

*Analyse mathématique de modèles  
variationnels en simulation  
pétrolière*

*Le cas du modèle black-oil  
pseudo-compositionnel  
standard isotherme*

GÉRARD GAGNEUX, ANNE-MARIE LEFEVERE et  
MONIQUE MADAUNE-TORT

**ABSTRACT.** The aim of the paper is an analytical and numerical approach to the pseudo-compositional black-oil model for simulating a 3-D isothermal constrained polyphasic flow in porous media, taking into account realistic boundary conditions. The handling of the component conservation laws leads to a strongly coupled system including parabolic quasilinear degenerated equations and first-order hyperbolic inequalities: the introduction of unilateral problems arises from the nature of the thermodynamical equilibrium functions and of the governing equations describing the model: it depends locally whether the gas-phase exists (saturated oil) or the gas-phase does not exist (sub-saturated oil), which leads to a free boundary value problem, according to Gibb's laws.

**Résumé:** Cette étude développe l'élaboration d'une modélisation du classique problème «black-oil» de l'ingénierie pétrolière dans le cadre variationnel. On décrit le phénomène physique par un système fortement couplé d'équations paraboliques quasi-linéaires ou hyperboliques du premier ordre, d'inconnues liées par des contraintes unilatérales de type quasi-variationnel couplé. Conformément aux usages de l'utilisateur, on considère le schéma semi-discretisé par rapport au temps correspondant; on montre

l'existence d'une solution pour la représentation *implicite* en les saturations et en pression, la composition de la phase huile étant déterminée à partir des résultats bien connus de J. P. Puel et F. Mignot sur les inéquations hyperboliques du premier ordre. On présente le détail des démonstrations et on donne des informations sur la stabilité inconditionnelle de ce schéma.

### Avant-propos

Lors de l'établissement d'un projet d'exploitation pétrolière et du contrôle de sa mise en oeuvre, l'utilisateur souhaite procéder à des simulations numériques en adoptant un modèle de référence, apte à décrire les écoulements polyphasiques en milieu poreux; la difficulté propre à toute modélisation est de se résoudre à de nécessaires hypothèses simplificatrices face à la réelle complexité des situations rencontrées sans que la présentation simplifiée n'occulte les caractéristiques fondamentales du phénomène physique étudié; en ingénierie pétrolière, le modèle dit «black-oil pseudo-compositionnel standard» isotherme illustre ce compromis d'idées, lorsqu'il s'agit de simuler la production secondaire d'un gisement soumis à des injections d'eau (technique du water-flooding), en prenant en compte la présence éventuelle d'une phase gazeuse occupée par un composant léger et volatil de l'huile; les deux difficultés caractéristiques de cette situation résident dans le fait que

- i) la variance du système thermodynamique n'est pas fixée a priori, car il n'y a pas identité permanente entre les divers constituants chimiques et les phases.
- ii) lorsque l'on veut représenter des écoulements compressibles, on resserre fortement le couplage entre les équations en les saturations et l'équation de la pression.

## I. DESCRIPTION DU MODELE BLACK-OIL STANDARD

### I.1. Composants chimiques et phases

Le gisement pétrolifère, que l'on peut imaginer comme une immense éponge pétrifiée perméable, ne contient dans cette représentation simplifiée que trois constituants (il conviendrait pour certains d'entre eux de parler de «pseudo-constituants» chimiques pour tenir compte du fait qu'on introduit des composants fictifs, supposés représenter globalement des associations de composants de même nature, mais de caractéristiques physiques distinctes):

- l'eau, présente initialement dans le gisement ou introduite artificiellement (pour développer un processus de drainage forcé) ou naturellement

par la poussée de la nappe aquifère, se rencontre dans la seule phase aqueuse; les éventuelles vapeurs d'eau ne sont pas prises en compte dans cette modélisation.

- un composant lourd de l'huile, uniquement présent dans la phase huile.
- un composant léger, volatil, de l'huile, éventuellement présent, selon l'état de la pression et de la température, soit dans la seule phase huile (cas d'une huile sous-saturée) soit à la fois dans la phase huile et dans la phase gazeuse (cas d'une huile saturée). La phase gazeuse, lorsqu'elle est présente, ne contient donc que le pseudo-constituant léger de l'huile.

## 1.2. Notions de variance thermodynamique: la loi des phases de Gibbs et ses conséquences

On appelle variance thermodynamique d'un système physico-chimique le nombre maximal de variables thermodynamiques intensives (pression, température, concentration des différents constituants dans chaque phase) dont on peut fixer indépendamment la valeur; la variance  $v$  d'un système est donnée par la règle des phases, due à Gibbs, selon l'expression  $v = c + 2 - \varphi$  où  $c$  est le nombre de constituants indépendants et  $\varphi$  le nombre de phases.

Dès lors, supposant la température stationnaire (écoulements isothermes) et décrivant la composition de la phase huile par l'intermédiaire de la fonction  $X_o^h$ , la fraction molaire du pseudo-constituant lourd dans la phase huile, il apparaît en pratique que

i) en présence de la phase gazeuse (cas d'une huile saturée), la composition de la phase huile est entièrement déterminée par la connaissance de la pression  $\mathcal{P}$ , selon une formule tabulée par l'expérimentateur, du type:

$$X_o^h = C(\mathcal{P}), \quad C \text{ étant peu sensible aux petites variations de pression.}$$

ii) en l'absence de la phase gazeuse (huile sous-saturée),  $X_o^h$  devient une inconnue thermodynamique, assujettie à prendre, à la pression  $\mathcal{P}$ , des valeurs supérieures ou égales à  $C(\mathcal{P})$ .

Ainsi la loi de Gibbs introduit-elle «naturellement» des contraintes unilatérales de type quasi-variationnel couplé, à tout instant, en tout point du gisement:

$$(E_0) \begin{cases} S_g \geq 0, X_o^h \geq C(\mathcal{P}) \\ S_g (X_o^h - C(\mathcal{P})) = 0, \end{cases}$$

où  $S_g$  désigne la saturation réduite de la phase gazeuse; dès lors, il est important de noter que les diverses fonctions descriptives des propriétés physiques de la phase huile (masse volumique  $\rho_o$ , mobilité, etc...) dépendent de la composition de cette même phase, et donc, à titre d'exemple, on a, à un instant, en un point du gisement:

$$\rho_o = \rho_o(X_o^h, \mathcal{P}) \quad \text{dans le cas d'une huile sous-saturée}$$

$$\rho_o = \rho_o(C(\mathcal{P}), \mathcal{P}) \quad \text{dans le cas saturé.}$$

### I.3. Description du gisement

On introduit  $\Omega$  un ouvert connexe borné de  $R^3$ , figurant la roche-réservoir, de bord  $\Gamma$  régulier admettant en tout point un vecteur normal extérieur  $n$ . Le phénomène sera étudié sur un intervalle de temps  $[0, T]$ ,  $T$  étant fini, strictement positif.

