REVISTA MATEMATICA de la
Universidad Complutense de Madrid.
Volumen 2, números 2 y 3, 1989
http://dx.doi.org/10.5209/rev_REMA.1989.v2.n2.18130

Regularite globale des solutions de systemes Elliptiques non lineaires

J.-P. RAYMOND

Abstract. We consider the regularity of functions $u \in W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ solving elliptic degenerated or singular systems of the type:

$$-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(a_i^\alpha(x,\nabla u(x)))=f^i(x,u(x)).$$

We suppose that $a_i^\alpha(x,v)$ satisfies a growth condition of order $(p-1)$ with respect to v.
We show that, if $p\leqslant 2$, the solutions of the system belong to $W^{2,np/(n+p-2)}$, if $p>2$ and $n>2$, they belong to $W^{1,np/(n-2)}$ and if $p>2$ and $n=2$, they belong to $W^{1,r}$ for every $r<+\infty$.

Résumé: On s'intéresse à la régularité dans les espaces de Sobolev des fonctions u de $W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ solutions de systèmes elliptiques dégénérés ou singuliers du type:

$$-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(a_i^\alpha(x,\nabla u(x)))=f^i(x,u(x)).$$

On suppose que $a_i^\alpha(x,v)$ a une croissance d'ordre $p-1$ en v.

On montre que si $p\leqslant 2$, les solutions du système appartiennent à $W^{2,np/(n+p-2)}(\Omega,\mathbb{R}^m)$, si $p>2$ et $n>2$, ces solutions appartiennent à $W^{1,np/(n-2)}$ et si $p>2$ et $n=2$, elles appartiennent à $W^{1,r}$ pour tout $r<+\infty$.

1. INTRODUCTION

On s'intéresse dans cet article à la régularité dans les espaces de Sobolev des fonctions u de $W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ solutions de systèmes elliptiques du type:

$$-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(a_i^\alpha(x,\nabla u(x)))=f^i(x,u(x)) \text{ dans } D'(\Omega), \tag{1.1}$$

1980 Mathematics Subject Classification (1985 revision): 35J70, 35B65
Editorial de la Universidad Complutense. Madrid, 1989.

avec $1 \leqslant i \leqslant m$, Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse plus précisément aux systèmes vérifiant la condition d'ellipticité suivante:

$$a_{ij}^{\alpha\beta}(x,v)w_\alpha^i w_\beta^j \geq c|v|^{p-2}|w|^2, \tag{1.2}$$

$$\text{où } a_{ij}^{\alpha\beta}(x,v) = \frac{\partial}{\partial \bar{v}_\beta^j} a_i^\alpha(x,v).$$

Lorsque a_i^α est de la forme $a_i^\alpha(x,v)=c(x,|v|)v_\alpha^i$ des résultats de régularité dans les espaces $C^{1,\mu}$ ont été donnés dans [18], [19], [8] et pour des problèmes paraboliques associés à de tels systèmes dans [4]. Dans le cas scalaire ($m=1$), on peut aussi consulter [3], [5], [17]. En l'absence de structure particulière pour a_i^α, on ne peut montrer que des résultats de régularité partielle de la forme:

> Les solutions de (1.1) appartiennent à $C^{1,\mu}(\Omega_o,\mathbb{R}^m)$, avec Mes $(\Omega\backslash\Omega_o)=0$. (Cf. [7], [8]).

On peut par contre obtenir des résultats locaux ou globaux dans les espaces de Sobolev. Nous avons déjà étudié des systèmes du type (1.1) dans [10] et nous avons montré que, pour $1<p\leqslant 2$, les solutions de (1.1) appartiennent à $W_{loc}^{2,np/(n+p-2)}(\Omega,\mathbb{R}^m)$, ce qui améliorait les résultats antérieurs ([9], [12], [13], [15], [16]). Nous nous proposons ici d'étudier la régularité jusqu'à la frontière. La méthode développée dans [10] consiste à montrer que l'on a:

$$|\nabla u|^{(p-2)/2}\nabla^2 u \in L^2_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^m), \tag{1.3}$$

puis, dans le cas $1<p\leqslant 2$, à utiliser une inégalité de Hölder d'exposant négatif (lemme 2.1). On obtient alors à l'aide d'un processus itératif:

$$u \in W_{loc}^{2,np/(n+p-2)}(\Omega,\mathbb{R}^m). \tag{1.4}$$

Dans le cas $p>2$, l'équation adjointe de (1.1) vérifie une condition d'ellipticité du type (1.2), où p est remplacé par $p'=p/(p-1)$. Etant donné que l'on a $p'<2$, la méthode précédente permet de montrer que les solutions de l'équation adjointe appartiennent à $W_{loc}^{1,np'/(n+p'-2)}(\Omega,\mathbb{R}^{mn})$. La régularité des solutions de (1.1) est alors déduite des relations de dualité (cf. [10]). A titre d'exemple, signalons que dans le cas particulier où l'on a:

$$a_i^\alpha(x,v)=d(x)|v|^{p-2}v_\alpha^i, \text{ avec } 0<c_1\leqslant d(x)\leqslant c_2,$$

le système (1.1) s'écrit sous forme vectorielle:

$$-\operatorname{div}(d(x)|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x))=f(x,u(x)).$$

Une fonction q de $L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^{mn})$ sera une solution adjointe de (1.1) associée à une fonction u de $W_o^{1,p}$ si elle vérifie:

$$\operatorname{div}(q(x)) = -f(x,u(x)) \text{ dans } D'(\Omega,\mathbb{R}^m) \text{ et}$$
$$q(x) = d(x)|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x), \text{ pour presque tout } x \text{ de } \Omega.$$

Nous détaillons jusqu'au paragraphe 3 les calculs relatifs à $p \leqslant 2$. Dans le paragraphe 4, on introduit l'opérateur adjoint de (a_i^α) et on établit les estimations correspondant à cet opérateur.

Au paragraphe 5, on indiquera comment développer pour l'équation adjointe de (1.1) dans le cas $p>2$ les techniques mises au point pour $p \leqslant 2$.

Nous démontrons que les solutions de (1.1) appartiennent à

$W^{2,np/(n+p-2)}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ si $p \leqslant 2$ (théorème 3.2), à $W^{1,np/(n-2)}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ si $p>2$ et si $n>2$

et à $W^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ pour tout $r<+\infty$ si $p>2$ et $n=2$ (théorème 5.4).

Ces résultats sont à notre connaissance nouveaux. Signalons aussi l'originalité de certaines techniques de démonstration:

–utilisation de l'inégalité de Hölder d'exposant négatif pour traiter la singularité à l'origine de $a_i^\alpha(x,.)$ si p est inférieur à 2,

–utilisation de l'équation adjointe pour passer du cas dégénéré ($p>2$) à un système avec singularité (le système adjoint présente une singularité à l'origine car on a $p'<2$).

Ces deux techniques ont déjà été utilisées par l'auteur dans [10] pour l'étude de la régularité locale et interviennent ici pour l'estimation des dérivées du gradient des solutions de (1.1) dans les directions tangentes à la frontière de Ω pour $p \leqslant 2$ (proposition 3.3) et également pour l'estimation des dérivées dans les directions tangentes à la frontière des solutions adjointes de (1.1) pour $p \geqslant 2$ (proposition 5.5).

Notons enfin que les techniques classiques d'estimation des dérivées du gradient des solutions ou des solutions adjointes, dans la direction normale à la frontière de Ω ne sont pas applicables aux systèmes dégénérés ou singuliers. Ceci nous a conduit à développer une approche nouvelle de cette question (cf. les preuves des propositions 3.4 et 5.6).

2. PRELIMINAIRES

Notations

1. L'espace $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ désigne $[W^{1,p}(\Omega)]^m$. On adopte le même type de notation pour les autres espaces de fonctions vectorielles.

2. Si v est une fonction de $A \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^l$, $\|v\|_s$ désigne la norme de v dans $L^s(\Omega, \mathbb{R}^l)$.

3. Les fonctions a_i^α sont définies sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn}$, on pose

$$a_{i\gamma}^\alpha(x,v) = \frac{\partial}{\partial x_\gamma} a_i^\alpha(x,v), \qquad a_{ij}^{\alpha\beta}(x,v) = \frac{\partial}{\partial v_\beta^j} a_i^\alpha(x,v)$$

Les indices latins varient de 1 à m et les indices grecs de 1 à n. Sauf mention contraire, on adopte la convention de sommation sur les indices répétés, (si plus de deux indices identiques apparaissent, la sommation opère par paire d'indices identiques entre un indice donné et le suivant le plus proche qui lui est identique).

4. Si B désigne un vecteur ou une matrice, $|B|$ désigne la norme euclidienne de B.

5. Dans la suite, $(T_\alpha^\delta)_{\substack{1 \leqslant \delta \leqslant n \\ 1 \leqslant \alpha \leqslant n}}$ désigne une matrice $n \times n$, δ désignant l'indice de ligne et α l'indice de colonne, la norme euclidienne de (T_α^δ) est notée $|T_\alpha^\delta|$ et la norme euclidienne du vecteur ligne d'indice γ de la matrice (T_α^δ) est notée $[T^\gamma]$.

6. Si v est une fonction de $A \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^l$, ∇v désigne le gradient de v (il est à valeurs dans $\mathbb{R}^{ln}$), $\nabla^2 v$ le hessien de v. Les dérivées partielles premières sont notées v_α (α pouvant être remplacé par n'importe quel indice grec) et les dérivées partielles secondes sont notées $v_{\alpha\beta}$.

7. On pose $\mathbb{R}_+^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n \geqslant 0\}$ et $B(0, \rho) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| \leqslant \rho\}$.

Hypothèses

(2.1) Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^2.

(2.2) $\forall x \in \Omega, \forall u \in \mathbb{R}^m, |f(x,u)| \leqslant a_1 |u|^{n(p-1)/(n-p)} + N(x)$, avec $N \in L^p(\Omega)$.

(2.3) Les fonctions a_i^α appartienent à $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn} \setminus \{0_{mn}\})$

et vérifient la condition de symétrie $a_{ij}^{\alpha\beta} \equiv a_{ji}^{\beta\alpha}$ pour tout i, tout j, tout α, tout β.

Il existe des constantes $a_2, \dots a_5$ positives telles que, pour tout x de Ω, tout v de $\mathbb{R}^{mn} \setminus \{0_{mn}\}$, tout w de $\mathbb{R}^{mn}$, on ait:

(2.4) $|a_i^\alpha(x,v)| \leqslant a_2 |v|^{p-1}$, (2.5) $\quad | a^{\alpha}_{i\gamma}(x,v) | \leqslant a_3 |v|^{p-1},$

(2.6) $\quad | a^{\alpha\beta}_{ij}(x,v) | \leqslant a_4 |v|^{p-2},$

(2.7) $\quad a^{\alpha\beta}_{ij}(x,v)\, w^i_\alpha w^j_\beta \geqslant a_5 |v|^{p-2} |w|^2.$

Remarque: On aurait pu remplacer les constantes a_2, a_3, a_4 par des fonctions positives de x appartenant à un espace $L^r(\Omega)$ convenablement choisi, en adoptant la même démarche, on aurait encore eu un résultat de régularité du type $u \in W^{2,l}$, avec l fonction de r et $l < np/(n+p-2)$.

