x)\, w\, s_\delta(w)\, dx + \frac{\delta\alpha}{2} \int_{[w \geq \delta]} \frac{|\nabla w|^2}{w^2}\, dx + \int_{\Gamma_s} \lambda\, w\, s_\delta(w)\, d\Gamma \leq \\ \leq \frac{\delta\, \overline{l^2}}{2\alpha} \, \|\hat{P}\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_\Omega c(x)(P^\circ - \hat{P}^\circ)^+\, dx + \int_{\Gamma_e} (f - \hat{f})^+\, d\Gamma, \end{cases}$$

car: $c(x) \geq 0$ p.p. dans Ω et $0 \leq s_\delta(w) \leq 1$.

Pour: $P^\circ \leq \hat{P}^\circ$ p.p. dans Ω et $f \leq \hat{f}$ p.p. sur Γ_e, on remarque que (4.2) est identique à (1.3), ce qui permet de conclure que w est négatif ou nul, presque partout dans Ω, i.e. $P - \hat{P} \leq 0$, p.p. dans Ω, d'où le résultat.

Dans le cas où $\beta \in [1/2, 1[$, on prend $v = P_\epsilon(w)$, introduit dans la partie (3), dans (4.1); on a alors

$$\int_\Omega c(x)\, w\, P_\epsilon(w)\, dx + \int_{\Gamma_s} \lambda\, w\, P_\epsilon(w)\, d\Gamma + \frac{\alpha}{2} \int_{[\delta \leq w \leq \epsilon]} \frac{|\nabla w|^2}{\theta^2(w)}\, dx \leq$$

$$\leq C(\alpha) \int_{[\delta \leq w \leq \epsilon]} |\nabla \hat{P}|^2\, dx + \int_\Omega c(x)(P^\circ - \hat{P}^\circ)^+\, dx + \int_{\Gamma_e} (f - \hat{f})^+\, d\Gamma,$$

car: $c(x) \geq 0$, p.p. dans Ω et $0 \leq P_\epsilon(w) \leq 1$;
donc, en particulier

$$(4.3) \begin{cases} \int_{\Gamma_s} \lambda w\, P_\epsilon(w)\, d\Gamma + \int_\Omega c(x)(P - \hat{P})\, P_\epsilon(w)\, dx \leq C(\alpha) \int_{[\delta \leq w \leq \epsilon]} |\nabla \hat{P}|^2\, dx + \\ + \int_\Omega c(x)(P^\circ - \hat{P}^\circ)^+\, dx + \int_{\Gamma_e} (f - \hat{f})^+\, d\Gamma. \end{cases}$$

On passe à la limite, lorsque ϵ tend vers 0^+; on a l'estimation

$$\int_{\Gamma_s} \lambda (P-\hat{P})^+ d\Gamma + \int_\Omega c(x)(P-\hat{P})^+ dx \leq \int_{\Gamma_e} (f-\hat{f})^+ d\Gamma + \int_\Omega c(x)(P^\circ - \hat{P}^\circ)^+ dx;$$

posant $M = \sup_{\Gamma_e} P$, supposé exister, le résultat type principe du maximum est obtenu en prenant dans *(P)* la fonction test $v=(P-M)^+$, élément de $H^1(\Omega)$ à trace nulle sur Γ_e.

II - UNICITE DE LA SOLUTION D'UN PROBLEME D'EVOLUTION QUASILINEAIRE CHANGEANT DE TYPE (PARABOLIQUE-ELLIPTIQUE)

Cette partie développe et adapte des méthodes présentées par M. ARTOLA [1].

On considère *formellement* le problème variationnel:

Trouver $P \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$, vérifiant

$$(P_c) \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega c(x)\frac{dP}{dt}\, v\, dx + \int_\Omega d(x, P)\nabla P.\nabla v\, dx + \int_{\Gamma_s} \lambda\, P v\, d\Gamma \\ \quad = \displaystyle\int_{\Gamma_e} f v\, d\Gamma, \forall v \in H^1(\Omega) \text{ p.p. sur }]0, T[, \\ P(x, 0) = P_0(x) \text{ pour presque tout } x \text{ de } \Omega^+, \end{cases}$$

où: $\Omega^+ = \{x \in \Omega\,; c(x) > 0\}$, ouvert de Ω, en supposant en outre que:

i) $c \in C^\circ(\bar{\Omega}), \quad c(x) \geq 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}$,

ii) la donnée initiale P_0 est prolongeable sur Ω tout entier en $\hat{P}_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ qui vérifie:

$$(H_1) \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega d(x, \hat{P}_0)\nabla \hat{P}_0.\nabla v\, dx + \int_{\Gamma_s} \lambda\, \hat{P}_0\, v\, d\Gamma \geq \int_{\Gamma_e} f v\, d\Gamma, \\ \\ \qquad \forall v \in H^1(\Omega), v \geq 0, \text{ p.p. dans } \Omega. \end{cases}$$