On considère la division de  $\Gamma$  en trois régions ouvertes disjointes  $\Gamma_e, \Gamma_s, \Gamma_L$  telles que:

$$\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_L \cup \Gamma_s \cup \partial\Gamma_L, \quad \bar{\Gamma}_s \cap \bar{\Gamma}_e = \emptyset,$$

où l'on note:

$\Gamma_e$  la partie de la frontière, de  $d\Gamma$ -mesure strictement positive, au contact de l'aquifère ou à travers laquelle on injecte de l'eau et qui se présente dans la pratique comme la réunion finie des diverses régions où sont installés les puits d'injection et l'aquifère; la quantité d'eau injectée est mesurée par l'intermédiaire de la fonction  $f$ , vitesse de filtration, supposée stationnaire avec:

$$f \in L^\infty(\Gamma_e), f(x) \geq 0 \text{ pour presque tout } x \text{ de } \Gamma_e, \int_{\Gamma_e} f(x) d\Gamma > 0, \quad (1)$$

$\Gamma_L$  est la partie imperméable de la frontière, délimitée par les courbes  $\partial\Gamma_L$ .

$\Gamma_s$  est la partie de la frontière, de  $d\Gamma$ -mesure non nulle, où est récupérée l'huile; cette région, réunion finie des zones où sont implantés les divers puits de production, est soumise à une pression fluide extérieure constante connue  $P_{ext}$ , supposée par la suite nulle, moyennant une translation adaptée de l'échelle des pressions.

La roche, de porosité  $\varphi$ , est supposée hétérogène, très faiblement compressible (en pratique, on adopte une loi de comportement en fonction de la pression du type:

$$\varphi(x, \mathcal{P}) = \varphi_o(x) [1 + c_r(\mathcal{P} - P_o)], \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \mathcal{P} \text{ admissible,}$$

où le coefficient de compressibilité de la roche  $c_r$ , supposé constant et la porosité à la pression de référence  $P_o$ ,  $\varphi_o$  vérifient:

$$C_r(\mathcal{P} - P_o) \leq 1, \forall \mathcal{P} \text{ admissible.}$$

La matrice de diffusivité, notée  $k(x)$ , est prise symétrique, uniformément définie positive, pour généraliser les résultats obtenus à un milieu poreux sans homogénéité particulière.

Pour éviter d'inutiles complications (d'ordre d'ailleurs plus dactylographique que théorique !), on rédigera cette étude en supposant la porosité constante (et prise égale à l'unité en faisant une homothétie sur l'échelle du temps) et le tenseur de diffusivité sera pris égal au tenseur identité d'ordre 2. On pourra consulter [15] dans le cas général.

#### I.4. Les équations de conservation et les lois de comportement

Désignant par  $S_p$  la saturation réduite de la phase  $p$ ,  $p$  prenant les valeurs  $w, o, g$  pour représenter les phases eau, huile et gaz, on écrit la conservation de masse pour chacun des constituants  $c$ ,  $c = w, h, l$  (eau, pseudo-constituants lourd et léger), i.e.:

$$(E_1) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\sum_p S_p \rho_p \omega_p^c) + \operatorname{div} (\sum_p \rho_p \omega_p^c Q_p) = 0, \\ \sum_p S_p = S_w + S_o + S_g = 1 \text{ dans } Q = \Omega \times ]0, T[, \end{cases}$$

où l'on a noté, pour la phase  $p$ ,  $\rho_p$  la masse volumique,  $Q_p$  le vecteur vitesse de filtration et  $\omega_p^c$  la fraction massique du constituant  $c$ . Le vecteur  $Q_p$  est donné par la loi de Darcy-Muskat, en fonction de la pression  $\mathcal{P}$ , selon la formule:

$$(E_2) \quad Q_p = -k(x) \frac{k_{r_p}}{\mu_p} (\nabla(\mathcal{P} - P_{c_p}) - \rho_p g),$$

où l'on désigne, en la phase  $p$ , par  $k_{r_p}$  la perméabilité relative,  $\mu_p$  la viscosité dynamique,  $P_{c_p}$  la pression capillaire entre l'huile et la phase  $p$ , et où  $g$  représente le vecteur accélération de la pesanteur.

Notant  $X_p^c$  la fraction molaire du constituant  $c$  dans la phase  $p$ , on dispose en outre des relations d'équilibre et des contraintes suivantes, dans un système triphasique strict, i.e. lorsque  $\varphi = 3$  dans l'expression de la loi de Gibbs:

$$(E_3) \quad \begin{aligned} X_g^w &= 0, X_o^w = 0, X_w^w = 1, \\ X_g^h &= 0, X_w^h = 0, X_o^h + X_o^l = 1, X_g^l = 1, \\ X_g^l &= K^l(\mathcal{P}) X_o^l, X_w^l = 0, \exists \beta > 1; K^l(\mathcal{P}) \geq \beta > 1, \forall \mathcal{P}, \end{aligned}$$

où la constante d'équilibre  $K^l$ , tabulée en fonction de la pression  $\mathfrak{P}$ , à température donnée, par l'utilisateur (cf. [8], par exemple), est peu sensible aux petites variations de pression.

De plus, on dispose de la relation suivante entre les fractions massiques et molaires:

$$(E_4) \quad \omega_p^c = \frac{X_p^c M^c}{\sum_{c'} X_p^{c'} M^{c'}}, \quad c' = w, h, l.$$

où  $M^c$  désigne la masse molaire du constituant  $c$ .

En vue de simplifier l'écriture des équations, on introduit:

$$d_p = \frac{\rho_p}{\mu_p} \text{ l'inverse de la viscosité cinématique de la phase } p;$$

$$d = k_{r_w} d_w + k_{r_o} d_o + k_{r_g} d_g \text{ la mobilité massique globale;}$$

$$v_p = k_{r_p} (d_p/d), \text{ la fraction de flux de la phase } p,$$

dont les propriétés fonctionnelles essentielles sont les suivantes:

$$(H1) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_p = v_p(S_w, S_g, \mathfrak{P}, X_o^h), \quad d = d(S_w, S_g, \mathfrak{P}, X_o^h), \\ \exists \delta > 0, \quad d(S_w, S_g, \mathfrak{P}, X_o^h) \geq \delta > 0, \quad \forall (S_w, S_g, \mathfrak{P}, X_o^h) \text{ admissible,} \\ 0 \leq v_p \leq 1, \quad v_g + v_w + v_o \equiv 1, \\ v_p \text{ s'annule lorsque } S_p \text{ est nul, } v_p \text{ vaut 1 lorsque } S_p \text{ est maximal,} \\ \quad \forall p \in \{w, o, g\}. \\ dv_w \text{ est une fonction indépendante de } X_o^h, \text{ et souvent considérée par} \\ \quad \text{l'utilisateur comme fonction de la seule indéterminée } S_w. \\ dv_g \text{ est une fonction indépendante de la donnée de } X_o^h. \end{array} \right.$$

Enfin, on suppose que chacune des fonctions rencontrées,  $v_p, d_p, d$ , etc... est continue sur son domaine de définition naturel, en observant que le couple  $(S_w, S_g)$  est assujéti à appartenir au triangle  $\mathfrak{T}$ , défini par

$$\mathfrak{T} = \{ (S_w, S_g) \in \bar{\mathbb{R}}^2, S_w \geq 0, S_g \geq 0, S_g + S_w \leq 1 \}.$$