Lemmes préliminaires

Lemme 2.1 (cf. [1] et [10]). *Soient $0<r<1$, $r'=r/(r-1)$ et Ω' un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$. Si f appartient à $L^r(\Omega')$ et si $\int_{\Omega'} |g(x)|^{r'}\, dx < +\infty$, on a:*

$$\left\{\int_{\Omega'} |f(x)|^r\, dx\right\}^{1/r} \leqslant \left\{\int_{\Omega'} |f(x)g(x)|\, dx\right\}\left\{\int_{\Omega'} |g(x)|^{r'} dx\right\}^{-1/r'}.$$

Remarque: Ce lemme est une forme faible du théorème 2.6 de [1], l'hypothèse: $0 < \int_{\Omega'} |g(x)|^{r'}\, dx$ n'est pas ici nécessaire (cf. [10], lemme 3.2).

Lemme 2.2: *Si $p \leqslant 2$, il existe deux constantes $k_1 > k_2 > 0$ telles que, pour tout $a \in \mathbb{R}^l$, pour tout $b \in \mathbb{R}^l$, on ait:*

$$k_2 \leqslant \int_0^1 |ta+(1-t)b|^{p-2} dt\, (|a|+|b|)^{2-p} \leqslant k_1.$$

Preuve: Montrons tout d'abord l'inégalité de droite. On a:

$$|ta+(1-t)b| \geqslant |t|a| - (1-t)|b|| \text{ et } |ta+(1-t)b|^{p-2} \leqslant |t|a| - (1-t)|b||^{p-2}.$$

On en déduit:

$$I = \int_0^1 |ta+(1-t)b|^{p-2} dt \leqslant \int_0^c (-t(|a|+|b|) + |b|)^{p-2}\, dt$$
$$+ \int_c^1 (t(|a|+|b|) - |b|)^{p-2}\, dt,$$

avec $c = \frac{|b|}{|a|+|b|}$. Par le calcul, on obtient:

$$I \leqslant \frac{|b|^{p-1} + |a|^{p-1}}{(p-1)\ (|a| + |b|)}.$$

Compte tenu de $|a|^{p-1} + |b|^{p-1} \leqslant 2^{2-p}\,(|a| + |b|)^{p-1}$, on a:

$$\int_0^1 |ta+(1-t)b|^{p-2}\ (|a| + |b|)^{2-p} \leqslant \frac{2^{2-p}}{p+1}.$$

L'inégalité de gauche se montre par disjonction de cas.

1er cas. Supposons que l'on ait: $\frac{3}{4}|a| \leqslant |b| \leqslant \frac{5}{4}|a|$ ou $\frac{3}{4}|b| \leqslant |a| \leqslant \frac{5}{4}|b|$. Ces deux sous-cas se traitant de manière identique, on suppose que l'on a: $\frac{3}{4}|a| \leqslant |b| \leqslant \frac{5}{4}|a|$. On a alors les inégalités suivantes:

$$|ta+(1-t)b| \leqslant t|a| + (1-t)\,|b| \leqslant \frac{t}{4}\,|a| + \frac{5}{4}|a|.$$

On en déduit:

$$I \geqslant \int_0^1 \left(\frac{t}{4}\,|a| + \frac{5}{4}|a|\right)^{p-2} dt = \left(\frac{|a|}{4}\right)^{p-2}\left(\frac{6^{p-1} - 5^{p-1}}{p-1}\right)$$

Comme de plus, on a: $(|a|+|b|)^{2-p} \geqslant \left(\frac{7}{4}\right)^{2-p} |a|^{2-p}$, on obtient:

$$I\,(|a|+|b|)^{2-p} \geqslant (7)^{2-p}\left(\frac{6^{p-1} - 5^{p-1}}{p-1}\right).$$

2éme cas. On a $|a| \notin [\frac{3}{4}\,|b|, \frac{5}{4}|b|]$ et $|b| \notin [\frac{3}{4}\,|a|, \frac{5}{4}|a|]$, soit encore $|b| < \frac{3}{4}\,|a|$ ou $|a| < \frac{3}{4}\,|b|$. Plaçons nous dans le cas où: $|b| \leqslant \frac{3}{4}\,|a|$. On a alors:

$$I \geqslant \int_0^1 (t(|a|-|b|)+|b|)^{p-2}\, dt = \frac{|a|^{p-1}-|b|^{p-1}}{(p-1)(|a|-|b|)} \geqslant |a|^{p-2}\frac{1-(3/4)^{p-1}}{(p-1)}$$

D'où: $I(|a|+|b|)^{2-p} \geqslant \dfrac{1-(3/4)^{p-1}}{(p-1)}.$

3. RESULTATS DE REGULARITE

Commençons par rappeler le résultat suivant:

Proposition 3.1: *Si $p \leqslant 2$ et si les hypothèses (2.1) à (2.7) sont vérifiées, les solutions de (1.1) appartiennent à* $W^{2,\, np/(n+p-2)}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Un résultat de ce type est démontré dans [10] lorsque les fonctions a_i^α ne dépendent pas explicitement de x. Le résultat de la proposition 3.1 se démontre de manière identique, il suffit de tenir compte des termes où figure $a^\alpha_{i\gamma}$ qui apparaissent dans les calculs et de majorer ces termes convenablement.

Nous démontrons dans ce paragraphe le résultat principal de cet article dans le cas $p \leqslant 2$.

Théorème 3.2: *Si $p \leqslant 2$ et si les hypothèses* (2.1) à (2.7) *sont vérifiées, les solutions de* (1.1) *appartiennent à* $W^{2,\, np/(n+p-2)}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Pour établir le théorème 3.2, il suffit de montrer que pour tout pont x_o de $\partial\Omega$ et pour un voisinage V de ce point, les solutions de (1.1) appartiennent à $W^{2,\, np/(n-p+2)}(\Omega \cap V, \mathbb{R}^m)$. De façon à se ramener à un problème à frontière droite, on considère un difféomorphisme ψ de classe C^2 et deux voisinages V et V' du point frontière x_o vérifiant:

$$V \subset V',$$

$$\psi(V') = B(0,R),\ \psi(V) = B(0,r),\ 0 < r < R,$$

$$\psi(\Omega \cap V) = \mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r),\ \psi(\Omega \cap V') = \mathbb{R}^n_+ \cap B(0,R).$$

On pose $\psi = (\psi^\alpha)_{1 \leqslant \alpha \leqslant n}$ et $\psi^{-1} = (\psi^{-1,\alpha})_{1 \leqslant \alpha \leqslant n}$. On considère le système (1.1) sous la forme:

$$\int_\Omega a_i^\alpha(x, \nabla u(x))\Phi^i_\alpha(x)dx = \int_\Omega f^i(x, u(x))\Phi^i(x)dx \tag{3.1}$$

pour tout Φ de $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

On suppose maintenant que l'on a: $\Phi \in W_0^{1,p}(\Omega \cap V', \mathbb{R}^m)$. On effectue le changement de variable $y = \psi(x)$ dans (3.1). On pose:

(3.2)
$$\tilde{u}(y) = u(\psi^{-1}(y)),\ \tilde{f}(y,u) = f(\psi^{-1}(y),u),$$

$$\tilde{\Phi}(y) = \Phi(\psi^{-1}(y)),\ A_i^\alpha(y,w) = a_i^\alpha(\psi^{-1}(y),w),$$

$$A_{i\gamma}^\alpha(y,w) = \frac{\partial}{\partial y_\gamma} A_i^\alpha(y,w),$$

$$A_{ij}^{\alpha\beta}(y,w) = a_{ij}^{\alpha\beta}(\psi^{-1}(y),w),$$

$$J^{-1}(y) = \det\left[\left(\frac{\partial \psi^{-1,\alpha}}{\partial y_\beta}(y)\right)_{\substack{1\leq\alpha\leq n\\ 1\leq\beta\leq n}}\right],$$

$$J_\gamma^{-1}(y) = \frac{\partial}{\partial y_\gamma} J^{-1}(y),$$

$$T^\delta(y) = \nabla\psi^\delta(\psi^{-1}(y)) \text{ et } T_\beta^\delta(\psi^{-1}(y)) = \psi_\beta^\delta(\psi^{-1}(y)).$$

Avec ces notations, on a:

$$u(x) = \tilde{u}(y), \quad \nabla u(x) = \tilde{u}_\alpha(y)\, T^\alpha(y),$$

$$\Phi(x) = \tilde{\Phi}(y),\ \tilde{\Phi} \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^n \cap B(0,R), \mathbb{R}^m),$$

$$\Phi_\alpha(x) = \tilde{\Phi}_\delta(y)\, T_\alpha^\delta(y).$$

Par changement de variable, l'équation (3.1) devient:

(3.3)
$$\int_{\mathbb{R}_+^n} J^{-1}(y)\, A_i^\alpha(y, T^\delta(y)\, \tilde{u}_\delta(y))\, T_\alpha^\delta(y)\, \tilde{\Phi}_\delta^i(y)dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}_+^n} J^{-1}(y)\, \tilde{f}^i(y, \tilde{u}(y))\, \tilde{\Phi}^i(y)dy,$$

pour tout $\tilde{\Phi} \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^n \cap B(0,R), \mathbb{R}^m)$.

Remarque: $(T_\alpha^\delta(y))$ est une matrice inversible et on a:

$$(T_\alpha^\delta(y))^{-1} = \psi_\delta^{1,\alpha}(y).$$

Etant donné que Ω est de classe C^2, il est toujours possible de choisir V' suffisamment petit et des constantes positives b_1 à b_5 tels que, pour tout y de $B(0,R)$, tout $\gamma \in \{1,...,n\}$, on ait:

(3.4) $\forall\gamma \in \{1,...,n\},\ [T^\gamma(y)] \geqslant b_1 > 0,$

(3.5) $|\ T^\beta_\alpha(y)\ | \leqslant b_2,$

(3.6) $|\ (T^\beta_\alpha(y))^{-1}| \leqslant b_3,$

(3.7) $0 < b_4 \leqslant J^{-1}(y) \leqslant b_5,$

où $[T^\gamma]$ est défini au paragraphe 2.

La démonstration du théorème 3.2 repose essentiellement sur les propositions suivantes.

Proposition 3.3: *Si une solution $\tilde{u}$ de (3.3) appartient à $W^{1,s}(\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r),\ \mathbb{R}^m)$ avec $p \leqslant 2$ et $p \leqslant s\ \leqslant np/(n-2)$, alors pour tout $\alpha \in \{1,...,n-1\}$, $\nabla\tilde{u}_\alpha$ appartient à $L^{k(s)}(\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r),\ \mathbb{R}^{mn})$ avec $k(s) = 2s/(s+2-p)$. (On pose $np/(n-2) = +\infty$ si $n=2$). ($\nabla\tilde{u}_\alpha$ désigne le gradient de la dérivée partielle $\tilde{u}_\alpha$).*

Proposition 3.4: *Si une solution u de (3.1) appartient à $W^{1,s}(V,\mathbb{R}^m)$, avec $p \leqslant 2$ et $p \leqslant s \leqslant np/(n-2)$, alors u appartient à $W^{2,k(s)}(V,\mathbb{R}^m)$, avec $k(s) = 2s/(s+2-p)$. De plus, il existe une constante C indépendante de $k(s)$ telle que l'on ait:*

$$\|\nabla^2 u\|_{L^{k(s)}(V,\mathbb{R}^{mn^2})} \leqslant C.$$

Remarqe: Pour tout s vérifiant $p \leqslant s \leqslant np/(n-2)$, on a $p \leqslant k(s) \leqslant np/(n-2+p)$.