— d est une fonction de Carathéodory sur $\Omega \times \mathbb{R}$,

— $d(x,.)$ est croissante uniformément en $x \in \Omega$,

— $\exists\, \alpha > 0 : d \geq \alpha$, sur $\Omega \times \mathbb{R}$.

iii) $\exists\, \theta : \tau \to \theta(\tau)$, définie de $[0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$, telle que cette fonction soit continue, croissante, bornée et $\theta(0) = 0$, avec:

$$\forall x \in \Omega, |d(x, P) - d(x, \hat{P})| \leq \theta(|P - \hat{P}|),$$

(H2) $$\text{et: } \int_{\to 0^+} \frac{d\tau}{\theta(\tau)} = +\infty.$$

Remarques:

Une dépendance lipschitzienne de d en la variable P uniformément en $x \in \Omega$ donne $\theta(\tau) = \tau k, k > 0$ qui vérifie iii).

Dans les applications de mécanique des fluides, la fonction d représente la mobilité massique globale du système; or, aux pressions usuelles, l'influence de la pression sur la viscosité des liquides peut être considérée comme négligeable; pour les gaz idéaux, la viscosité dynamique est indépendante de la pression. Dès lors, puisque la masse volumique d'une phase fluide compressible est une fonction croissante de la pression (loi de Boyle-Mariotte par exemple), l'hypothèse de monotonie imposée à la fonction d paraît légitime et conforme à la réalité de situations physiques rencontrées en pratique.

Proposition 1:

Le problème (P_c) associée aux hypothèses i), ii), iii) *admet une solution $P \in W_c(0, T)$, lorsqu'on note:*

$$W_c(0, T) = \{P \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q), \ \frac{\partial P}{\partial t} \in M_1^-(Q), c\frac{\partial P}{\partial t} \in L^2(Q)$$

$$c(x)\frac{\partial P}{\partial t} \leq 0 \text{ p.p. } dans\ Q\},$$

où $\frac{\partial P}{\partial t}$ *représente la dérivée partielle de P au sens de $D'(Q)$, et* $M_1^-(Q)$ *l'ensemble des mesures de Radon négatives bornées sur Q.*

Démonstration:

On semi-discrétise le problème (P_c) par rapport à la variable du temps en introduisant le pas $h = \frac{T}{N}$, et on considère la suite de problèmes stationnaires:

$$(P_k)\begin{cases} P^{k+1}\in \mathrm{H}^1(\Omega)\,; \\ 1/h \int_\Omega c(x)\,(P^{k+1}-P^k)\,v\,dx+\int_\Omega d(x,P^{k+1})\nabla P^{k+1}.\nabla v\,dx \\ \quad +\int_{\Gamma_s} \lambda\, P^{k+1}\,v\,d\Gamma=\int_{\Gamma_e} f\,v\,d\Gamma \quad \forall v\in \mathrm{H}^1(\Omega) \quad k=0,1,\ldots \end{cases}$$

Lemme 1

Le problème (P_k) admet une solution positive $P^{k+1}\in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, $\forall k=0,1,\ldots$, et la suite $\{P^k\}_k$ est décroissante.

Démonstration du lemme 1:

Il suffit de montrer l'existence de la solution pour $k=0$, i.e. du problème suivant:

$$(P_o)\begin{cases} P^1\in \mathrm{H}^1(\Omega)\,; \\ 1/h \int_\Omega c(x)(P^1-\hat{P}_o)\,v\,dx+\int_\Omega d(x,P^1)\nabla P^1.\nabla v\,dx \\ \quad +\int_{\Gamma_s} \lambda\, P^1\,v\,d\Gamma=\int_{\Gamma_e} f v\,d\Gamma\,, \forall v\in \mathrm{H}^1(\Omega). \end{cases}$$

Par le théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff, (P_o) admet une solution d'ailleurs unique.