On suppose, conformément à l'usage [2], pour éviter d'inutiles complications, que les fonctions de pression capillaire sont telles que:

$$(H2) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{C_o} - P_{C_w} = P_w(S_w), \text{ indépendamment de } x \text{ et de } S_g, \\ P_{C_o} - P_{C_g} = P_g(S_g), \text{ indépendamment de } x \text{ et de } S_w, \end{array} \right.$$

avec:

$$(H3) \quad \begin{cases} P_w(1) = 0, P'_w(S_w) > 0, \forall S_w \in [0,1], \\ P_g(0) = 0, P'_g(S_g) > 0, \forall S_g \in [0,1], \end{cases}$$

ce qui implique en particulier que l'on a:

$$P_w(S_w) \leq 0, \forall S_w \in [0,1], \quad P_g(S_g) \geq 0, \forall S_g \in [0,1].$$

### I.5. Choix des inconnues et des équations

Les inconnues retenues sont  $S_w, S_g$ , les saturations réduites des phases aqueuses et gazeuses (ces choix sont pratiquement dictés par les lois de comportement décrites en (H2)), une inconnue en pression et une variable propre à décrire la composition de la phase huile, lorsque la connaissance de cette dernière ne résulte pas immédiatement des valeurs de la pression.

Le choix le plus approprié mathématiquement de l'inconnue en pression  $P$  semble être

$$(E5) \quad P = \mathcal{P} - P_{C_g};$$

on pourra trouver dans une précédente étude [16] les motivations de ce choix; d'autres choix sont possibles (cf. [2], [15], [16]), en particulier, pour l'utilisateur,

$$(E6) \quad \tilde{p} = \mathcal{P} - P_{C_o}, \text{ avec } \tilde{p} = P - P_g(S_g),$$

de sorte que les deux notions coïncident dans le cas d'une huile sous-saturée. Dans le cas d'une huile saturée, l'inconnue naturelle qui décrit l'évolution de la composition de la phase huile est  $X_o^h$  ou plus généralement  $\beta(X_o^h)$ , où  $\beta$  est une fonction biunivoque définie sur  $[0,1]$ ; le choix de  $\beta$  s'imposera de lui-même au cours des développements à venir.

Dans l'ouvert  $\Omega$ , à  $t$  fixé, on retient en premier lieu l'équation de conservation de masse pour l'eau, qui s'exprime par:

$$(E7) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w S_w) + \operatorname{div}(\rho_w Q_w) = 0 \text{ dans } Q = \Omega \times ]0, T[,$$

c'est-à-dire, en prenant  $\rho_w = 1$  pour fixer l'unité des masses volumiques et négligeant les effets de la gravité pour simplifier l'écriture (il est évident qu'en pratique, les effets de la gravité ne sont pas négligeables; cependant, dans

cette étude théorique, les méthodes analytiques utilisées ne seraient pas prises en défaut par la prise en compte des effets de gravité et donc, le point de vue adopté pour la rédaction n'est pas restrictif), il vient, plus explicitement:

$$(E8) \quad \frac{\partial}{\partial t} S_w - \operatorname{div}([dv_w](S_w, S_g, P) \{ \nabla P_w(S_w) - \nabla P_g(S_g) + \nabla P \}) = 0 \text{ dans } Q$$

équation parabolique du type quasi-linéaire dégénéré avec terme de transport non linéaire en l'indéterminée principale  $S_w$ ; le choix de cette équation résulte du fait qu'il y a coïncidence entre le constituant eau et la phase eau.

Une seconde expression entre  $S_w, S_g, P$ , indépendante de  $X_o^h$ , peut être trouvée dans  $Q$  en introduisant formellement:

$$\Omega^+(t) = \{x \in \Omega, S_g(t, x) > 0\},$$

$$\Omega^0(t) = \{x \in \Omega, S_g(t, x) = 0\},$$

régions a priori inconnues qui correspondent, à l'instant  $t$ , aux cas de l'huile saturée et sous-saturée, i.e. à la présence effective ou à l'absence de gaz libre.

Dans  $\Omega^+$ , on traduit l'équation de conservation de masse pour l'huile; cette équation dépend d'une constante d'équilibre thermodynamique uniquement déterminée par la connaissance de la pression, puisque la température est supposée constante (loi de Gibbs). Cette équation d'inconnue principale  $S_g$  se traduit par:

$$(E9) \quad \frac{\partial}{\partial t} [(1 - S_w - S_g) \rho_o \omega_o^h] + \operatorname{div}(\rho_o \omega_o^h Q_o) = 0 \text{ dans } \Omega^+(t) \times ]0, T[,$$

où  $\omega_o^h$ , la fraction massique du pseudo-constituant lourd dans la phase huile, s'exprime, d'après (E3) et (E4) précisément par

$$\omega_o^h(C(P)) = \frac{(K^1(P) - 1) M^h}{(K^1(P) - 1) M^h + M^l} \text{ et } \rho_o = \rho_o(P, X_o^h(P)) = \rho_o(P, C(P)).$$

Dans  $\Omega^0(t)$ , par définition, est imposée la condition:

$$S_g = 0,$$

outre les équations de continuité à l'interface de  $\Omega^+(t)$  pour  $S_g$  et ses dérivées partielles premières.

Classiquement, une troisième relation est obtenue en transcrivant la conservation de la masse globale des trois constituants, ce qui conduit à l'équation dite «en pression»:



$$(E10) \quad \frac{\partial}{\partial t} (S_w + \rho_o S_o + \rho_g S_g) + \operatorname{div} (Q_w + \rho_g Q_g + \rho_o Q_o) = 0 \text{ dans } Q.$$

La concision de cette formulation ne doit pas masquer la difficulté essentielle du problème, à savoir que selon la valeur de  $S_g$  au point  $(t, x)$  de  $Q$ , on a,

$$\text{soit } \rho_o = \rho_o(P(t, x), X_o^h(t, x)),$$

$$\text{soit } \rho_o = \rho_o(P(t, x), C(P(t, x))),$$

d'après (E<sub>o</sub>). Dans la suite, on omet la dépendance de  $\rho_o$  en la première variable. La masse volumique de la phase gazeuse est une fonction continue croissante de la seule variable  $P$  (comme par exemple la loi de Boyle-Mariotte) sur le domaine admissible des variations de la pression. En dehors de cet intervalle, on prolonge  $\rho_g$  en une fonction positive croissante bornée, par l'introduction d'une pression fictive  $\bar{P}$ , telle que:

$$\rho_g(\bar{P}) = 1 \text{ et } \rho_g(P) = 1, \forall P \geq \bar{P}. \quad (2)$$

L'introduction de la pression artificielle  $\bar{P}$  traduit le fait que le prolongement de  $\rho_g$  induit une méthode de pénalisation puisque, dans le domaine des pressions admissibles en pratique,  $\rho_g$  est très petit devant l'unité. On notera dans les démonstrations ultérieures que la monotonie de la fonction  $\rho_g$  joue un rôle essentiel, déjà perçu dans [15], [16].