Commentaires sur la preuve de la proposition 3.3.

L'estimation des dérivées partielles secondes $\tilde{u}_{\alpha\beta}$ avec $(\alpha,\beta) \neq (n,n)$ s'obtient à l'aide de la méthode des translations de Nirenberg. Le détail des calculs liés à cette méthode étant donné dans [10], dans le but d'alléger la rédaction, on procèdera ici de façon formelle en remplaçant les quotients différentiels Δ^γ_{-h} et Δ^γ_h par les dérivées partielles $-\dfrac{\partial}{\partial y_\gamma}$ et $\dfrac{\partial}{\partial y_\gamma}$, avec $\Delta^\gamma_h\ v(y) = [v(y+he_\gamma) - v(y)]\ h^{-1}$, où $h \in \mathbb{R}^*$ et e_γ est un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. La preuve de la proposition 3.3 se décompose en quatre étapes.

- Dans la première étape, on substitue $-\dfrac{\partial}{\partial y_\gamma}(\dfrac{\partial}{\partial y_\gamma}\tilde{u}(y)\xi(y))$ à $\tilde{\Phi}$ dans (3.3),

$0 \leqslant \gamma \leqslant n\text{-}1$, et on développe le calcul de façon à isoler le terme $A^{\alpha\beta}_{ij}(y, T^\delta(y)\, \tilde{u}_\delta(y)) T^\delta_\beta\, \tilde{u}^j_{\delta\gamma}\, T^\delta_\alpha\, \tilde{u}^i_{\delta\gamma}\xi$. ($\xi$ est une fonction à support dans $\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,R)$).

– Dans la deuxième étape, par une minoration de convexité et par des majorations découlant de l'inégalité de Hölder et des différentes estimations de (T^δ_α), on obtient:

$\int_{\mathbb{R}^n_+} |\, T^\delta_\alpha \tilde{u}_\delta|^{p-2} \xi^{(1-2/k)} |T^\delta_\alpha \tilde{u}_{\delta\,\gamma}\xi^{1/k}\,|^2\, dy \leqslant C_2\, \|T^\delta_\alpha \tilde{u}_{\delta\,\gamma}\xi^{1/k}\|_p + C_3$, ou C_2 et C_3 ne dépendent pas de $k = k(s)$.

– Dans la troisième étape, avec l'inégalité de Hölder d'exposant négatif, on démontre que $\tilde{u}_{\alpha\beta} \in L^{k(s)}(\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r), \mathbb{R}^m)$ pour tout $(\alpha,\beta) \neq (n,n)$. On établira de plus une estimation de $\|\tilde{u}_{\alpha\beta}\|_{L^{k(s)}}$ que nous utiliserons dans la preuve de la proposition 3.4.

Remarque: Le fait de remplacer les quotients différentiels par les dérivées partielles correspondantes simplifie les calculs, notamment, l'expression

$$\int_0^1 A^{\alpha\beta}_{ij}\,(y,(1-t)T^\delta(y)\tilde{u}_\delta(y) + tT^\delta(y+he_\gamma)\tilde{u}_\delta(y+he_\gamma))dt.$$

où e_γ est un vecteur unitaire de direction parallèle à la frontière de $\mathbb{R}^n_+$, est remplacée par:

$$A^{\alpha\beta}_{ij}(y, T^\delta(y)\tilde{u}_\delta\,(y)).$$

De façon à montrer que cette simplification n'a rien d'abusif, nous détaillerons à la quatrième étape la majoration la plus délicate à traiter dans la méthode des quotients différentiels.

Preuve de la Proposition 3.3.

lère étape: On remplace $\tilde{\Phi}$ dans (3.3) par $-\frac{\partial}{\partial y_\gamma}(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\tilde{u}\xi)$ où ξ est de classe C^2 et vérifie supp $\xi \subset B(0,R)$. Dans la preuve de la proposition 3.3, γ appartient à $\{1,\ldots,n-1\}$ et il n'y a pas de sommation sur cet indice. On a:

$$\tilde{\Phi}_\delta = -\frac{\partial}{\partial y_\gamma}(\tilde{u}_{\delta\,\gamma}\,\xi) - \frac{\partial}{\partial y_\gamma}(\tilde{u}_\gamma\,\xi_\delta) \text{ et}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_\gamma}(\tilde{u}_{\delta\,\gamma}\, T^\delta\,\xi) = \frac{\partial}{\partial y_\gamma}(\tilde{u}_{\delta\,\gamma}\,\xi)\, T^\delta + \tilde{u}_{\delta\,\gamma}\frac{\partial}{\partial y_\gamma}(T^\delta)\,\xi,$$

soit encore:

$$T^\delta_\alpha \tilde{\Phi}_\delta = -\frac{\partial}{\partial y_\gamma}(\tilde{u}_{\delta\gamma} T^\delta_\alpha \xi) + \tilde{u}_{\delta\gamma}\,\xi\, T^\delta_{\alpha\gamma}, \qquad \text{avec}$$

$$T^\delta_{\alpha\gamma} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\gamma} T^\delta_\alpha(y).$$

On pose:

$A^\alpha_i(.) = A^\alpha_i(y, T^\alpha(y)\, \tilde{u}_\alpha(y))$, (on utilisera plus loin le même type de notation pour $A^\alpha_{i\gamma}$ et $A^{\alpha\beta}_{ij}$),

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^n_+} -J^{-1}(y)\, A^\alpha_i(.)\, \frac{\partial}{\partial y_\gamma}(T^\delta_\alpha\, \tilde{u}^i_{\delta\gamma}\, \xi)\, dy,$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^n_+} J^{-1}(y) A^\alpha_i(.) T^\delta_{\alpha\gamma} \tilde{u}^i_{\delta\gamma} \xi\, dy,$$

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^n_+} -J^{-1}(y) A^\alpha_i(.)(T^\delta_\alpha \tilde{u}^i_{\gamma\gamma} \xi_\delta + T^\delta_\alpha \tilde{u}^i_\gamma \xi_{\delta\gamma})\, dy,$$

$$I_4 = \int_{\mathbb{R}^n_+} -\tilde{f}^i(y,\tilde{u})(\tilde{u}^i_{\gamma\gamma}\, \xi + \tilde{u}^i_\gamma\, \xi_\gamma)\, dy,$$

Le remplacement de $\tilde{\Phi}$ dans (3.3) par $-\frac{\partial}{\partial y_\gamma}(\tilde{u}_\gamma\, \xi)$ donne donc:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4.$$

Par intégration par parties par rapport à y_γ dans I_1, on obtient:

$$\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_5 + \mathrm{I}_6 + \mathrm{I}_7 + \mathrm{I}_8, \qquad \text{avec}$$

$$I_5 = \int_{\mathbb{R}^n_+} J^{-1}(y)\, A^{\alpha\beta}_{ij}(.)\, T^\delta_\beta\, \tilde{u}^j_{\delta\gamma}\, T^\delta_\alpha\, \tilde{u}^i_{\delta\gamma}\, \xi\, dy,$$

$$I_6 = \int_{\mathbb{R}^n_+} J^{-1}(y)\, A^{\alpha\beta}_{ij}(.)\, T^\delta_{\beta\gamma}\, \tilde{u}^j_\delta\, T^\delta_\alpha\, \tilde{u}^i_{\delta\gamma}\, \xi\, dy,$$

$$I_7 = \int_{\mathbb{R}^n_+} J^{-1}(y)\, A^\alpha_{i\gamma}(.)\, T^\delta_\alpha\, \tilde{u}^i_{\delta\gamma}\, \xi\, dy,$$

$$I_8 = \int_{\mathbb{R}^n_+} J^{-1}_\gamma(y)\, A^\alpha_i(.)\, T^\delta_\alpha\, \tilde{u}^i_{\delta\gamma}\, \xi\, dy.$$

On a donc:

$$|I_5| \leqslant |I_2| + |I_3| + |I_4| + |I_6| + |I_7| + |I_8|. \tag{3.8}$$

2 ème étape. On choisit ξ vérifiant:

$$\xi(y) = 1 \text{ si } y \in B(0,r), \tag{3.9.i}$$

$$0 \leqslant \xi(y) \leqslant 1 \text{ si } y \in B(0,R) \backslash B(0,r), \tag{3.9.ii}$$

$$\xi(y) = 0 \text{ si } y \in B(0,R), \tag{3.9.iii}$$

$$\forall y \in B(0,R),\ |\nabla\xi(y)\, \xi(y)^{-1/k(s)}| \leqslant b_6, \tag{3.9.iv}$$

où b_6 est une constante positive indépendante de $k(s)$. Un tel choix de fonction ξ est toujours possible (cf. [10]), il suffit de poser $\xi(y) = \eta(|y|)$ avec $\eta(\rho) = (R-\rho)^{k'}$ où $k' = k(s)/(k(s)-1)$, dans un voisinage à gauche de R.
On pose dans la suite $k = k(s)$.
Avec l'inégalité de Hölder, on obtient les majorations suivantes:

$$|I_2| \leqslant \|A_i^\alpha(.)\|_{p'} \|J^{-1} T_\alpha^\delta\, \tilde{u}_{\delta\gamma} \xi\|_p \|T_{\alpha\gamma}^\delta (T_\alpha^\delta)^{-1}\|_\infty, \text{ où } (T_{\alpha\gamma}^\delta)\,(T_\alpha^\delta)^{-1}$$

est un produit matriciel, $(T_\alpha^\delta)^{-1}$ désignant l'inverse de la matrice (T_α^δ).