Montrons que $0\le P^1\le \hat{P}_o$, p.p. dans Ω; par différence entre l'équation de (P_o) et l'inégalité (H^1), il vient:

$$(5.1)\begin{cases} 1/h \int_\Omega c(x)\,(P^1-\hat{P}_o)\,v dx+\int_\Omega\{d(x,P^1)\nabla P^1-d(x,P_o)\nabla \hat{P}_o\}.\nabla v\,dx \\ \\ \quad +\int_{\Gamma_s} \lambda\,(P^1-\hat{P}_o)\,v\,d\Gamma\le 0,\ \forall v\in \mathrm{H}^1(\Omega)\,,\ v\ge 0\,,\ \text{p.p.} \end{cases}$$

On introduit: $w=P^1-\hat{P}_o$, $w_\eta^+=(w-\eta)^+\in \mathrm{H}^1(\Omega)$, $\forall \eta>0$ et $\psi_\eta(\tau)=\int_0^\tau \frac{d\sigma}{[\theta(\eta+\sigma)]^2}$; on prend $v=\psi_\eta\circ w_\eta^+\in \mathrm{H}^1(\Omega)$ dans (5.1)

ce qui est loisible; il vient:

$$\begin{cases} 1/h \int_\Omega c(x)w\ \psi_\eta(w_\eta^+)\,dx+\int_\Omega d(x,P^1)\nabla w.\nabla\psi_\eta(w_\eta^+)\,dx+ \\ \quad +\int_{\Gamma_s} \lambda w\,\psi_\eta(w_\eta^+)\,d\Gamma=-\int_\Omega [d(x,P^1)-d(x,\hat{P}_o)]\nabla\hat{P}_o.\nabla\psi_{\eta(w_\eta^+)}\,dx\,; \end{cases}$$

or: $w^+ \psi_\eta(w_\eta^+) = w\,\psi_\eta(w_\eta^+)$, et d'après l'hypothèse iii), on a

$$\begin{cases} 1/h \displaystyle\int_\Omega c(x)\, w^+ \psi_\eta(w_\eta^+)\, dx + \frac{\alpha}{2} \int_\Omega \frac{|\nabla w_\eta^+|^2}{\theta^2(\eta + w_\eta^+)}\, dx + \\ + \displaystyle\int_{\Gamma_s} \lambda\, w^+ \psi_\eta(w_\eta^+)\, d\Gamma \le \frac{1}{2\alpha} \, \|\hat{P}_o\|^2_{H^1(\Omega)} \le \tilde{C}, \end{cases}$$

$\tilde{C}$ est une constante indépendante de η.

On déduit de là les majorations uniformes:

$$0 \le \int_\Omega \frac{|\nabla w_\eta^+|^2}{\theta^2(\eta + w_\eta^+)}\, dx \le \tilde{C}, \tag{5.2}$$

$$0 \le \int_{\Gamma_s} \lambda\, w^+ \psi_\eta(w_\eta^+)\, d\Gamma \le \tilde{C}, \tag{5.3}$$

ce qui permet de conclure comme lors de l'étude de l'unicité du problème stationnaire que:

$$w \le 0, \text{ p.p. dans } \Omega, \text{ c'est-à-dire:}$$

$$P^1 \le \hat{P}_o, \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{5.4}$$

Pour montrer que $P^1 \ge 0$, p.p. dans Ω, il suffit de prendre dans l'équation (P_o), $v = (P^1)^-$; il s'ensuit que:

$$\begin{cases} -1/h \displaystyle\int_\Omega c(P^1 - \hat{P}_o)\,(P^1)^-\, dx + \int_\Omega d(x, P^1)\, |\nabla (P^1)^-|^2\, dx + \\ + \displaystyle\int_{\Gamma_s} \lambda [(P^1)^-]^2\, d\Gamma + \int_{\Gamma_e} f (P^1)^-\, d\Gamma = 0 \end{cases}$$

or: $P^1 - \hat{P}_o \le 0$, p.p. dans Ω, implique: $\|(P^1)^-\|^2_{H^1(\Omega)} = 0$;
alors: $P^1 \ge 0$, p.p. dans Ω et puisque $\hat{P}_o \in L^\infty(\Omega)$, de (5.4), on a

$$P^1 \in L^\infty(\Omega).$$

En supposant que $P^{k+1} \le P^k$, p.p. dans Ω, il vient de l'équation (P_k):

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega d(x, P^{k+1}) \nabla P^{k+1} . \nabla v\, dx + \int_{\Gamma_s} \lambda P^{k+1} v\, d\Gamma \ge \int_{\Gamma_e} f v\, d\Gamma, \\ \forall v \in H^1(\Omega),\ v \ge 0, \text{ p.p. dans } \Omega, \end{cases}$$

i.e.,

P^{k+1} vérifie l'inégalité (H1) et $P^{k+1} \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$;

donc avec le même raisonnement que pour ($P^1 \leq \hat{P}_o$, p.p.), on trouve

$$P^{k+2} \leq P^{k+1}, \text{ p.p. dans } \Omega, \forall k,$$

pour conclure que:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \; P^k \geq 0, \; P^k \in L^\infty(\Omega),$$

et la suite $\{P^k\}_k$ est décroissante, ce qui termine la démonstration du lemme 1.