L'équation (E10) d'inconnue principale  $P$  peut se réécrire, plus explicitement:

$$(E11) \quad \frac{\partial}{\partial t} (S_w + \rho_o S_o + \rho_g S_g) - \operatorname{div} (d\{\nabla P + v_w \nabla P_w - (1 - v_g) \nabla P_g\}) = 0$$

dans le cylindre  $Q$ .

Une quatrième équation, indépendante des trois précédentes, doit être formulée pour décrire complètement l'état du système.

Classiquement, en présence de la phase gazeuse, les inconnues retenues dans le modèle black-oil sont  $S_w$ ,  $S_g$  et une fonction dimensionnée à une pression, et lorsque la phase gaz disparaît, une inconnue nouvelle, en l'occurrence  $X_o^h$ , doit être introduite, conformément à la loi de Gibbs, pour définir l'état thermodynamique. Ainsi, dans les régions  $\nabla_o(t)$ , a priori inconnues, où  $S_g = 0$  et  $S_o \neq 0$ , i.e. dans les régions non inondées d'eau,  $X_o^h$  vérifie, au moins formellement, l'équation aux dérivées partielles hyperbolique:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} [S_o \rho_o (X_o^h) \omega_o^h (X_o^h)] + \text{div} (\rho_o (X_o^h) \omega_o^h (X_o^h) Q_o) = 0, \\ \text{pour presque tout } (t, x), t \in ]0, T[ \text{ et } x \in \nabla_o(t), \\ (X_o^h)_{t=0} = (X_o^h)_o \text{ donné, } x \in \nabla_o(0). \end{cases}$$

Cependant, la détermination de  $\nabla_o(t)$  et de sa frontière libre paraît hors d'atteinte et conduit à des développements purement formels, peu satisfaisants.

Une alternative plus féconde (communiquée par T. Gallouët, Université de Chambéry) est d'écrire l'équation de conservation de masse du pseudo-constituant lourd dans l'ouvert  $\Omega$  tout entier, i.e.

$$(E12) \quad \frac{\partial}{\partial t} (S_o \rho_o \omega_o^h) + \text{div} (\rho_o \omega_o^h Q_o) = 0 \text{ dans } Q,$$

où  $\rho_o \omega_o^h$  et  $Q_o$  s'expriment par l'intermédiaire de  $X_o^h$ , en assujettissant l'inconnue principale de cette équation,  $X_o^h$  à vérifier la contrainte d'obstacle, d'après  $(E_o)$ :

$$X_o^h \geq C(P) \text{ dans } Q. \tag{3}$$

Plus explicitement, l'équation (E12), de type hyperbolique du premier ordre non linéaire en l'inconnue  $X_o^h$ , s'exprime par:

$$(E13) \quad \frac{\partial}{\partial t} (S_o \rho_o (X_o^h) \omega_o^h (X_o^h)) - \text{div} (\rho_o (X_o^h) \omega_o^h (X_o^h) \frac{k_r (X_o^h)}{\mu_o (X_o^h)} \nabla (P - P_g(S_g))) = 0$$

Or, on observe d'après (E4) que l'on a

$$(E14) \quad \omega_o^h (X_o^h) = \frac{X_o^h M^h}{X_o^h (M^h - M^l) + M^l}$$

restriction à  $[0,1]$  d'une fonction homographique strictement croissante

à valeurs dans  $[0,1]$ . Il s'ensuit que la fonction  $X_o^h \xrightarrow{\beta} \rho_o (X_o^h) \omega_o^h (X_o^h)$  est une fonction strictement croissante, définie sur  $[0,1]$ , de sorte qu'il est légitime d'introduire la nouvelle fonction auxiliaire inconnue

$$(E15) \quad C_o^h = S_o \rho_o (X_o^h) \omega_o^h (X_o^h).$$

En effet, la connaissance de  $C_o^h$  détermine biunivoquement la connaissance de la composition de la phase huile, i.e.  $X_o^h$ , précisément là où la question est pertinente, i.e. lorsque  $S_o$  est strictement positif, par la formule

$$X_o^h = \beta^{-1} \left( \frac{C_o^h}{S_o} \right), \quad (4)$$

la détermination de  $X_o^h$  étant trivialement sans objet lorsque la phase huile a disparu ! L'équation (E13) ne relève désormais plus de la tératologie et se réécrit plus simplement:

$$(E16) \quad \frac{\partial}{\partial t} C_o^h - \operatorname{div} \left( \frac{K_{r_o}(S_w, S_g, P)}{\mu_o(X_o^h)} C_o^h \nabla (P - P_g(S_g)) \right) = 0 \text{ dans } Q,$$

l'on définit le prolongement par continuité du quotient  $\frac{k_{r_o}}{S_o}$  le long de la droite  $S_g + S_w = 1$ , selon la formule

$$(E17) \quad \begin{cases} K_{r_o}(S_w, S_g, P) = \frac{k_{r_o}(S_w, S_g, P)}{S_o} & \text{si } S_o \neq 0 \\ K_{r_o}(S_w, S_g, P) = -\frac{\partial k_{r_o}}{\partial S_p}(S_w, S_g, P), p \in \{w, g\}, & \text{si } S_o = 0, \end{cases}$$

ce qui impose une certaine régularité de la fonction de perméabilité relative  $k_{r_o}$  le long de la droite  $S_g + S_w = 1$ , avérée par [2], [8].

## 1.6. Les conditions aux limites

On distingue selon la nature de la portion de paroi considérée:

— à travers les puits de production  $\Gamma_s$ , on admet, suivant G. Duvaut et J. L. Lions [9] que le débit global massique est à la fois proportionnel à la différence locale de pression et à la mobilité massique globale du milieu continu, de sorte que désignant par  $\lambda(x)$  une fonction scalaire représentative de la perméabilité au point  $x$  de  $\Gamma_s$ , considérée comme une paroi d'épaisseur finie, au sens de [9], on dispose de la relation:

$$(E18) \quad (Q_w + \rho_o Q_o + \rho_g Q_g) \cdot n = \lambda d(P - P_{ext}) \text{ sur } \Sigma_s = \Gamma_s \times ]0, T[,$$

avec:  $\lambda \in L^\infty(\Gamma_s)$ ,  $\lambda \geq 0$  p.p. sur  $\Gamma_s$ ,  $\operatorname{mes}(x \in \Gamma_s, \lambda(x) > 0) > 0$ .

En outre, on suppose que les débits massiques partiels s'établissent *au prorata* des mobilités massiques respectives, ce qui se traduit par les relations:

$$\frac{Q_w \cdot n}{dv_w} = \frac{\rho_g Q_g \cdot n}{dv_g} = \frac{\rho_o Q_o \cdot n}{dv_o} \text{ sur } \Gamma_s,$$

la valeur commune de ces quotients étant égale à:

$$1/d(Q_w + \rho_g Q_g + \rho_o Q_o). n,$$

ce qui compte tenu de (E18), conduit aux relations simples suivantes, de type Fourier non linéaire

$$(E19) \quad \rho_p Q_p. n = \lambda v_p d(P - P_{ext}) \text{ sur } \Sigma_s, p = w, 0, g;$$

sur les puits d'injection et les zones de contact avec l'aquifère, on traduit la continuité de la vitesse de filtration globale et le fait que ces régions sont le siège d'une phase mouillante par les relations:

$$(E20) \quad \begin{aligned} S_w = 1, S_g = 0, \\ (\sum_p \rho_p Q_p). n = -f, \text{ sur } \Sigma_e = \Gamma_e \times ]0, T[ , \end{aligned}$$

où  $f$  est défini en (1).