Compte tenu de (3.4), (3.5) et (3.9), on a:

$$|I_3| \leqslant \|A_i^\alpha(.)\|_{p'} \{\| J^{-1} T^\gamma\, \tilde{u}_{\gamma\gamma}\, \xi^{1/k}\|_p b_1^{-1} b_2 b_6 + \| T_\alpha^\delta\|_\infty \|\nabla \tilde{u}\|_p \|\xi_{\delta\gamma}\|_\infty\}.$$

Compte tenu de (3.4) et (3.7), on a:

$$|I_4| \leqslant \|\tilde{f}\|_{p'} \{\|J^{-1}\, T^\gamma\, \tilde{u}_{\gamma\gamma}\, \xi\|_p\, b_1^{-1} b_4^{-1} + \|\tilde{u}_\gamma\|_{p'} \|\nabla\xi\|_\infty\},$$

On aussi:

$$|I_7| \leqslant \|A_{i,\gamma}^\alpha(.)\|_{p'} \|J^{-1}\, T^\delta\, \tilde{u}_{\delta\gamma}\, \xi\|_p \quad ,$$

$$|I_8| \leqslant \|A_i^\alpha(.)\|_{p'} \|J^{-1}\, T^\delta\, \tilde{u}_{\delta\gamma}\, \xi\|_p.$$

Compte-tenu de l'hypothèse (2.6), on a:

$$|I_6| \leqslant a_4 \int_{\mathbb{R}_+^n} J^{-1}(y)\, |T^\delta \tilde{u}_\delta|^{p-2} |T^\delta \tilde{u}_\delta| |(T^\delta)^{-1} T_{\beta\gamma}^\delta| |T_\alpha^\delta \tilde{u}_{\delta\gamma}| \xi\, dy, \tag{3.10}$$

et avec l'hypothèse (2.7), on obtient:

$$|I_5| \geq a_5 \int_{\mathbb{R}^n_+} J^{-1}(y)\,|T^\delta \tilde{u}_\delta|^{p-2}\,|T^\delta \tilde{u}_{\delta\gamma}|^2\,\xi dy. \tag{3.11}$$

De (3.8), (3.10) et (3.11), par des majorations classiques, on obtient:

$$I_9 = \int_{\mathbb{R}^n_+} J^{-1}\,|T^\delta \tilde{u}_\delta|^{p-2}\,|T^\delta \tilde{u}_{\delta\gamma}|^2\,\xi\,dy \leq |I_2|+|I_3|+|I_4|+|I_7|+|I_8|+|I_{10}|$$

avec

$$I_{10} = c_1 \int_{\mathbb{R}^n_+} J^{-1}(y)\,|T^\delta u_\delta|^p\,|(T^\delta)^{-1}\,T^\delta_{\beta\gamma}|^2\,\xi\,dy.$$

Compte tenu des estimations de $|I_2|$, $|I_3|$, $|I_4|$, $|I_7|$, $|I_8|$, de l'inégalité $|\xi| \leq |\xi^{1/k}|$, des hypothèses (2.4), (2.2), (2.5), de (3.8) et (3.7), on déduit:

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |T^\delta \tilde{u}_\delta|^{p-2}\,(\xi^{1-2/k})\,|T^\delta \tilde{u}_{\delta\gamma}\,\xi^{1/k}|^2\,dy \leq c_2\,\|T^\delta \tilde{u}_{\delta\gamma}\,\xi^{1/k}\|_p + c_3,$$

où c_2 et c_3 dépendent de $\|\nabla u\|_p$ et $\|u\|_p$, mais ne dépendent pas de k.

3ème étape: Avec l'inégalité de Hölder d'exposant négatif (lemme 2.1), on obtient:

$$\left\{\int_{\mathbb{R}^n_+} |T^\delta \tilde{u}_{\delta\gamma}\,\xi^{1/k}|^k\,dy\right\}^{2/k} \leq c_4\,\|T^\delta \tilde{u}_\delta\,\xi\|_s^{2-p}\,(\|T^\delta \tilde{u}_{\delta\gamma}\,\xi^{1/k}\|_p + 1),$$

soit encore:

$$\left\{\int_{\mathbb{R}^n_+} |T^\delta \tilde{u}_{\delta\gamma}\,\xi^{1/k}|^k\,dy\right\}^{2/k} \leq 2c_4^2\,(\|T^\delta \tilde{u}_\delta\,\xi\|_s^{2(2-p)} + 1). \tag{3.12}$$

Compte tenu de (3.4) et (3.5), on obtient:

$$\tilde{u}_{\delta\gamma} \in L^k(\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r), \mathbb{R}^m).$$

La proposition 3.3 est donc démontrée. De plus, de (3.12), on déduit:

$$\left\{\int_{\mathbb{R}^n_+} |\tilde{u}_{\delta\gamma}\,\xi^{1/k}|^k\,dy\right\}^{2/k} \leq c_5\,(\|\nabla \tilde{u}\,\xi\|_s^{2(2-p)} + 1), \tag{3.13}$$

pour tout $(\delta, \gamma) \neq (n,n)$ et avec c_5 indépendante de k.

4ème étape: Dans la méthode de Nirenberg, l'opérateur de dérivation partielle

$\dfrac{\partial}{\partial y_\gamma}$ est remplacé par l'opérateur Δ^γ_h défini par:

$\Delta_h^\gamma\, v(y) = [v(y+he_\gamma) - v(y)]\, h^{-1}$, où $h \in \mathbb{R}^*$ et e_γ est un vecteur unitaire. $((e_\gamma)_{1 \leq \gamma \leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$). La méthode consiste à remplacer $\tilde{\Phi}$ dans (3.3) par $\Delta_{-h}^\gamma\, (\Delta_h^\gamma\, \tilde{u}\, \xi)$ et à transposer Δ_{-h}^γ. On obtient alors (cf. [10]):

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \Delta_h(J^{-1}(y)\, A_i^\alpha(y, T^\delta(y)\, \tilde{u}_\delta(y))\, T_\alpha^\delta(y))(\Delta_h\, \tilde{u}_\delta(y)\, \xi(y) + \Delta_h\, \tilde{u}(y)\xi_\delta(y))dy$$

dans le premier membre de l'équation (3.3). (On a posé $\Delta_h^\gamma = \Delta_h$). Le développement des calculs conduit à différents termes, examinons uniquement le plus délicat à traiter:

$$J_1 = \int_{\mathbb{R}^n_+} J^{-1}(y)[A_i^\alpha(y,\, T^\delta(y+he_\gamma)\, \tilde{u}_\delta(y+he_\gamma)) - A_i^\alpha(y,\, T^\delta\,(y)\, \tilde{u}_\delta\,(y)\,)]\; T_\alpha^\delta\,(y)\, \Delta_h\, \tilde{u}_\delta^i\,(y)\, \xi\,(y)\, dy.$$

Remarquons de plus que l'intégrande de J_1 est nulle si $\tilde{u}_\delta\,(y+he_\gamma) = \tilde{u}_\delta\,(y) = 0_{mn}$. On pose: $S = \{\, y \mid \tilde{u}_\delta\,(y+he_\gamma) = \tilde{u}_\delta\,(y) = 0_{mn}\,\}$. Par un calcul classique, on obtient:

$$J_1 = \int_{\mathbb{R}^n_+\setminus S} J^{-1}\,(y) \int_0^1 A_{ij}^{\alpha\beta}(y,\, (1-t)T^\delta(y)\tilde{u}_\delta\,(y) + t\; T^\delta(y+he_\gamma)\tilde{u}_\delta(y+he_\gamma))dt \times \Delta_h\,(T_\beta^\delta\,(y)\, \tilde{u}_\delta^j\,(y))\; T_\beta^\delta\,(y)\, \Delta_h\, \tilde{u}_\delta^i\,(y)\, \xi\,(y)\, dy.$$

On pose:

$$\tilde{A}_{ij}^{\alpha\beta}(t) = A_{ij}^{\alpha\beta}(y,(1-t)\; T^\delta\,(y)\; \tilde{u}_\delta\,(y) \;+\; t\; T^\delta\,(y+he_\gamma)\; \tilde{u}_\delta\,(y+he_\gamma)).$$

On a:

$$J_1 = J_2 + J_3,$$

avec

$$J_2 = \int_{\mathbb{R}^n_+\setminus S} J^{-1}(y)\int_0^1 \tilde{A}_{ij}^{\alpha\beta}\,(t)\; dt\; \Delta_h T_\beta^\delta(y)\tilde{u}_\delta^j\,(y+he_\gamma)\; T_\alpha^\delta\,(y)\; \Delta_h\; \tilde{u}_\delta^i\,(y)\; \xi(y)\; dy,$$

$$J_3 = \int_{\mathbb{R}^n_+\setminus S} J^{-1}(y)\int_0^1 \tilde{A}_{ij}^{\alpha\beta}\,(t)\; dt\; T_\beta^\delta\,(y)\; \Delta_h\; \tilde{u}_\delta^j\,(y)\; T_\alpha^\delta(y)\; \Delta_h\; \tilde{u}_\delta^i\,(y)\; \xi\,(y)\; dy..$$

De l'hypothèse (2.7) et du lemme 2.2, on déduit l'existence d'une constante positive c_6 telle que:

$$J_3 \geqslant c_6 \int_{\mathbb{R}^n_+\setminus S} J^{-1}(y)\,(|T^\delta(y)\,\tilde{u}_\delta(y)| + |T^\delta(y+he_\gamma)\,\tilde{u}_\delta(y+he_\gamma)|)^{p-2} \times |T^\delta(y)\,\Delta_h\,\tilde{u}_\delta(y)|^2\,\xi(y)\,dy.$$

De l'hypothèse (2.6) et du lemme 2.2, on déduit l'existence d'une constante $c_7 > 0$ telles que:

$$|J_2| \leqslant c_7 \int_{\mathbb{R}^n_+\setminus S} J^{-1}(y)\,(|T^\delta(y)\,\tilde{u}_\delta(y)| + |T^\delta(y+he_\gamma)\,\tilde{u}_\delta(y+he_\gamma)|)^{p-2} |T^\delta(y)\,\Delta_h\,\tilde{u}_\delta(y)|\,|\Delta_h\,T^\delta(y)\,\tilde{u}_\delta(y+he_\gamma)|\,\xi(y)\,dy.$$

Avec une inégalité du type:

$$g^2(y) - g(y)\,h(y) \geqslant \frac{1}{2}g^2(y) - \frac{1}{2}h^2(y)$$

et par des majorations classiques, on obtiendra les expressions suivantes:

$$J_4 = \int_{\mathbb{R}^n_+\setminus S} J^{-1}(y)\,(|T^\delta(y)\,\tilde{u}_\delta(y)| + |T^\delta(y+he_\gamma)\,\tilde{u}_\delta(y+he_\gamma)|)^{p-2} \times |T^\delta(y)\,\Delta_h\,\tilde{u}_\delta(y)|^2\,\xi(y)\,dy$$

et

$$J_5 = \int_{\mathbb{R}^n_+\setminus S} J^{-1}(y)\,(|T^\delta(y)\,\tilde{u}_\delta(y)| + |T^\delta(y+he_\gamma)\,\tilde{u}_\delta(y+he_\gamma)|)^{p-2} \times |T^\delta(y+he_\gamma)\,\tilde{u}_\delta(y+he_\gamma)|^2\,|(T^\delta(y+he_\gamma))^{-1}|^2 |\Delta_h\,T^\delta(y)|^2\,\xi(y)dy.$$

Les intégrales J_4 et J_5 remplacent respectivement (à des constantes multiplicatives près) les expressions I_9 et I_{10} des calculs précédents. La fin est alors classique et les autres difficultés liées à l'application de la méthode de Nirenberg sont détaillées dans [10].

Preuve de la Proposition 3.4. Soit u une solution de (3.1) et $\tilde{u}$ la solution de (3.3) définie en (3.2). Si u appartient à $W^{1,s}(V,\mathbb{R}^m)$, $\tilde{u}$ appartient â $W^{1,s}(\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r),\mathbb{R}^m)$ et de la proposition 3.3, on déduit que pour tout α de $\{1,\dots,n-1\}$, $\nabla\tilde{u}_\alpha \in L^{k(s)}(\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r), \mathbb{R}^{mn})$.