Lemme 2:

Le passage à la limite lorsque $h \to 0^+$ dans l'équation (P_k) donne une solution P du problème (P_c), $P \in W_c(0, T)$.

Démonstration du lemme 2

On introduit:

* $P_h = \sum_{n=0}^{N-1} P^n \chi_n$, χ_n la fonction caractéristique de l'intervalle $[nh, (n+1)h]$.

$$* \, \sigma_h = \begin{cases} \dfrac{P^{n+1} - P^n}{h}(t - nh) + P^n, & \text{pour } t \in [nh, (n+1)h], \\ P^N & , \text{pour } t \in [(N-1)h, T]. \end{cases}$$

Puisque l'on a montré que $\{P^k\}_k$ est décroissante, positive et $\forall k \in \mathbb{N}$ $P^k \in L^\infty(\Omega)$, il vient:

$$(5.5) \qquad \left| \frac{d\sigma_h}{dt} \right|_{L^1(Q)} \leq |\hat{P}_o|_{L^1(\Omega)}, \; \forall h > 0.$$

On prend $v = P^{k+1}$ dans l'équation (P_k); on a en particulier, après sommation:

$$(5.6) \qquad \| P_h \|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C.$$

D'autres estimations peuvent être obtenues pour le choix de $v = P^{k+1} - P^k$ dans l'équation (P_k); il vient:

$$(5.7)\quad \begin{cases} \int_\Omega c(x) \dfrac{|P^{k+1} - P^k|^2}{h}\, dx + \int_\Omega d(x, P^{k+1}) \nabla P^{k+1} . \nabla (P^{k+1} - P^k)\, dx + \\ \quad + \int_{\Gamma_s} \lambda\, P^{k+1} (P^{k+1} - P^k)\, d\Gamma = \int_{\Gamma_e} f (P^{k+1} - P^k)\, d\Gamma \,; \end{cases}$$

or,

$$\nabla P^{k+1} . \nabla (P^{k+1} - P^k) = 1/2 \{ |\nabla P^{k+1}|^2 - |\nabla P^k|^2 + |\nabla P^{k+1} - \nabla P^k|^2 \},$$

et

$$d(x, P^{k+1}) \nabla P^{k+1} . \nabla (P^{k+1} - P^k) = 1/2 \{ d(x, P^{k+1}) |\nabla P^{k+1}|^2 - d(x, P^k) |\nabla P^k|^2 \} +$$
$$+ 1/2 \{ d(x, P^k) - d(x, P^{k+1}) \} |\nabla P^k|^2 + 1/2\, d(x, P^{k+1}) |\nabla P^{k+1} - \nabla P^k|^2 \,;$$

on remplace dans (5.7); on obtient alors

$$\begin{cases} 1/h \int_\Omega c(x) |P^{k+1} - P^k|^2 dx + 1/2 \int_\Omega \{ d(x, P^{k+1}) |\nabla P^{k+1}|^2 - d(x, P^k) |\nabla P^k|^2 \} dx \\ + 1/2 \int_\Omega \{ d(x, P^k) - d(x, P^{k+1}) \} |\nabla P^k|^2 dx + 1/2 \int_\Omega d(x, P^{k+1}) |\nabla (P^{k+1} - P^k)|^2 dx \\ + 1/2 \int_{\Gamma_s} \lambda \{ |P^{k+1}|^2 - |P^k|^2 \} d\Gamma + \dfrac{1}{2} \int_{\Gamma_s} \lambda |P^{k+1} - P^k|^2 d\Gamma \leq \\ \quad \leq \int_{\Gamma_e} f |P^{k+1} - P^k| d\Gamma = \int_{\Gamma_e} f (P^k - P^{k+1})\, d\Gamma . \end{cases}$$

On note que la troisième intégrale est positive, puisque $\{P^k\}$ est décroissante et $d(x, P)$ est croissante par rapport à la variable P, uniformément en x; on fait la somme de 0 à $m - 1 \leq N - 1$; il vient, $\forall h > 0$:

$$(5.8)\qquad \left\| \sqrt{c(x)}\, \frac{d\sigma_h}{dt} \right\|_{L^2(Q)} \leq C,$$

$$(5.9)\qquad \|P_h\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))} \leq C.$$

De (5.5) et (5.6) et du lemme 1, on a:

$$(5.10)\qquad \|\sigma_h\|_{W^{1,1}(Q) \cap L^\infty(Q)} \leq C,$$

et comme l'injection de

$$W^{1,1}(Q) \cap L^\infty(Q) \text{ dans } L^p(Q),\ \forall p \in [1, +\infty[\,,$$

est *compacte,* il résulte de (5.10) que l'on peut extraire une sous-suite telle que:

$$\sigma_h \to P, \text{ forte} - \mathrm{L}^p(Q),\ \forall p \in [1, +\infty[\,, \tag{5.11}$$

et de (5.5) on peut supposer la sous-suite extraite telle que:

$$\frac{d\sigma_h}{dt} \longrightarrow \frac{dP}{dt} \text{ pour la topologie } \sigma(M_1(Q); C_c(Q))\,, \tag{5.12}$$

où $M_1(Q)$ est l'espace des mesures de Radon bornées sur Q, $C_c(Q)$ l'espace des fonctions continues à support compact dans Q.