L'imperméabilité de  $\Gamma_L$  s'exprime immédiatement par les conditions de Neumann homogènes:

$$(E21) \quad 0 = \rho_p Q_p. n \text{ sur } \Sigma_L = \Gamma_L \times ]0, T[, p = 0, w, g,$$

ce qui apparaît comme un cas particulier de l'équation (E19) l'imperméabilité de la roche se traduisant par la nullité de la fonction  $\lambda$ .

On verra ultérieurement que moyennant un changement adapté d'espaces fonctionnels, la seconde condition de bord de (E20) (condition de Neumann non homogène) peut être remplacée par une condition de Dirichlet non homogène.

$$(E22) \quad P = P^* \text{ sur } \Sigma_e,$$

ce qui correspond à un procédé d'exploitation pour lequel les puits de drainage sont maintenus à une pression imposée.

## 1.7. Les hypothèses simplificatrices

Le lecteur parvenu à ce point de l'exposé se fera une douce violence en acceptant quelques simplifications dans l'expression du modèle, de crainte qu'un rigorisme trop exigeant et une écriture boursoufflée de présomption vaniteuse ne fassent perdre de vue l'essentiel de l'analyse mathématique des

équations. Dès lors, on va omettre certains termes de diffusion, jugés négligeables en général par l'utilisateur (l'influence de ces termes peut être éventuellement prise en compte par une classique méthode de prédicteur-correcteur): ainsi dans l'équation (E8), on néglige le terme  $d\hat{u}$  à la pression capillaire  $P_g$ , le terme de transport étant jugé communément prépondérant; dans le même esprit, les termes de diffusion dus aux pressions capillaires  $P_w$  et  $P_g$  dans l'équation en pression (E11) ne sont pas pris en compte. Enfin, on convient dans l'équation en pression, et *uniquement là*, pour desserrer le couplage et réduire la longueur des expressions analytiques que la masse volumique de la phase huile ne dépend pas de la composition de cette même phase et pour simplifier l'écriture, on prendra  $\rho_o$  constant, égal à l'unité; dans les autres équations, la dépendance de  $\rho_o$  en fonction de  $X_o^h$ , trait caractéristique des modèles compositionnels, est prise en compte. Dans ce cas, l'équation en pression se réécrit:

$$\frac{\partial}{\partial t}(S_g(\rho_g(P)^* - 1)) - \operatorname{div}(d(S_w, S_g, P, X_o^h) \nabla P) = 0 \text{ dans } Q,$$

formulation simplifiée où apparaît clairement l'influence de l'éventuelle phase gazeuse et de la compressibilité de cette phase. Cette simplification peut paraître troublante, mais, en fait, par des adaptations adéquates des méthodes développées dans ce travail, on peut traiter le cas général, à savoir une équation en pression du type

$$\frac{\partial}{\partial t}[S_w(1 - \rho_o(X_o^h)) + S_g(\rho_g(P) - \rho_o(X_o^h)) + \rho_o(X_o^h)] - \operatorname{div}(d(S_w, S_g, P, X_o^h) \nabla P) = 0 \text{ dans } Q.$$

Pour cela, on pourra se reporter au travail de M. Bahhou [19] et F. Guerfi [20].

## II. FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME — SEMI-DISCRETISE IMPLICITE PAR RAPPORT AU TEMPS

### II.1. Quelques notations

On considère un pas de temps  $h$  strictement positif et on recherche une suite de 4-uplets  $(S_w^k, S_g^k, P^k, C^k)$  appelés à approcher le 4-uplet  $(S_w, S_g, P, C^h)$  à l'instant  $t_k = kh$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , en utilisant un schéma implicite en les inconnues en saturation et en pression. Avant de présenter ce schéma, on adopte afin d'alléger l'écriture des équations, les conventions suivantes relatives aux fonctions  $d, v_p, \rho_p, \mu_p$ , etc..., en notant de manière générale, pour tout entier  $k$  et pour toute fonction générique  $\sigma$

$$\sigma_k(x) = \sigma(S_w^k, S_g^k, P^k, (X_0^h)^{k-1}), x \in \Omega, k \geq 1$$

$(X_0^h)^k$  étant défini à partir de  $C^k$  par la relation (4), et  $\tilde{\sigma}_k$  un interpolant de classe  $C^1$  de  $\sigma_k$  sur  $\bar{\Omega}$ .

De même, la fonction  $K_{r_0}$  étant définie en (E17), on note, en relation avec l'expression de l'équation (E16),

$$a_i^k = \frac{-1}{\mu_o((X_0^h)^{k-1})} K_{r_0}(S_w^k, S_g^k, P^k) \left[ \frac{\partial P^k}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} P_g(S_g^k) \right],$$

et on suppose que la famille régulière  $\{\tilde{a}_i^k\}$  correspondante est construite de sorte que:

$$\frac{\partial \tilde{a}_i^k}{\partial x_i} \text{ soit uniformément minoré, i.e.}$$

$$(H4) \quad \exists \omega > 0, \frac{\partial \tilde{a}_i^k}{\partial x_i} + \omega \geq 0 \text{ dans } \bar{\Omega}.$$

On introduit enfin les notations suivantes:

$$\mathfrak{K}_k = \{ V \in L^2(\Omega), v \geq S_o^k[\rho_o \omega_o^h](C(P^k)) \text{ p.p. dans } \Omega \}.$$

$$A_k = \tilde{a}_i^k \frac{\partial}{\partial x_i}, b_k = \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{a}_i^k), \text{ avec, de façon systématique la}$$

convention d'Einstein de l'indice répété  $i$ .

## II.2. Le cadre fonctionnel de la modélisation

On introduit l'espace de Hilbert  $V$ ,

$$V = \{ v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_o \},$$

muni, grâce à l'inégalité de Poincaré du produit scalaire:

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

la dérivation étant prise au sens des distributions.

Identifiant  $H = L^2(\Omega)$  à son dual, on peut identifier  $V'$ , le dual de  $V$ , à un sur-espace de  $H$ , avec  $V \subset H \subset V'$ , l'injection de  $V$  dans  $H$  étant continue, à image dense.

On considère:  $C^+$  le cône positif de  $H$ ,

$$K^+ = \{v \in V; v \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega\} = V \cap C^+,$$

cône convexe fermé de  $V$ , de sommet l'origine, et:

$$K_1 = \{v \in H^1(\Omega); v = 1 \text{ sur } \Gamma_e\},$$

convexe fermé non vide de  $H^1(\Omega)$ .

On note  $\| \cdot \|$  (resp.  $| \cdot |$ ) la norme dans  $V$  (resp. dans  $H$ ), et  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire dans  $H$ , ainsi que la dualité  $V', V$ , ce qui est loisible, compte tenu des identifications précédentes.