Nous allons montrer que $\nabla^2\tilde{u}$ appartient à $L^{k(s)}$ et obtenir une estimation de $\|\nabla^2\tilde{u}\|_{L^{k(s)}(V,\,\mathbb{R}^{mnn})}$, le résultat de la proposition en découlera. De la proposition 3.1, on déduit que

$$u \in W^{2,\,np/(n+p-2)}_{loc}(V,\mathbb{R}^m) \text{ et } \tilde{u} \in W^{2,\,np/(n+p-2)}_{loc}(\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r), \mathbb{R}^m).$$

Les fonctions u et $\tilde{u}$ admettent donc des dérivées partielles premières et secondes au sens classique presque partout (cf. [2] théorème 3.1). On note $\hat{B}=\{ y \in \mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r) \mid \tilde{u}$ admet des dérivées partielles premières et secondes en $y\}$, $N=\{ y \in \hat{B} \mid \nabla\tilde{u}(y)=0_{m\,n}\}$. On va estimer séparément $\nabla^2\tilde{u}$ sur $\bar{N}$ et sur $(\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r)) \setminus \bar{N}$ ($\bar{N}$ désignant l'adhérence de N).

1ère étape: Pour estimer $\nabla^2\tilde{u}$ sur $\bar{N}$, on considère l'ensemble suivant: $\hat{N}=\bar{N} \cap \hat{B}$. On a Mes $\hat{N}=$ Mes $\bar{N}$. De plus, $\nabla\tilde{u}$ est dérivable et donc aussi continu sur $\hat{N}$. On en déduit que:

$$\nabla\tilde{u}(y) = 0_{m\,n} \text{ si } y \in \hat{N}.$$

On a donc: $\nabla^2\tilde{u}(y) = 0_{m\,n\,n}$ pour presque tout $y \in \bar{N}$ (cf, lemme 7.7 [20]).

2ème étape. Estimation de $\nabla^2\tilde{u}$ sur $B^+\setminus\bar{N}$ (avec $B^+=\mathbb{R}^n_+\cap B(0,r)$). De l'équation (3.3), on déduit que, pour presque tout y de $B^+\setminus\bar{N}$, on a:

$$-\frac{\partial}{\partial y_\delta}\left[J^{-1}(y)\; A_i^\alpha(y, T^\delta(y)\tilde{u}_\delta(y))T_\alpha^\delta(y)\right] = J^{-1}(y)\tilde{f}^i(y,\tilde{u}(y)) \tag{3.14}$$

au sens des distributions.
Soit y un point de $(B^+\setminus\bar{N})\cap\hat{B}$, $\nabla\tilde{u}$ étant continue en y, il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de y sur lequel $\nabla\tilde{u}$ est bornée. On peut donc montrer par des arguments classiques que sur $\mathcal{O}$, on a:

$$\frac{\partial}{\partial y_\delta}[J^{-1}(y)\; A_i^\alpha(y, T^\delta(y)\;\tilde{u}_\delta(y))\; T_\alpha^\delta(y)] \tag{3.15}$$

$$= J_\delta^{-1}(y)A_i^\alpha(.)\; T_\alpha^\delta(y) + J^{-1}(y)\; A_{i\delta}^\delta(.)\; T_\alpha^\delta(y) +$$

$$+ J^{-1}(y)A_{ij}^{\alpha\beta}(.)(T_{\beta\delta}^\theta(y)\tilde{u}_\theta^j(y) + T_\beta^\theta(y)\tilde{u}_{\theta\delta}^j(y))T_\alpha^\delta(y) + J^{-1}(y)A_i^\alpha(.)T_{\alpha\delta}^\delta(y).$$

De (3.14) et (3.15), on déduit:

$$J^{-1}(y)\; A_{ij}^{\alpha\beta}(.)\; T_\beta^n(y)\;\tilde{u}_{n\,n}^j(y)\; T_\alpha^n(y) = \tag{3.16}$$

$$= -J_\delta^{-1}\; A_i^\alpha(.)T_\alpha^\delta - J^{-1}\; A_{i\delta}^\alpha(.)T_\alpha^\delta - J^{-1}\; A_{ij}^{\alpha\beta}\; T_{\beta\delta}^\theta\;\tilde{u}_\theta^j\; T_\alpha^\delta\;.$$

$$-\sum_{(\theta,\delta)\neq(n,n)} J^{-1}\; A_{ij}^{\alpha\beta}(.)T_\beta^\theta\;\tilde{u}_{\theta\delta}^j\; T_\alpha^\delta - J^{-1}\; A_i^\alpha(.)\; T_{\alpha\delta}^\delta - J^{-1}\tilde{f}^i(.).$$

En multipliant les deux membres de (3.16) par $\tilde{u}_{n\,n}^i$ et en sommant sur i, avec les hypothèses (2.4) à (2.7), on obtient:

$$|\, T^n\,\tilde{u}_{n\,n}\,|^2 \leqslant c_9\,|\,\tilde{u}_{n\,n}\,|\,(|\nabla\tilde{u}| + \sum_{(\theta,\,\delta)\neq(n,\,n)} |\,\tilde{u}_{\theta\delta}\,| + |\nabla\tilde{u}|^{2-p}|\tilde{\tilde{f}}(.)|).$$

Compte tenu de (3.4), par des majorations classiques, on a:

$$(3.17) \quad | \tilde{u}_{n\,n} | \leqslant c_{10} \left[|\nabla \tilde{u}| + \sum_{\gamma=1}^{n-1} |\nabla \tilde{u}_\gamma| + |\tilde{f}(.)|\, |\nabla \tilde{u}|^{2-p}\right].$$

Avec l'hypothèse (2.2) et (3.13), on montre que $\tilde{u}_{n\,n} \in L^{k(s)}$ et qu'il existe une constante c_{11}, indépendante k, pour laquelle on a:

$$(3.18) \qquad \left\{\int_\Omega |\nabla^2 \tilde{u}(y)\xi(y)^{1/k}|^k\, dy\right\}^{2/k} \leqslant c_{11}(\|\nabla \tilde{u}\, \xi\|_s^{2(2-p)} + 1).$$

De plus, avec l'inégalité de Sobolev, on a:

$$\|\nabla \tilde{u}\, \xi\|_s \leqslant c(s)(\|\nabla^2 \tilde{u} \xi\|_{s_*} + \|\nabla \tilde{u}\, \nabla \xi\,\|_{s_*}, \text{ dés que } s \leqslant \frac{n}{n-1} \text{ et avec } s_* = \frac{ns}{n+s},$$

$c(s)$ étant la constante de l'inégalité de Sobolev pour les espaces considérés. De $s \leqslant \dfrac{np}{n-2}$, on déduit $s_* \leqslant k(s) \leqslant 2$. Il est donc possible de majorer $c(s)$ et $\|\nabla \tilde{u}\ \ \nabla \xi\|_{s_*}$, indépendamment de s, finallement, avec (3.18), on obtient:

$$\left\{\int_\Omega |\nabla^2 \tilde{u}(y)\xi(y)^{1/k}|^k\, dy\right\}^{2/k} \leqslant c_{12}(\|\nabla^2 \tilde{u}\, \xi^{1/k}\|_{k}^{2(2-p)} + 1).$$

Comme on a $s_* \leqslant k$ et $2(2-p) < 2$, on obtient:

$$\|\nabla^2 \tilde{u}\|_{L^k(B^+, \mathbb{R}^{m\,n\,n})} \leqslant c_{13}, \text{ avec } c_{13} \text{ indépendante de } k.$$

Preuve du théorème 3.2: On reprend ici la preuve du théorème 5.1 de [10].

1ère étape. De la proposition 3.4 et du théorème d'injection de Sobolev, on déduit que si une solution u de (3.1) appartient à $W^{1,s}(V, \mathbb{R}^m)$, alors u appartient

à $W^{1,l(s)}(V, \mathbb{R}^m)$ avec $l(s) = \dfrac{2ns}{n(s-p+2)-2s}$.

2ème étape. On vérifie facilement que la suite définie par $s_0 = p$ et $s_{j+1} =$

$\dfrac{2s_j\, n}{n(s_j - p + 2) - 2s_j}$ converge vers $\dfrac{np}{n-2}$ si $n > 2$ et vers $+\infty$ si $n = 2$.

3 ème étape. On démontre, par récurrence sur j, que l'on a:

$$\forall j \in \mathbb{N},\ u \in W^{1,s_j}(V,\mathbb{R}^m) \text{ et } u \in W^{2,k(s_j)}(V,\mathbb{R}^n).$$

4ème étape. Le théorème découle maintenant d'un argument de recouvrement, de ce que $\lim\limits_{j\to+\infty} k(s_j) = \dfrac{np}{n+p-2}$ et de ce que:

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \|\nabla^2 \tilde{u}\|_{L^{k(s_j)}} \leqslant c_{13}.$$

4. LEMMES TECHNIQUES

Dans [10], les résultats de régularité pour $p > 2$ sont obtenus par dualité. Nous procéderons au paragraphe 5 de manière analogue. Nous introduisons pour celà quelques notions préliminaires et nous établissons des résultats techniques utiles dans la suite.

Etant donné que p est supérieur à 2, nous pouvons supposer que les fonctions a_i^α appartiennent à $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn})$ et que les estimations (2.4) à (2.7) sont vérifiées pour tout (x,v) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn}$. Si l'on pose:

$$a(x,v) = \int_0^1 (1-t)\, a_{ij}^{\alpha\beta}(x,tv)\, v_\alpha^i\, v_\beta^j\, dt,$$

de la définition de $a_{ij}^{\alpha\beta}$ de la condition de symétrie $a_{ij}^{\alpha\beta} = a_{ji}^{\beta\alpha}$ et des estimations (2.4) à (2.7), on déduit:

$$a \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn}),$$

$$\frac{\partial}{\partial v_\beta^j} a(x,v) = a_j^\beta(x,v) \text{ pour tout } j, \text{ tout } \beta, \text{ tout } x, \text{ tout } v,$$

et $a(x,.)$ est strictement convexe.

Nous noterons $b(x,.)$ la polaire de $a(x,.)$ au sens de la définition de [6]. Nous allons démontrer les lemmes suivants.