D'autre part:

$$|\sigma_h - P_h|_{\mathrm{L}^1(Q)} \leq h(|\hat{P}_o|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} + |P^N|_{\mathrm{L}^1(\Omega)}) \leq h.C\,, \tag{5.13}$$

et $|P_h - P|_{\mathrm{L}^1(Q)} \leq |P_h - \sigma_h|_{\mathrm{L}^1(Q)} + |\sigma_h - P|_{\mathrm{L}^1(Q)} \leq Ch + |\sigma_h - P|_{\mathrm{L}^1(Q)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$

Il vient

$$P_h \to P, \text{ forte} - \mathrm{L}^p(Q)\,,\ \forall p \in [1, +\infty[\,; \tag{5.14}$$

de (5.6), on peut extraire une sous-suite telle que:

$$\begin{cases} P_h \longrightarrow P \text{ faible} - \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{H}^1(\Omega))\,, \\ (\text{trace})\ \gamma_0(P_h)/_{\Gamma_s} \longrightarrow \gamma_0(P)/_{\Gamma_s}\,, \text{ faible} - \mathrm{L}^2(\Sigma_s)\,; \end{cases} \tag{5.15}$$

de (5.9), on peut extraire une sous-suite telle que:

$$P_h \longrightarrow P, \text{ faible-* dans } \mathrm{L}^\infty(0, T; \mathrm{H}^1(\Omega))\,; \tag{5.16}$$

de (5.8) et puisque $\sqrt{c}$ est bornée sur $\bar{\Omega}$, (fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}^3$), on sait qu'il existe un réel $\bar{C}$ indépendant de h, tel que:

$$\left\| c \frac{d\sigma_h}{dt} \right\|_{\mathrm{L}^2(Q)} \leq \bar{C}\,; \tag{5.17}$$

on peut à nouveau supposer la sous-suite extraite telle que:

$$c \frac{d\sigma_h}{dt} \longrightarrow \tilde{\alpha}, \text{ faiblement dans } \mathrm{L}^2(Q) \text{ et vaguement dans } M_1(\mathrm{Q}); \tag{5.18}$$

on observe que

$$\tilde{\alpha} = c\,\frac{dP}{dt};$$

ceci vient du fait que

$$\frac{d\sigma_h}{dt} \rightarrow \frac{dP}{dt} \text{ au sens vague des mesures,}$$

et donc, $$c\,\frac{d\sigma_h}{dt} \rightarrow c\,\frac{dP}{dt} \text{ au sens vague des mesures.}$$

On conclut, par passage à la limite lorsque $h \rightarrow 0^+$, que le problème (P_c) admet au moins une solution telle que:

$$c(x)\frac{dP}{dt} \in L^2(Q),\, P \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q),\, \frac{dP}{dt} \in M_1(Q);$$

en outre, de (5.18) et puisque l'ensemble $\{v \in L^2(Q);\ v \leq 0, \text{p.p.}\}$ est un cône convexe fermé de $L^2(Q)$, on déduit que

$$c\,\frac{dP}{dt} \leq 0, \text{ p.p. dans } Q,$$

ce qui termine la démonstration du lemme 2 et celle de la proposition 1.

Proposition 2

La solution P du problème (P_c) est unique dans la classe des fonctions de $W_c(0, T)$.

Démonstration:

Soit P, $\hat{P}$ deux éventuelles solutions du problème (P_c); il vient par différence:

$$(6.1)\quad \begin{cases} \int_\Omega c(x)\frac{dw}{dt}v\,dx + \int_\Omega [d(x, P)\nabla P - d(x, \hat{P})\nabla\hat{P}]\nabla v\,dx \\ \quad + \int_{\Gamma_s} \lambda\, wv\, d\Gamma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \text{ avec } w = P - \hat{P}. \end{cases}$$

On introduit $w_\eta^+ = \sup(w^+ - \eta, 0) \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, $\forall \eta$, p.p. en t, et on définit, $\forall \eta > 0$, la fonction χ_η par

$$\psi_\eta(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\sigma}{[\theta(\eta + \sigma)]^2}.$$