Adoptant à nouveau la convention de sommation de l'indice répété, pour tout système  $(a_i)_{1 \leq i \leq 3}$  de fonctions de classe  $C^1$  sur  $\bar{\Omega}$ , on note  $l$  la fonction définie sur  $\Gamma$  par  $l(x) = a_i(x) n_i(x)$ .

On introduit avec les notations de C. Bardos [13] et F. Mignot - J. P. Puel [14] les espaces:

$$W(A) = \{u \in L^2(\Omega); Au \in L^2(\Omega)\} \text{ où } Au = a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ muni de la norme:}$$

$$\|u\|_{W(A)}^2 = |u|^2 + |Au|^2,$$

$$\begin{aligned} \text{et } \tilde{W}(A) &= \{u \in W(A); u|_{\Gamma} \in L^2_1(\Gamma)\} \text{ où } L^2_1(\Gamma) = \\ &= \{u: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Gamma} |l(x)| |u(x)|^2 d\Gamma < +\infty\} \end{aligned}$$

muni de la norme:

$$\|u\|_{\tilde{W}(A)}^2 = \|u\|_{W(A)}^2 + \int_{\Gamma} |l(x)| |u(x)|^2 d\Gamma.$$

Dans les deux paragraphes suivants, on s'intéresse au cas d'une exploitation à débit d'eau imposé sur les puits d'injection. L'étude du cas d'une exploitation à pression imposée sur les puits de drainage sera faite au paragraphe II.5.

### II.3. Un résultat d'existence

Dans ce cadre fonctionnel, on dispose de la proposition suivante qui établit que le problème couplé régularisé par l'ajout d'un terme de viscosité artificielle dans les équations en saturation est bien posé mathématiquement:

**Proposition 1.** *Pour tout  $\epsilon$  strictement positif et pour tout  $h$  strictement positif, suffisamment petit, pour toute donnée initiale  $(S_w^o, S_g^o, P^o, (X_o^h)^o)$ , vérifiant les hypothèses naturelles*

$$(H5) \quad (S_w^o, S_g^o) \in \mathfrak{F}, P^o \in L^\infty(\Omega), 0 \leq (X_o^h)^o \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega$$

et posant:

$$C^o = (1 - S_w^o - S_g^o) [\rho_o \omega_o^h] ((X_o^h)^o), \quad (5)$$

il existe au moins une suite  $(S_w^k, S_g^k, P^k, C^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  telle que:

$$S_w^k \in K_I, S_g^k \in K^+, P^k \in H^1(\Omega) \cap C^+, \quad (6)$$

$$C^k \in \mathfrak{K}_k \cap \bar{W}(A_k), \quad (7)$$

$$0 \leq S_w^k \leq 1, 0 \leq S_g^k \leq 1, 0 \leq S_w^k + S_g^k \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega, \quad (8)$$

solution du système fortement couplé d'équations et d'inéquations variationnelles du premier et du second ordre suivant:

i)  $S_w^k \in K_I$ , vérifiant:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_{\Omega} (S_w^k - S_w^{k-1}) v \, dx + \int_{\Omega} \{ [dv_w]_k P_w^k (S_w^k) + \epsilon \} \nabla S_w^k \cdot \nabla v \, dx \\ & + \int_{\Omega} [dv_w]_k \nabla P^k \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_s} \lambda [dv_w]_k P^k v \, d\Gamma = 0, \forall v \in V. \end{aligned}$$

ii)  $S_g^k \in K^+$ , vérifiant:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_{\Omega} [\rho_o \omega_o^h] (C(P^k)) (S_w^k + S_g^k - S_w^{k-1} - S_g^{k-1}) (v - S_g^k) \, dx \\ & + \int_{\Omega} \omega_o^h (C(P^k)) [dv_o]_k \nabla P_g^k \cdot \nabla (v - S_g^k) \, dx + \epsilon \int_{\Omega} \nabla (S_g^k + S_w^k) \cdot \nabla (v - S_g^k) \, dx \\ & - \int_{\Omega} \omega_o^h (C(P^k)) [dv_o]_k \nabla P^k \cdot \nabla (v - S_g^k) \, dx \\ & \geq \int_{\Gamma_s} \lambda \omega_o^h (C(P^k)) [dv_o]_k P^k (v - S_g^k) \, d\Gamma, \forall v \in K^+. \end{aligned}$$

iii)  $P^k \in H^1(\Omega) \cap C^+$ , vérifiant:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_{\Omega} S_g^k (\rho_g(P^k) - 1) (v - P^k) \, dx + \int_{\Omega} d_k \nabla P^k \cdot \nabla (v - P^k) \, dx \\ & + \int_{\Gamma_s} \lambda d_k P^k (v - P^k) \, d\Gamma \geq \int_{\Gamma_r} f (v - P^k) \, d\Gamma + 1/h \int_{\Omega} S_g^{k-1} (\rho_g(P^{k-1}) - 1) (v - P^k) \, dx, \\ & \forall v \in C^+ \cap H^1(\Omega), \end{aligned}$$



iv)  $C^k \in \mathfrak{K}_k \cap \bar{W}(A_k)$ , vérifiant

$$1/h \int_{\Omega} (C^k - C^{k-1})(v - C^k) dx + \int_{\Omega} (A_k C^k + b_k C^k)(v - C^k) dx \geq 0,$$

$$\forall v \in \mathfrak{K}_k,$$

et la condition

$$C^k = S_o^k[\rho_o \omega_o^h](C(P^k)) \text{ sur la partie de } \Gamma, \text{ éventuellement de mesure non nulle, où } \tilde{a}_i^k, n_i < 0. \quad (9)$$

**Démonstration:** Dans une première partie, on établit par des méthodes de point fixe l'existence d'une solution du schéma *implicite* défini par les relations variationnelles *i), ii), iii)*; pour cela, on procède en deux temps:

1) on introduit un résultat préparatoire sur l'équation en pression grâce au théorème de point fixe de Schauder.

2)  $X_o^h$  étant maintenu stationnaire dans le passage du temps  $t_k$  à  $t_{k+1}$ , on détermine le triplet  $(S_w^{k+1}, S_g^{k+1}, P^{k+1})$  à partir de la connaissance de  $(S_w^k, S_g^k, P^k)$  par un théorème de point fixe du type Tychonoff [23] appliqué dans un sous-espace fermé de  $W = [H^1(\Omega)]^3$  muni de la topologie  $\sigma(W, W')$  qui est localement convexe séparée.

Dans une seconde partie, on montre comment  $C^{k+1}$  (et donc  $(X_o^h)^{k+1}$ ) est obtenu par la résolution de l'inéquation hyperbolique linéaire de premier ordre *iv)*.

Par des variantes et diverses généralisations des méthodes présentées, l'étude du schéma totalement implicite en le 4-uplet  $(S_w^k, S_g^k, P^k, C^k)$  est entreprise par M. Bahloul [19]. En outre, pour établir la démonstration, il convient de prolonger en dehors de  $\mathfrak{T}$  les fonctions  $v_p, p \in \{0, w, g\}, d$ , etc... (avec la même notation): cette étude délicate a été entreprise par les auteurs dans [15], pp. 563-564-565, et on se réfère ici, sans les rappeler, à ces prolongements.