Lemme 4.1: *La fonction b vérifie les résultats de régularité suivants:*

$$b \in C^1(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{mn} \setminus \{0_{mn}\})),$$

$$b_i^\alpha \in C^1(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{mn} \setminus \{0_{mn}\})) \text{ où } b_i^\alpha(x,q) = \frac{\partial}{\partial q_i^\alpha} b(x,q).$$

Notations: On a posé $q = (q_i^\alpha)_{\substack{1\leqslant\alpha\leqslant n\\ 1\leqslant i\leqslant m}}$. Dans la suite, on pose:

$$b^\alpha_{i\gamma}(x,q) = \frac{\partial}{\partial x_\gamma} b^\alpha_i(x,q) \text{ et } b^{\alpha\beta}_{ij}(x,q) = \frac{\partial}{\partial q^\beta_j} b^\alpha_i(x,q)$$

Lemme 4.2: *Il existe des constantes positives $b_7,\ldots,b_9$ telles que, pour tout x de Ω, tout q de $\mathbb{R}^{mn} \setminus \{0_{mn}\}$, tout χ de $\mathbb{R}^{mn}$, on ait:*

$$(4.1) \qquad | b^\alpha_i(x,q) | \leqslant b_7 |u|^{p'-1},$$

$$(4.2) \qquad | b^\alpha_{i\gamma}(x,q) | \leqslant b_7 |q|^{p'-1},$$

$$(4.3) \qquad | b^{\alpha\beta}_{ij}(x,q) | \leqslant b_8 |q|^{p'-2},$$

$$(4.4) \qquad b^{\alpha\beta}_{ij}(x,q)\, \chi^\alpha_i \chi^\beta_j \geqslant b_9 |q|^{p'-2} |\chi|^2.$$

Preuve du lemme 4.1: Par définition de b, on a:

$$b(x,q) = \sup_{v \in \mathbb{R}^{mn}} (qv - a(x,v)).$$

La fonction $a(x,.)$ est strictement convexe, de plus on a:

$$a^\alpha_i(x,v) = \int_0^1 a^{\alpha\beta}_{ij}(x,tv)\, v^j_\beta \, dt.$$

De (4.7), on déduit que le supremum de $qv - a(x,v)$ est atteint au point v vérifiant le système:

$$(4.5) \qquad a^\alpha_i(x,v) = q^\alpha_i.$$

On en déduit que si $q \neq 0_{mn}$, alors $v \neq 0_{mn}$. Des hypothèses (2.3), (2.7) et du théorème d'inversion locale, on déduit que l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{mn}$ qui à (x,q) fait correspondre $v(x,q)$, où $v(x,q)$ est l'unique solution de (4.5), est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{mn} \setminus \{0_{mn}\})$. De l'égalité: $b(x,q) = q\, v(x,q) - a(x,v(x,q))$, on déduit: $b \in C^1(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{mn} \setminus \{0_{mn}\}))$. De plus, $b(x,.)$ étant la transformée de Legendre de $a(x,.)$, il est bien connu que l'on a $(b^\alpha_i(x,q))_{\substack{1\leqslant\alpha\leqslant n\\ 1\leqslant i\leqslant m}} = v(x,q)$. On a donc $b^\alpha_i \in C^1(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{mn} \setminus \{0_{mn}\}))$.

Preuve du lemme 4.2. De l'égalité

$$a^\alpha_i(x,v) = \int_0^1 a^{\alpha\beta}_{ij}(x,tv)\, v^j_\beta \, dt$$

et de (2.7), on déduit l'existence d'une constante positive a_8 telle que:

$$| a_i^\alpha (x,v) | \geq a_8 |v|^{p-1}.$$

On en déduit:

$$|q| = |a_i^\alpha (x,(b_i^\alpha (x,q))) | \geq a_8 | b_i^\alpha (x,q) |^{p-1},$$

soit encore:

$$| b_i^\alpha (x,q) | \leq a_8{}^{1/(1-p)} |q|^{p'-1}.$$

Des propriétés de la transformée de Legendre, on déduit que si v et q satisfont (4.5), on a:

$$(b_{ij}^{\alpha\beta} (x,q)) = (a_{ij}^{\alpha\beta} (x,v))^{-1},$$

où $(b_{ij}^{\alpha\beta})$ et $(a_{ij}^{\alpha\beta})$ sont considérées comme matrices de formes quadratiques sur $\mathbb{R}^{mn}$. Il existe une constante $c(n,m)$ ne dépendant que de n et m telle que: $|b_{ij}^{\alpha\beta} (x,q)| \leq c(n,m)\Lambda(b_{ij}^{\alpha\beta} (x,q))$, oú Λ $(b_{ij}^{\alpha\beta} (x,q))$ est la plus grande valeur propre de $(b_{ij}^{\alpha\beta} (x,q))$.

On a de plus: $\Lambda(b_{ij}^{\alpha\beta} (x,v)) = (\lambda(a_{ij}^{\alpha\beta} (x,v)))^{-1} \leq a_5{}^{-1} |v|^{2-p}$, où $\lambda (a_{ij}^{\alpha\beta} (x,v))$ désigne la plus petite valeur propre de $a_{ij}^{\alpha\beta} (x,v)$. Finallement, on a:

$$| b_{ij}^{\alpha\beta} (x,q) | \leq c(n,m) a_5{}^{-1} | b_i^\alpha (x,q) |^{2-p}.$$

Avec l'estimation précédente de b_i^α, on obtient:

$$| b_{ij}^{\alpha\beta} (x,q) | \leq b_8 |q|^{(2-p)(p'-1)} = b_8 |q|^{p'-2},$$

où b_8 dépend de a_5, a_8 et $c(n,m)$. En dérivant par rapport à x_γ l'identité:

$$b_i^\alpha (x, (a_i^\alpha (x,v))) = v,$$

on obtient:

$$b_{i\gamma}^\alpha (x,q) + b_{ij}^{\alpha\beta} (x,q) a_{i\gamma}^\alpha (x,v) = 0 \text{ avec } q_i^\alpha = a_i^\alpha (x,v).$$

On en déduit:

$$|b_{i\gamma}^\alpha (x,q)| \leq b_8 |q|^{p'-2} a_3 |v|^{p-1}$$

$$\leq b_8 . a_3 . (b_6)^{p-1} |q|^{p'-2} |q|^{(p'-1)(p-1)} = b_7 |q|^{p'-1}. \quad \square$$

L'estimation (4.4) découle de (2.6) et de l'égalité:

$$\lambda\left(b_{ij}^{\alpha\beta}(x,q) \right) = \left(\Lambda\left(a_{ij}^{\alpha\beta}(x,v) \right) \right)^{-1},$$

oú $\lambda\,(b_{ij}^{\alpha\beta})$ désigne la plus petite valeur propre de $(b_{ij}^{\alpha\beta})$ et $\Lambda(a_{ij}^{\alpha\beta})$ désigne la plus grande valeur propre de $(a_{ij}^{\alpha\beta})$.

5. RESULTATS DE REGULARITE POUR P>2

Comme dans [10], on pose la définition suivante.

Definition 5.1: *On dit qu'une fonction q de* $L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^{mn})$ *est une solution adjointe de (1.1) s'il existe une fonction* $u \in W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ *telle que l'on ait:*

(5.1.i) $\quad q_i^\alpha(x) = a_i^\alpha(x,\nabla u(x))$ *pour presque tout* x *de* Ω,

(5.1.ii)) $\quad \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha} q_i^\alpha(x) = -f^i(x,u(x))$ *dans* $[D'(V)]^m$.

On dira alors que q est associée à u.

On a la

Proposition 5.2: *Si une fonction q de* $L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^{mn})$ *est une solution adjointe de (1.1) associée à* $u \in W_0^{1,p}$, *alors, pour toute fonction* $\Phi = (\Phi_i^\alpha)_{\substack{1\le\alpha\le n\\ 1\le i\le m}}$ *de* $L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^{mn})$ *satisfaisant*

(5.2) $\quad \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\Phi_i^\alpha \in L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^m)$

on a:

(5.3) $$-\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Phi_i^\alpha(x)\, u^i(x)dx = \int_\Omega b_i^\alpha(x,q(x))\Phi_i^\alpha(x)dx.$$

Le système (5.1.ii), (5.3) est appelé équation adjointe de (1.1).

Preuve: Par polarité, de (5.1.i), on déduit: $u_\alpha^i(x) = b_i^\alpha(x,q(x))$, soit encore:

$$\int_\Omega u_\alpha^i(x)\Phi_i^\alpha(x)dx = \int_\Omega b_i^\alpha(x,q(x))\Phi_i^\alpha(x)dx.$$

L'egalité (5.3) s'obtient alors par intégration par parties.

Pour obtenir des résultats de régularité sur les solutions de l'équation adjointe de (1.1), nous ferons l'hypothèse suivante sur f.

(5.4.i) $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^m)$.

(5.4.ii) Il existe des constantes positives a_9, a_{10}, a_{11} telles que, pour $x \in \Omega$, tout $u \in \mathbb{R}^m$, on ait:

$$|f(x,u)| \leqslant a_9 |u|^r + L(x)$$

$$|f_x(x,u)| \leqslant a_{10} |u|^s + M(x)$$

$$|f_u(x,u)| \leqslant a_{11} |u|^{s(2-p')} + N(x),$$

avec $L \in L^{np'/(n-2+p')}(\Omega)$, $M \in L^{p'}(\Omega)$, $N \in L^{p'/(2-p')}(\Omega)$, $r = (n-2+p')(p-1)/(n-p)$ et $s = n(p-1)/(n-p)$ si $p < n$ et r et s quelconques dans $[1,\infty[$ si $p \geqslant n$.

Proposition 5.3: *Si $p \geqslant 2$ et si les hypothèses (2.4) à (2.7) et (5.4) sont vérifiées, alors les solutions adjointes de (1.1) appartiennent à $W^{1,np'/(n+p'-2)}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^{nm})$ et les solutions de (1.1) appartiennent à $W^{1,np/(n-2)}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ si $n > 2$ et à $W^{1,r}_{loc}$ pour tout $r < +\infty$ si $n = 2$.*

Preuve: Ce résultat est établi dans la proposition 7.1 de [10] lorsque les fonctions a_i^α ne dépendent pas de x. Compte tenu des hypothèses faites sur a_i^α et des résultats du paragraphe 4, la démonstration de la proposition 5.3 est analogue à celle de la proposition 7.1 et du théorème 6.3 de [10].
On remarquera toutefois que les conditions de croissance en u imposées à f sont plus restrictives que celles de [10] qui sont suffisantes pour établir le résultat de régularité locale (cf.[10] hypothése 7.5). On démontre dans ce paragraphe le

Théorème 5.4: *Si $p \geqslant 2$ et si les hypothèses (2.1), (2.3) à (2.7), (5.4) sont vérifiées, les solutions adjointes de (1.1) appartiennent à $W^{1,np'/(n+p'-2)}(\Omega,\mathbb{R}^{mn})$ et les solutions de (1.1) appartiennent à $W^{1,np/(n-2)}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ si $n > 2$ et à $W^{1,r}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ pour tout $r < +\infty$ si $n = 2$.*

Pour démontrer le théorème 5.4, nous adaptons les méthodes développées dans la preuve du théorème 3.2 à l'équation (5.3). Avec les notations du paragraphe 3, le changement de variable $y = \psi(x)$ effectué dans (5.3) conduit à l'équation:

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} B_i^\alpha(y,\tilde{q}(y))\, \tilde{\Phi}_i^\alpha(y)\, J^{-1}(y)dy = \tag{5.5}$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^n_+} \tilde{\Phi}^\alpha_{i\beta}(y)\, T^\beta_\alpha(y)\, \tilde{u}^i(y)\, J^{-1}(y) dy.$$

où

$$\tilde{q}(y) = q(\psi^{-1}(y)),\ \tilde{u}(y) = u(\psi^{-1}(y)),$$

$$B^\alpha_i(y,w) = b^\alpha_i(\psi^{-1}(y), w),$$

$$\tilde{\Phi}^\alpha_i(y) = \Phi^\alpha_i(\psi^{-1}(y)),\ \tilde{\Phi}^\alpha_{i\beta}(y) = \frac{\partial}{\partial y_\beta}\tilde{\Phi}^\alpha_i(y).$$

On suppose en outre que, dans (5.5), $\tilde{\Phi}$ appartient à $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,R), \mathbb{R}^{mn})$.

Démontrons tout d'abord le résultat suivant, qui est l'analogue de la proposition 3.3.