On prend dans l'équation (6.1) la fonction-test $v = \psi_\eta(w_\eta^+)$ ce qui est loisible, et intégrant de 0 à t, $t \in]0, T]$, il vient:

$$(6.2)\quad \begin{cases} \int_0^t \int_\Omega c(x) \frac{dw}{dt} \psi_\eta(w_\eta^+)\, dx dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \int_\Omega \frac{|\nabla w_\eta^+|^2}{[\theta(\eta + w_\eta^+]^2}\, dx dt + \\ + \int_0^t \int_{\Gamma_s} \lambda\, w\, \psi_\eta(w_\eta^+)\, d\Gamma\, dt \leq (1/2\alpha) \|\hat{P}\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^1(\Omega))} \leq \tilde{C}, \end{cases}$$

$\tilde{C}$, constante indépendante de η.

On note la première intégrale par I et on va montrer que I est non négative.

Pour ϵ strictement positif, on introduit les ensembles

$$\Omega_\epsilon = \{ x \in \Omega, c(x) > \epsilon \}, \text{ ensemble ouvert de } \Omega,$$
$$\tilde{\Omega}_\epsilon = \{ x \in \Omega, 0 < c(x) \leq \epsilon \}.$$

Dès lors, l'intégrale I se décompose sous la forme:

$$I = \int_0^t \int_{\tilde{\Omega}_\epsilon} c(x) \frac{dw}{dt} \psi_\eta(w_\eta^+)\, dx dt + \int_0^t \int_{\Omega_\epsilon} c(x) \frac{dw}{dt} \psi_\eta(w_\eta^+)\, dx dt = I_\epsilon + J_\epsilon;$$

d'une part, on note que sur $Q_\epsilon =]0, T[\times \Omega_\epsilon$, on dispose des propriétés suivantes:

$$\frac{dw}{dt} \in \mathrm{L}^2(Q_\epsilon) \text{ et } w \in \mathrm{H}^1(Q_\epsilon), \text{ et donc}$$
$$w^+ \in \mathrm{H}^1(Q_\epsilon), \text{ puis } w_\eta^+ \in \mathrm{H}^1(Q_\epsilon), \forall \eta > 0,$$

par applications successives du lemme de G. Stampacchia (i.e. les troncatures opèrent dans $\mathrm{H}^1(Q_\epsilon)$). En outre, on observe que

$$c(x) \frac{dw}{dt} \psi_\eta(w_\eta^+) = c(x) \left(\frac{d}{dt} w_\eta^+ \right) \psi_\eta(w_\eta^+) \text{ p.p. dans } Q_\epsilon,$$

de sorte qu'introduisant la fonction

$$F_\eta(\tau) = \int_0^\tau \psi_\eta(r)\, dr, \tau \geq 0, \forall \eta > 0,$$

on peut écrire

$$J_\epsilon = \int_0^t \int_{\Omega_\epsilon} c(x) \frac{d}{dt} (F_\eta(w_\eta^+))\, dxdt$$

$$= \int_{\Omega_\epsilon} c(x) [F_\eta(w_\eta^+(t,x)) - F_\eta(w_\eta^+(0,x))]\, dx$$

$$= \int_{\Omega_\epsilon} c(x) F_\eta(w_\eta^+(t,x))\, dx \geq 0 .$$

D'autre part, on écrit

$$I_\epsilon = \int_0^t \int_\Omega \tilde{\chi}_\epsilon(x) c(x) \frac{dw}{dt} \psi_\eta(w_\eta^+)\, dxdt ,$$

où $\tilde{\chi}_\epsilon$ est la fonction caractéristique de $\tilde{\Omega}_\epsilon$.

Puisque $\tilde{\chi}_\epsilon(\cdot)$ tend simplement vers la fonction nulle, lorsque $\epsilon \to 0^+$, d'après la définition de $\tilde{\Omega}_\epsilon$,

et que $c(x) \dfrac{dw}{dt} \psi_\eta(w_\eta^+)$ est un élément de $L^1(Q)$, il s'ensuit que, à η fixé,

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} I_\epsilon = 0 .$$

Dès lors, on a, pour tout ϵ strictement positif,

$$I = I_\epsilon + J_\epsilon$$

de sorte que, prenant ϵ arbitrairement petit, il vient que I est non négative, pour tout η strictement positif.