On convient de montrer comment est obtenu le 4-uplet  $(S_w^1, S_g^1, P^1, C^1)$  à la première itération (qu'on notera pour simplifier  $(S_w, S_g, P, C)$  à partir de la donnée initiale  $(S_w^o, S_g^o, P^o, C^o)$ .

### Première partie de la démonstration

#### 1ère étape

On établit qu'étant donné le triplet  $(s_w, s_g, p)$  pris arbitrairement dans  $[H^1(\Omega)]^3$ , il existe un élément  $P$  et un seul dans  $H^1(\Omega) \cap C^+$ ,  $P = P(s_w, s_g, p)$ , vérifiant:

$$(E23) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1/h \int_{\Omega} s_g^+(\rho_g(P)-1)(v-P) dx + \int_{\Omega} d(s_w, s_g, p, (X_o^h)^p) \nabla P \cdot \nabla(v-P) dx \\ + \int_{\Gamma} \lambda d(s_w, s_g, p, (X_o^h)^p) P(v-P) d\Gamma \geq \int_{\Gamma} f(v-P) d\Gamma \\ + 1/h \int_{\Omega} S_g^o(\rho_g(P_o)-1)(v-P) dx, \forall v \in H^1(\Omega) \cap C^+. \end{array} \right.$$

On note, pour simplifier,  $d_o = d(s_w, s_g, p, (X_o^h)^p)$ .

En effet, l'unicité résulte essentiellement de la monotonie de la fonction  $\rho_g$ , comme on le peut voir en introduisant  $P$  et  $\hat{P}$  deux solutions possibles; pour le choix loisible de  $v = \hat{P}$  (resp.  $v = P$ ) dans l'inéquation relative à  $P$  (resp.  $\hat{P}$ ), il vient par différence:

$$1/h \int_{\Omega} s_g^+(\rho_g(P)-\rho_g(\hat{P}))(P-\hat{P}) dx + \int_{\Omega} d_o |\nabla(P-\hat{P})|^2 dx + \int_{\Gamma} \lambda d_o (P-\hat{P})^2 d\Gamma \leq 0;$$

d'où la propriété d'unicité, puisque l'on a:

$s_g^+(\rho_g(P)-\rho_g(\hat{P}))(P-\hat{P}) \geq 0$ , p.p. dans  $\Omega$ ; cette condition de signe justifie l'artifice qui consiste à introduire la partie positive de  $s_g$ .

L'existence s'obtient facilement à partir du théorème de point fixe de Schauder; en effet, étant donné  $\mathfrak{P}$  dans  $L^2(\Omega)$ , on sait qu'il existe une fonction  $P = P(\mathfrak{P})$  et une seule dans  $H^1(\Omega) \cap C^+$ , telle que:

$$1/h \int_{\Omega} s_g^+(\rho_g(\mathfrak{P})-1)(v-P) dx + \int_{\Omega} d_o \nabla P \cdot \nabla(v-P) dx + \int_{\Gamma} \lambda d_o P(v-P) d\Gamma \geq \int_{\Gamma} f(v-P) d\Gamma + 1/h \int_{\Omega} S_g^o(\rho_g(P_o)-1)(v-P) dx, \forall v \in H^1(\Omega) \cap C^+.$$

On observe, puisque  $\rho_g$  est une fonction bornée, qu'on peut trouver une constante  $C_1$  positive, telle que

$$\|P(\mathfrak{P})\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1, \text{ indépendamment de } \mathfrak{P},$$

la constante  $C_1$  dépendant a priori de  $s_g$ .

On considère alors l'application de  $L^2(\Omega)$  dans lui-même qui, à  $\mathfrak{P}$ , considéré comme élément de  $L^2(\Omega)$ , fait correspondre  $P(\mathfrak{P})$ . On vérifie que cette application est (fortement) continue de  $L^2(\Omega)$  dans lui-même et laisse invariante la boule de  $H^1(\Omega)$ , de centre l'origine, de rayon  $C_1$ , qui est une partie convexe non vide, compacte dans  $L^2(\Omega)$ , d'où l'existence d'un point fixe (dans  $H^1(\Omega)$ , en fait).

On conclut alors la première étape en faisant la remarque *essentielle* suivante: il existe une constante  $R_1 = R_1(h)$ , telle que la solution  $P$  de l'équation (E23) vérifie l'estimation a priori fondamentale:

$$\|P\|_{H^1(\Omega)} \leq R_1, \text{ indépendamment de } s_w, s_g, p. \quad (10)$$

Il suffit en effet de prendre dans (E23) la fonction-test  $v = \bar{P}$ ,  $\bar{P}$  étant introduit par (2); il vient alors:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} d_o |\nabla P|^2 dx + \int_{\Gamma_c} \lambda d_o P (P - \bar{P}) d\Gamma + 1/h \int_{\Omega} s_g^+ (\rho_g(P) - 1) (P - \bar{P}) dx \\ & \leq \int_{\Gamma_c} f (P - \bar{P}) d\Gamma + 1/h \int_{\Omega} S_g^o (\rho_g(P_o) - 1) (P - \bar{P}) dx, \end{aligned}$$

et on observe que, *par construction*, et grâce à la monotonie de  $\rho_g$

$$s_g^+ (\rho_g(P) - 1) (P - \bar{P}) \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega, \text{ d'après (2),}$$

et

$$d_o(s_w, s_g, p, (X_o^h)^p) \geq \delta > 0, \text{ s'après (H1),}$$

d'où le résultat, après des manipulations élémentaires.

### 2ème étape:

Ayant défini  $P = P(s_w, s_g, p)$ , on considère le couple  $S_w = S_w(s_w, s_g, p)$ ,  $S_g = S_g(s_w, s_g, p)$  solution des problèmes variationnels:

a)  $S_w \in K_1$  et vérifie

$$\begin{aligned} & 1/h \int_{\Omega} (S_w - S_w^o) v dx + \int_{\Omega} \{ [dv_w](s_w, s_g, p) P'_w(S_w) + \epsilon \} \nabla S_w \cdot \nabla v dx \\ & + \int_{\Omega} [dv_w](s_w, s_g, p) \nabla P \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_c} \lambda [dv_w](s_w, s_g, p) P v d\Gamma = 0, \forall v \in V. \end{aligned} \quad (E24)$$

b)  $S_g \in K^+$  et vérifie

$$\left\{ \begin{aligned} & 1/h \int_{\Omega} [\rho_o \omega_o^h](C(P)) (S_w + S_g - S_w^o - S_g^o) (v - S_g) dx \\ & + \int_{\Omega} \omega_o^h(C(P)) [dv_o](s_w, s_g, p) \nabla P_g(S_g) \cdot \nabla (v - S_g) dx \\ & + \epsilon \int_{\Omega} \nabla (S_g + S_w) \cdot \nabla (v - S_g) dx - \int_{\Omega} \omega_o^h(C(P)) [dv_o](s_w, s_g, p) \nabla P \cdot \nabla (v - S_g) dx \\ & \geq \int_{\Gamma_c} \lambda \omega_o^h(C(P)) [dv_o](s_w, s_g, p) P (v - S_g) d\Gamma, \forall v \in K^+. \end{aligned} \right.$$

En effet, le problème a) à condition de Dirichlet non homogène sur  $\Gamma_e$  exprimée par l'introduction de  $K_1$  admet une solution unique  $S_w$ , d'après le théorème de G. Stampacchia [10]; puis, par la connaissance de  $P$  et  $S_w$ , on définit par ce même théorème,  $S_g$ , l'unique solution dans  $K^+$  du problème unilatéral (E.25).