Proposition 5.5: *Si une solution $\tilde{q}$ de (5.5) appartient à $W^{1,s}(\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r), \mathbb{R}^{mn})$ avec $p' \leqslant s \leqslant np'/(n-2)$ et $p' \leqslant 2$, alors, pour tout $\alpha \in \{1,\ldots,n-1\}$, $\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\tilde{q}$ appartient à $L^{k(s)}(\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r), \mathbb{R}^{mn})$ avec $k(s) = 2s/(s+2-p')$, (on pose $np'/(n-2) = +\infty$ si $n = 2$).*

Preuve de la proposition 5.5: Ici encore, la preuve repose sur la méthode des translations de Nirenberg. De facon à simplifier la démonstration, nous remplacerons formellement comme au paragraphe 3 les quotients différentiels Δ^γ_{-h} et Δ^γ_h par les derivées partielles $-\frac{\partial}{\partial y_\gamma}$ et $\frac{\partial}{\partial y_\gamma}$. On substitue $-\frac{\partial}{\partial y_\gamma}(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\tilde{q}(.)\,\xi(.))$ à $\tilde{\Phi}$ dans (5.5) (où ξ est definie en (3.9)), on transpose l'opérateur $-\frac{\partial}{\partial y_\gamma}$ et on obtient:

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial}{\partial y_\gamma}(B^\alpha_i(.)\, J^{-1}(y))\, \tilde{q}^\alpha_{i\gamma}(y)\, \xi(y)\, dy \tag{5.6}$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^n_+} \tilde{q}^\alpha_{i\beta\gamma}(y)\, \xi(y) \frac{\partial}{\partial y_\gamma}(T^\beta_\alpha(y)\, \tilde{u}^i(y)\, J^{-1}(y))\, dy -$$

$$- \int_{\mathbb{R}^n_+} \tilde{q}^\alpha_{i\gamma}(y)\, \xi_\beta(y) \frac{\partial}{\partial y_\gamma}(T^\beta_\alpha(y)\, \tilde{u}^i(y)\, J^{-1}(y))\, dy,$$

où $$B_i^\alpha(.)=B_i^\alpha(y,\ \tilde q(y)) \text{ et } \tilde q_\gamma(y)=\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\tilde q(y).$$

On pose:

$$B_{i\gamma}^\alpha(.) = B_{i\gamma}^\alpha(y,\tilde q(y)) \text{ et } B_{ij}^{\alpha\gamma}(.) = B_{ij}^{\alpha\beta}(y,\tilde q(y)),$$

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}_+^n} B_{i\gamma}^\alpha(.)\, J^{-1}(y)\, \tilde q_{i\gamma}^\alpha(y)\, \xi(y)\, dy \quad ,$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}_+^n} B_{ij}^{\alpha\beta}(.)\, \tilde q_{j\gamma}^\beta(y)\, \tilde q_{i\gamma}^\alpha(y)\, J^{-1}(y)\, \xi(y)\, dy \quad ,$$

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}_+^n} B_i^\alpha(.)\, J_\gamma^{-1}(y)\, \tilde q_{i\gamma}^\alpha(y)\, \xi(y)\, dy \quad ,$$

$$I_4 = -\int_{\mathbb{R}_+^n} \tilde q_{i\beta\gamma}^\alpha(y)\, \xi(y)\, T_{\alpha\gamma}^\beta(y)\, \tilde u^i(y)\, J^{-1}(y)\, dy \quad ,$$

$$I_5 = -\int_{\mathbb{R}_+^n} \tilde q_{i\beta\gamma}^\alpha(y)\, \xi(y)\, T_\alpha^\beta(y)\, \tilde u_\gamma^i(y)\, J^{-1}(y)\, dy \quad ,$$

$$I_6 = -\int_{\mathbb{R}_+^n} \tilde q_{i\beta\gamma}^\alpha(y)\, \xi(y)\, T_\alpha^\beta(y)\, \tilde u^i(y)\, J_\gamma^{-1}(y)\, dy \quad ,$$

$$I_7 = -\int_{\mathbb{R}_+^n} \tilde q_{i\gamma}^\alpha(y)\, \xi_\beta(y)\, T_{\alpha\gamma}^\beta(y)\, \tilde u^i(y)\, J^{-1}(y)\, dy \quad ,$$

$$I_8 = -\int_{\mathbb{R}_+^n} \tilde q_{i\gamma}^\alpha(y)\, \xi_\beta(y)\, T_\alpha^\beta(y)\, \tilde u_\gamma^i(y)\, J^{-1}(y)\, dy \quad ,$$

$$I_9 = -\int_{\mathbb{R}_+^n} \tilde q_{i\gamma}^\alpha(y)\, \xi_\beta(y)\, T_\alpha^\beta(y)\, \tilde u^i(y)\, J_\gamma^{-1}(y)\, dy \quad .$$

Avec ces notations, (5.6) est équivalent à:

(5.7) $$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8 + I_9.$$

Compte tenu de (5.1.ii), on a:

$$q_{i\alpha}^\alpha(x) = -f^i(x,u(x)) = -\tilde f^i(y,\ \tilde u(y)).$$

Avec l'égalité: $q^{\alpha}_{i\alpha}(x) = -\tilde{q}^{\alpha}_{i\beta}(y)\, T^{\beta}_{\alpha}(y)$, on obtient:

$$(5.8) \qquad \tilde{q}^{\alpha}_{i\beta\gamma}(y)\, T^{\beta}_{\alpha}(y) = -(\tilde{f}^{i}(y,\tilde{u}(y)))_{\gamma} - \tilde{q}^{\alpha}_{i\beta}(y)\, T^{\beta}_{\alpha\gamma}(y).$$

On posera $(\tilde{f}^{i}(y,\tilde{u}(y)))_{\gamma} = (\tilde{f}^{i}(.))_{\gamma}$. Compte tenu de (5.8), on a:

$$(5.9) \qquad I_4 = \int_{\mathbf{R}^n_+} (\tilde{f}^{i})_{\gamma}\xi(T^{\beta}_{\alpha})^{-1}\, T^{\beta}_{\alpha\gamma}\tilde{u}^{i}J^{-1} + \int_{\mathbf{R}^n_+} \tilde{q}^{\alpha}_{i\beta}\xi T^{\beta}_{\alpha}(T^{\beta}_{\alpha})^{-2}(T^{\beta}_{\alpha\gamma})^{2}\,\tilde{u}^{i}\,J^{-1}$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n_+} (\tilde{f}^{i})_{\gamma}\xi(T^{\beta}_{\alpha})^{-1}T^{\beta}_{\alpha\gamma}\tilde{u}^{i}J^{-1} - \int_{\mathbf{R}^n_+} \tilde{f}^{i}\,\xi\,(T^{\beta}_{\alpha})^{-2}\,(T^{\beta}_{\alpha\gamma})^{2}\,\tilde{u}^{i}\,J^{-1}$$

Par des calculs analogues, on obtient:

$$(5.10) \qquad \mathrm{I}_5 = -\int_{\mathbf{R}^n_+} (\tilde{f}^{i})_{\gamma}\,\xi\tilde{u}^{i}_{\gamma}\,J^{-1} - \int_{\mathbf{R}^n_+} \tilde{f}^{i}(T^{\beta}_{\alpha\gamma})^{-1}\,T^{\beta}_{\alpha\gamma}\,\xi\tilde{u}^{i}_{\gamma}\,J^{-1}$$

$$(5.11) \qquad I_6 = \int_{\mathbf{R}^n_+} (\tilde{f}^{i})_{\gamma}\,\xi\tilde{u}^{i}\,J^{-1}_{\gamma} - \int_{\mathbf{R}^n_+} \tilde{f}^{i}\,(T^{\beta}_{\alpha})^{-1}\,T^{\beta}_{\alpha\gamma}\,\xi\tilde{u}^{i}\,J^{-1}_{\gamma}$$

Par un calcul analogue à celui de la minoration de I_5 au paragraphe 3 et compte tenu de (4.4), on obtient:

$$(5.12) \qquad I_2 \geqslant b_9\int_{\mathbf{R}^n_+} |\tilde{q}|^{p'-2}\,|\tilde{q}_{\gamma}\,\xi^{1/k}|^{2}\,\xi^{(1-2/k)}\,dy.$$

Avec les estimations (4.1) et (4.2), on obtient:

$$(5.13) \qquad |I_1| + |I_3| \leqslant c_1\int_{\mathbf{R}^n_+} |\tilde{q}|^{p'-1}\,|\tilde{q}_{\gamma}\,\xi^{(-1/k)}|\,\xi^{(1-1/k)}\,dy,$$

où c_1 dépend de b_1, b_2 et ψ. De (5.9), (5.10), (5.11), on déduit:

$$(5.14) \qquad |I_4|+|I_5|+|I_6| \leqslant c_2(\|(\tilde{f})_{\gamma}\|_{p'}\|\nabla\tilde{u}\|_{p} + \|(\tilde{f})_{\gamma}\|_{p'}\|\tilde{u}\|_{p} + \|\tilde{f}^{i}\|_{p'}\|\tilde{u}\|_{p}),$$

ou c_2 ne dépend que de ξ et du difféomorphisme ψ. Par un calcul direct et avec l'inégalité de Hölder, on obtient:

$$(5.15) \qquad \|(\tilde{f})_{\gamma}\|_{p'} \leqslant \|\tilde{f}_{y_{\gamma}}(\,.,\tilde{u}(.))\,\|_{p'} + \|\,|\tilde{f}_{u}(\,.,\tilde{u}(.)\,)\,|\cdot|\,\nabla\tilde{u}|\,\|_{p'}$$

$$\leqslant \|\tilde{f}_{y_{\gamma}}(\,.,\tilde{u}(.))\,\|_{p'} + \|\tilde{f}_{u}(\,.,\tilde{u}(.))\,\|_{p'/(2-p')}\,\|\,\nabla\tilde{u}\|_{p}$$

Avec (5.14), (5.15) et l'hypothèse 5.4, on obtient:

$$(5.16) \qquad |I_4| + |I_5| + |I_6| \leqslant c_3 ,$$

oú c_3 ne dépend pas de k. Compte tenu de (3.9.iv), on a aussi:

(5.17)

$$|I_7| + |I_8| + |I_9| \leqslant c_4 \left\{ \int_{\mathbb{R}^n_+} |\tilde{q}_\gamma \xi^{1/k}| \, |\tilde{u}| \, dy + \int_{\mathbb{R}^n_+} |\tilde{q}_\gamma \xi^{1/k}| \, |\nabla u| \, dy \right\}$$

$$\leqslant c_4 \left\{ \| \tilde{q}_\gamma \xi^{1/k} \|_{p'} \, \| \tilde{u} \|_p + \| \tilde{q}_\gamma \xi^{1/k} \|_{p'} \, \| \nabla \tilde{u} \|_p \right\}.$$

De (5.8), (5.12), (5.13), (5.16), (5.17), on déduit:

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |\tilde{q}_\gamma \xi^{1/k}|^2 \, |\tilde{q}|^{p'-2} \, \xi^{1-2/k} \, dy \leqslant c_5 \, \| \tilde{q}_\gamma \, \xi^{1/k} \|_{p'} + c_6,$$

oú c_5 et c_6 dépendent de $\| \nabla u \|_p$ et $\| u \|_p$ mais ne dépendent pas de k.