D'ailleurs, on a plus précisément:

$$I = \int_\Omega c(x) F_\eta(w_\eta^+(t,x))\, dx .$$

Alors, on déduit de l'inégalité (6.2):

$$(6.7) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \int_\Omega \frac{|\nabla w_\eta^+|^2}{[\theta(\eta + w_\eta^+]^2}\, dx\, dt + \int_0^t \int_{\Gamma_s} \lambda\, w^+ .\, \psi_\eta(w_\eta^+)\, d\Gamma\, dt \leq \\ \qquad\qquad \leq \dfrac{1}{2\alpha} \| \hat{P} \|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq \tilde{C}, \end{cases}$$

$\tilde{C}$ constante indépendante de η, et donc, les majorations uniformes par rapport à η

(6.8) $$0 \leq \int_0^t \int_\Omega \frac{|\nabla w_\eta^+|^2}{\theta^2(w_\eta^+ + \eta)} \, dx\, dt \leq \tilde{C},$$

(6.9) $$0 \leq \int_0^t \int_\Gamma \lambda\, w^+ \psi_\eta(w_\eta^+)\, d\Gamma\, dt \leq \tilde{C}.$$

Montrons que $w^+(x)=0$, p.p. sur $\tilde{\Gamma}_s^+ \times]0, T[$,

avec $\tilde{\Gamma}_s^+ = \{x \in \Gamma_s$, tels que $\lambda(x) \geq \lambda_0\}$, ensemble de mesure non nulle pour $\lambda_0 > 0$, convenablement choisi; on observe que l'estimation (6.9) implique que, $\forall \rho > 0$, l'ensemble $E_\rho = \{(x, t) \in \tilde{\Gamma}_s^+ \times]0, T]; w^+(x, t) \geq \rho$, p.p.$\}$ est de mesure nulle.

Sinon, on pourrait trouver ρ_0 strictement positif tel que:

mes $(E_{2\rho_0}) > 0$, et alors l'estimation (6.9) impliquerait que l'on ait:

$$2 \int_{E_{2\rho_0}} \lambda\, \rho_0 \left[\int_0^{w_\eta^+} \frac{d\sigma}{\theta^2(\eta + \sigma)} \right] d\Gamma\, dt \leq \tilde{C},$$

On peut choisir $0 < \eta < \rho_0$, d'où $w_\eta^+ \geq \rho_0$, sur $E_{2\rho_0}$, et

$$2 \int_{E_{2\rho_0}} \lambda\, \rho_0 \left[\int_0^{\rho_0} \frac{d\sigma}{\theta^2(\eta + \sigma)} \right] d\Gamma\, dt \leq \tilde{C},$$

ce qui entraîne:

$$2\lambda_0 \rho_0 \text{ mes } (E_{2\rho_0}) \int_0^{\rho_0} \frac{d\sigma}{\theta^2(\eta + \sigma)} \leq \tilde{C},$$

et donc:

(6.10) $$\int_0^{\rho_0} \frac{d\sigma}{\theta^2(\eta + \sigma)} \leq \tilde{C}_0, \quad \forall \eta < \rho_0.$$

Avec le changement de variable $r = \eta + \sigma$, (6.10) donne, en prenant η arbitrairement petit,

(6.11) $$\lim_{\eta \to 0^+} \int_\eta^{\eta + \rho_0} \frac{dr}{[\theta(r)]^2} \leq \tilde{C}_0;$$

cependant, l'hypothèse (H2) implique d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

que $\lim_{\eta \to 0^+} \int_\eta \frac{dr}{\theta^2(r)} = +\infty$, ce qui contredit (6.11);

on a alors, $\forall \rho$, mes $(E_\rho) = 0$ et donc:

$$w^+(x, t) = 0\,, \text{ p.p. sur } \tilde{\Gamma}_s^+ \times]0, T[\,. \tag{6.12}$$

Montrons que $w^+ = 0$, p.p. dans $\Omega \times]0, T[$.

Introduisant la fonction

$$\chi_\eta(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\sigma}{\theta(\eta + \sigma)}\,,$$

on observe que l'estimation (6.8) se réécrit:

$$|\nabla \chi_\eta(w_\eta^+)|^2_{(L^2(Q))^3} \leq \tilde{C}; \tag{6.13}$$

d'autre part, on a:

$$\chi_\eta(w_\eta^+) \in H^1(\Omega), \text{ presque partout en } t,$$

et de (6.12), $\chi_\eta(w_\eta^+)_{/\tilde{\Gamma}_s^+} = 0$;

on peut alors utiliser l'inégalité de Poincaré; l'estimation uniforme donnée en (6.13) implique l'existence d'une constante $\tilde{C}_1$, indépendante de η, telle que:

$$|\chi_\eta(w_\eta^+)|^2_{L^2(Q)} \leq \tilde{C}_1\,.$$

Par un raisonnement analogue à celui qui a permis d'établir (6.12), on obtient

$$w^+(x, t) = 0\,, \text{ p.p. dans } \Omega \times]0, T[\,,$$

et en changeant le rôle de P et $\hat{P}$, on a finalement:

$$P = \hat{P} \text{ p.p. dans } \Omega \times]0, T[\,.$$

Remarque: On peut observer que la solution $\hat{P}_0$ du problème $\hat{P}_0 \in H^1(\Omega)$, satisfaisant l'équation variationnelle:

$$\int_\Omega d(x, \hat{P}_0) \nabla \hat{P}_0 . \nabla v\, dx + \int_{\Gamma_s} \lambda\, \hat{P}_0\, v\, d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \bar{f} v\, d\Gamma\,,\ \forall v \in H^1(\Omega) \tag{6.14}$$

vérifie l'hypothèse (H1) pour *tout* choix de $\tilde{f}$, tel que

$$\tilde{f} \in L^2(\Gamma_e), \tilde{f} \geq f \text{ p.p. sur } \Gamma_e.$$

D'un point de vue physique, cela signifie pour un tel choix qu'à l'instant initial, la pression du système est la pression correspondant au système incompressible pour des injections d'eau le long de Γ_e de plus forte vitesse de filtration.

Lorsque l'on ignore si la donnée $\hat{P}_0$ est bornée sur Ω, on peut faire remarquer que la démonstration constructive précédente reste valable en utilisant la compacité de l'injection de $W^{1,1}(Q)$ dans $L^1(Q)$, d'après un théorème de Rellich-Kondrachov, c'est-à-dire, en se limitant à la valeur $p=1$ dans les assertions (5.11) et (5.14), ce qui n'est pas dommageable pour la méthode et permet d'établir les propriétés énoncées par la proposition 1, *à l'exception* de l'information «$P \in L^\infty(Q)$».

Cependant, on dispose des encadrements

$0 \leq P(t,.) \leq \hat{P}_0(\cdot)$ p.p. dans Ω, pour presque tout t, et dans le cadre de l'équation (6.14) $0 \leq \hat{P}_0 \leq \sup_{\Gamma_e} \hat{P}_0$, supposé exister, presque partout dans Ω, selon un principe usuel du maximum.

Les auteurs remercient le rapporteur de cet article des améliorations qu'il a permis d'apporter au texte.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTOLA, M.: *Sur une classe de problèmes paraboliques quasilinéaires.* Bolletino U.M.I. (6) 5-B (1986), pp. 51-70.

[2] BENILAN, Ph.: *Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications,* Thèse de Doctorat d'Etat, Orsay, 1972.

[3] BREZIS, H., KINDERLEHRER, D., STAMPACCHIA, G.: *Sur une nouvelle formulation du problème de l'écoulement à travers une digue.* C.R. Acad. Sc. Paris, 287 (1978), pp. 711-714.

[4] CARILLO, J., et CHIPOT, M.: *On some nonlinear elliptic equations involving derivatives on the nonlinearity,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 100A (1985), pp. 281-294.

[5] CHIPOT, M., et MICHAILLE, G.: *Uniqueness results and monotonicity property for stongly nonlinear elliptic variational inequalities.* IMA Prepint, n.º 247, oct. 1987, Institute for mathematics and its applications, University of Minnesota.

[6] DIAZ, J. I.: *Nonlinear partial differential equations and free boundaries.* vol. 1: Elliptic equations, Research Notes in Math., n.º 106, Pitman, London, 1985.

[7] GAGNEUX, G.: *Approximations lipschitziennes de la fonction signe et schémas semi-discrétisés implicites de problèmes quasilinéaires dégénérés,* Publications de l'U.A. CNRS n.º 040741, Univ. de Besançon, année 1984, fasc. n.º 8, pp. 1-16.

[8] GAGNEUX, G.: *Une approche analytique nouvelle des modèles de la récupération secondée en ingénierie pétrolière,* Journal de Mécanique théorique et appliquée, vol. 5, n.º 1, 1986, pp. 3 à 20.

[9] GAGNEUX, G., LEFEVERE, A. M., MADAUNE-TORT, M.: *Une approche analytique d'un modèle black-oil des écoulements triphasiques compressibles en ingénierie pétrolière,* Journal de Mécanique théorique et appliquée, vol. 6, n.º 4, 1987, pp. 547-569.

[10] GILBARG, D., TRUDINGER, N. S.: *Elliptic partial differential équations of second order,* Springer Verlag, 1977.

[11] MARCUS, M., MIZEL, V. J.: *Absolute continuity on tracks and Mappings of Sobolev spaces,* Archiv. Rat. Mech. Anal., vol. 45, n.º 4, 1972, pp. 294-318.

[12] STAMPACCHIA, G.: *Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus,* Presse de l'Université de Montréal, 1965.

Université de PAU & C.N.R.S.
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
U.A. 1204 - C.N.R.S.
Avenue de l'Université
64000 PAU (FRANCE)

Reibido: 9 de mayo de 1989
Revisado: 6 de septiembre de 1989