La fin est alors identique à la 3ème étape de la preuve de la proposition 3.3.

Démontrons maintenant un résultat analogue à celui de la proposition 3.4.

Proposition 5.6: *Si une solution $\tilde{q}$ de (5.5) appartient à $W^{1,s}(\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r), \mathbb{R}^{mn})$ avec $p' \leqslant s \leqslant np'/(n-2)$ et $p' \leqslant 2$, alors $\tilde{q}$ appartient à $W^{1,k(s)}(\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r), \mathbb{R}^{mn})$, avec $k(s) = 2s/(s+2-p')$.*

Preuve de la proposition 5.6. lère étape: On procède comme pour la proposition 3.4. De la proposition 5.3, on déduit que $\tilde{q}$ admet des dérivées partielles au sens classique presque partout dans $\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r)$. On note:

$\hat{B} = \{ y \in \mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r) \mid \tilde{q}$ admet des dérivées partielles premières en $y \}$

et $N = \{ y \in \hat{B} \mid \tilde{q}(y) = 0_{mn} \}$.

On démontre alors (cf. lère étape de la preuve de la proposition 3.4) que $\tilde{q}_\gamma(y) = 0_{mn}$ presque partout sur $\bar{N}$ et pour tout $\gamma \in \{ 1,\dots,n \}$.

2 ème étape: On estime $\tilde{q}_n$ sur $(\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r) \} \setminus \bar{N}$.
Remarquons tout d'abord que $\tilde{q}$ et $\nabla \tilde{u}$ sont presque partout dérivables sur $(\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r)) \setminus \bar{N}$ et que l'estimation (3.17) est vérifiée en presque tout point de $(\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r)) \setminus \bar{N}$. En dérivant l'égalité:

$$(5.18) \qquad \tilde{u}^i_\beta(y) = B^\alpha_i(y,\tilde{q}(y))\, T^{-1,\alpha}_\beta(y)$$

par rapport à y_δ, on obtient:

$$(5.19) \qquad \tilde{u}^i_{\beta\delta} = B^\alpha_{i\delta}\, T^{-1,\alpha}_\beta + B^{\alpha\gamma}_{ij}\, T^{-1,\alpha}_\beta\, \tilde{q}^j_{\gamma\delta} + B^\alpha_i\, T^{-1,\alpha}_{\beta\delta}.$$

De (5.19) et des estimations (4.1) à (4.4), on déduit l'existence d'une constante c_7 telle que:

$$(5.20) \qquad |\nabla \tilde{u}_\delta| \leqslant c_7 \{ |\tilde{q}|^{p'-1} + |\tilde{q}|^{p'-2} |\tilde{q}_\delta| \} \text{ si } \delta \neq n.$$

Avec (5.18) on a aussi:

$$(5.21) \qquad |\nabla \tilde{u}| \leqslant c_8 |\tilde{q}|^{p'-1}.$$

De (5.20), (5.21) et (3.17), on déduit:

$$(5.22) \qquad |\tilde{u}_{nm}| \leqslant c_8 \{ |\tilde{q}|^{p'-1} + \sum_{\delta \neq n} |\tilde{q}|^{p'-1} |\tilde{q}_\delta| + |\tilde{f}(.)|\, |\tilde{q}|^{p'-2} \}$$

De (5.19), on déduit également:

$$(5.23) \qquad T^{-1,\alpha}_\beta\, B^{\alpha\gamma}_{ij}\, \tilde{q}^j_{\gamma\delta} = \tilde{u}^i_{\beta\delta} - B^\alpha_{i\delta}\, T^{-1,\alpha}_\beta - B^\alpha_i\, T^{-1,\alpha}_{\beta\,\delta}$$

La matrice carré d'ordre $(m+n)$:

$$(C^{\beta\gamma}_{ij}) = (T^{-1,\alpha}_\beta\, B^{\alpha\gamma}_{ij})$$

peut s'écrire par blocs de la facon suivante:

$$(C_{ij}) = ({}^t T^{-1}\, \delta_{ik})\, (B_{kj}),$$

où δ_{ik} est le symbole de Krönecker. (Le second membre de l'égalité est un produit matriciel par blocs). On en déduit que cette matrice est inversible et que:

$$(C_{ij})^{-1} = (A_{kj})\, ({}^t T^\delta_{ik}),$$

soit encore:

$$(5.24) \qquad (C^{\alpha\gamma}_{ij})^{-1} = (A^{\alpha\gamma}_{ij}\, T^\alpha_\beta)$$

En prenant $\delta = n$ dans (5.23) et avec (5.24), on a:

$$(5.25) \qquad \tilde{q}^\alpha_{jn} = A^{\alpha\gamma}_{ij}\, T^\alpha_\beta\, (\tilde{u}^i_{\beta n} - B^\alpha_{in}\, T^{-1,\alpha}_\beta - B^\alpha_i\, T^{-1,\alpha}_{\beta\, n}).$$

De (5.20),(5.22),(5.25),(4.1) à (4.4), on déduit:

$$|\tilde{q}_n| \leqslant c_{10} |\tilde{q}|^{2-p'} \{ |\tilde{q}|^{p'-1} + \sum_{\delta \neq n} |\tilde{q}|^{p'-2} |\tilde{q}_\delta| + |\tilde{f}(.)| |\tilde{q}|^{p'-2} \},$$

soit encore:

$$(5.26) \qquad |\tilde{q}_n| \leqslant c_{10} \{ |\tilde{q}| + \sum_{\delta \neq n} |\tilde{q}_\delta| + |\tilde{f}(.)| \}.$$

Avec la proposition 5.5, on a:

$$\tilde{q}^\alpha_{i\delta} \in L^{k(s)} \text{ si } \delta \neq n .$$

L'hypothèse (5.4ii) et l'estimation (5.26) permettent maintenant de montrer que $\tilde{q} \in W^{1,k(s)}(\mathbb{R}^n_+ \cap B(0,r), \mathbb{R}^{mn})$ et on peut obtenir une mejoration de $\| \tilde{q} \|_{W^{1,k(s)}}$ indépendante de $k(s)$.

Preuve du théorème 5.4: Par un raisonnement identique à celui de la preuve du théorème 3.2, avec la proposition 5.6, on démontre que les solutions adjointes de (1.1) appartiennent à $W^{1,np'/(n+p'-2)}(\Omega, R^{mn})$.

Avec l'égalité $u^i_\alpha(x) = b^\alpha_i(x, q(x))$ et avec (4.1), on obtient le résultat de régularité pour les solutions de (1.1).

6. COMMENTAIRES ET CONCLUSION

Dans l'exemple classique où l'on a:

$$(6.1) \qquad a^\alpha_i(x,v) = d(x) \, |v|^{p-2} v^i_\alpha \ \text{ avec } d \in W^{1,\infty}(\Omega) \text{ et } d(x) > c > 0,$$

les fonctions a^α_i vérifient les hypothèses (2.3) à (2.7). Nous nous sommes limités ici aux problèmes avec conditions aux limites homogènes. Dans ce cadre-là, les théorèmes 3.2 et 5.4 appliqués au problème associé à (6.1) améliorent les résultats relatifs à ce problème donnés dans [13] et [15].

Dans [13], J. SIMON étudie ce problème avec des conditions aux limites non homogènes et obtient des résultats de régularité dans les espaces de BESOV, mais pour p inférieur à 2, l'ordre de dérivabilité qu'il obtient est strictement inférieur à 2. Le probléme suivant donc ouvert:

Quelles sont les conditions aux limites pour lesquelles les solutions du probléme associé à (6.1) appartiennent à $W^{2,np/(n+p-2)}(\Omega, R^m)$ quand $p<2$?

Pour conclure, il est important de noter que les hypothèses (2.1) à (2.7) pour lesquelles on obtient les résultats de régularité locale et les résultats de régularité globale, dépassent largement le cadre des problémes pour lesquels on obtient des résultats de continuité Höldérienne ([8], [17], [18], [19]), c'est ce qui rend les théorèmes 3.2 et 5.4 particulièrement intéressants.

Bibliographie

[1] R. ADAMS, *Sobolev spaces.* Academic Press 1975.

[2] J. DENY et J.-L. LIONS, *Les espaces du type Beppo Levi.* Ann. Inst. Fourier vol. 5, 1953-54, pp. 305-370.

[3] E. DIBENEDETTO, $C^{1+\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations.* Non Linear Analysis, Theory, Methods and Appl. vol. 7, N° 8, pp. 827-850, 1983.

[4] E. DIBENEDETTO and A. FRIEDMAN, *Regularity of solutions of non linear degenerate parabolic systems.* J. für reine u. angew. Math. (1984) 349, pp. 83-128.

[5] L. C. EVANS, *A new proof of local $C^{1,\alpha}$ regularity for solutions of certain degenerate elliptic P.D.E.* J. Diff. Eq. 45, 1982, pp. 356-375.

[6] I. EKELAND et R. TEMAN, *Analyse convexe et problèmes variationnels* (Dunod 1974).

[7] M. GIAQUINTA, *Multiple integrals in the calculus of variations and non linear elliptic systems.* Princeton University Press 1983.

[8] M. GIAQUINTA, and G. MODICA, *Remarks on the regularity of the minimizers of certain degenerate functionnals.* Man. Math. 57 (1986), 55-99.

[9] G. N. JAKOVLEV, *Properties of solutions of a class of second order quasilinear elliptic equation in divergence form.* Proc. Steklov Inst. Math. 131, 1974, 242-252.

[10] J.-P. RAYMOND, *Théorèmes de régularité locale pour des systèmes elliptiques dégénérés et des problèmes non différentiables* (à paraître Ann.Fac. Sc. Toulouse).

[11] S. SAKS, *Theory of Integral* (New York, Hafner 1937).

[12] J. SIMON, *Sur des équations aux dérivées partielles non linéaires.* Thèse, Paris 1977 (Université P. et M. Curie).

[13] J. SIMON, *Regularité de la solution d'un problème aux limites non linéaires.* Ann. Fac. Sc. Toulouse, vol. 3, 1981.

[14] G. STAMPACCHIA, *Equations elliptiques du second ordre à coeficients discontinus* (Montréal: Université de Montréal N° 16, 1986).

[15] F. de THELIN, *Régularité de la solution d'un problème de Dirichlet fortement non linéaire.* Thèse Toulouse, 1981.

[16] F. de THELIN, *Local regularity properties for the solutions of a non linear partial differential equation.* Non Linear Analysis T.M.A. Vol. 6, N° 8, 1982

[17] P. TOLKSDORF, *Regularity for a more general class of Quasilinear Elliptic Equations.* J.D.E. 51 (1984), pp. 126-150

[18] P. TOLKSDORF, *Everywhere regularity for some quasilinear systems with lack of ellipticity.* Ann. Mat.Pura Appl.(4) 134 (1983), 241-266.

[19] K. UHLENBECK, *Regularity for a class of non linear elliptic systems.* Acta Math. 138 (1977), pp. 219-240.
[20] D. GILBARG, N. S. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer (1977).

Laboratoire d'Analyse Numérique
Université Paul Sabatier
118, Route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex
FRANCE

Recibido: 12 diciembre 1988