On montre alors sans difficulté qu'il existe deux constantes  $R_2$  et  $R_3$ , indépendantes du choix du triplet  $(s_w, s_g, p)$  telles que

$$\|S_w\|_{H^1(\Omega)} \leq R_2, \|S_g\|_V \leq R_3. \quad (11)$$

### 3ème étape

On introduit alors l'application  $S$  de

$$\mathfrak{H} = H^1(\Omega) \times V \times H^1(\Omega) \text{ dans lui-même}$$

qui au triplet  $(s_w, s_g, p)$  fait correspondre le triplet  $(S_w, S_g, P)$  construit aux étapes 1 et 2; on munit  $\mathfrak{H}$  de sa topologie naturelle d'espace produit.

Il résulte de (10) et (11) que  $S$  laisse invariant

$$\mathfrak{C} = \{K_1 \cap B_{H^1(\Omega)}(0, R_2)\} \times \{K^+ \cap B_V(0, R_3)\} \times \{C^+ \cap B_{H^1(\Omega)}(0, R_1)\},$$

ensemble convexe non vide, faiblement compact de  $\mathfrak{H}$ .

Dès lors qu'on établirait que  $S$  est  $\sigma(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}')$ -faiblement continue de  $\mathfrak{H}$  dans lui-même, il résulterait du théorème de Schauder-Tychonoff que  $S$  admet un point fixe dans  $\mathfrak{C}$ , i.e. il existe un triplet dans  $\mathfrak{C}$ , tel que  $(S_w, S_g, P) = S(S_w, S_g, P)$ .

Observant enfin que pour un tel triplet, on a

$$S_g^+ = S_g, \text{ car } S_g \in K^+$$

(ce qui légitime a posteriori l'artifice utilisé)

il apparaît que  $(S_w, S_g, P)$  ainsi construit (du moins théoriquement...) est solution de i), ii) et iii).

La démonstration de la faible continuité de  $S$  s'obtient en reconduisant pour l'essentiel la démonstration donnée dans [15], pp. 563 et en observant, par des arguments classiques, que si

$$(s_w^n, s_g^n, p^n) \xrightarrow{\mathfrak{H}} (s_g, s_w, p) \text{ dans la topologie faible } \sigma(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}'), \text{ si } n \rightarrow +\infty,$$

alors,

$P(s_w^n, s_g^n, p^n)$  converge fortement dans  $H^1(\Omega)$

vers  $P(s_w, s_g, p)$  ce qui permet des passages à la limite dans les termes de transport ou de viscosité.

**4ème étape.** Ainsi construit, le couple  $(S_w, S_g)$  appartient au triangle de référence  $\mathcal{T}$ . Il suffit de reconduire les démonstrations données par les auteurs dans [15], pp. 565-566, à l'exception de la vérification de la propriété:

$$S_w \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega,$$

qui fait difficulté.

Pour cela, on observe, puisque  $H^1(\Omega) \cap C^+$  est un cône de sommet l'origine, qu'on déduit de iii) que:

$$\begin{aligned} & 1/h \int_{\Omega} S_g (\rho_g(P) - 1) v \, dx + \int_{\Omega} d_1 \nabla P \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_e} \lambda d_1 P v \, d\Gamma \\ & \geq \int_{\Gamma_e} f v \, d\Gamma + 1/h \int_{\Omega} S_g^o (\rho_g(P_o) - 1) v \, dx, \quad \forall v \in H^1 \cap C^+. \end{aligned}$$

Pour le choix loisible de  $v = (S_w - 1)^+$ , il vient:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} d_1 \nabla P \cdot \nabla (S_w - 1)^+ \, dx + \int_{\Gamma_e} \lambda d_1 P (S_w - 1)^+ \, d\Gamma \\ & \geq 1/h \int_{\Omega} [S_g^o (\rho_g(P_o) - 1) - (S_g \rho_g(P) - 1)] (S_w - 1)^+ \, dx. \end{aligned}$$

Or, de l'équation i), pour le choix de la fonction-test  $v = (S_w - 1)^+$ , choix loisible puisque la trace de  $S_w$  sur  $\Gamma_e$  vaut l'unité, on dispose de l'inégalité:

$$\begin{aligned} & 1/h \int_{\Omega} (S_w - S_w^o) (S_w - 1)^+ \, dx + \int_{\Omega} d_1 \nabla P \cdot \nabla (S_w - 1)^+ \, dx \\ & \quad + \int_{\Gamma_e} \lambda d_1 P (S_w - 1)^+ \, d\Gamma \leq 0, \end{aligned}$$

ce qui, comparé à l'estimation précédente, indique que:

$$\int_{\Omega} \{ S_w - S_w^o + S_g^o (\rho_g(P_o) - 1) - S_g (\rho_g(P) - 1) \} (S_w - 1)^+ \, dx \leq 0;$$

Or, nous savons que:

$$S_g^o + S_w^o \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega, \quad S_g^o \rho_g(P_o) \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega,$$

$$S_g (\rho_g(P) - 1) \leq 0 \text{ p.p. dans } \Omega, \text{ car } S_g \in K^+;$$

ce qui implique en particulier que

$$\int_{\Omega} [(S_w - 1)^+]^2 \, dx \leq 0, \text{ d'où le résultat.}$$

**Deuxième partie de la démonstration**

$S_w, S_g, P$  étant obtenus, on détermine  $C$  de manière unique par la résolution du problème iv) pour tout  $h$  strictement positif, suffisamment petit.

En effet, l'hypothèse (H4) entraîne que pour  $h$  tel que,  $0 < h < 1/\omega$ , l'opérateur  $(b_1 + 1/h) + A_1$  satisfait à l'hypothèse de coercivité:

$$(b_1 + 1/h) - 1/2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{a}_i^1}{\partial x_i} \geq 1/2 \omega > 0. \tag{12}$$

L'existence et l'unicité de  $C$  résultent alors de [14] (théorème 3.1) en observant que la fonction  $S_o(\rho_o \omega_o^h)(C(P))$  où  $S_o = 1 - S_g - S_w$  est dans  $H^1(\Omega)$ , donc a fortiori dans l'ensemble réticulé  $\tilde{W}(A_1)$ .

**II.4. Stabilité numérique du schéma semi-discrétisé**

On introduit la notation usuelle suivante: pour toute suite  $(u^k)_{0 \leq k \leq N-1}$  de fonctions numériques définies sur  $\Omega$ , on désigne par  $u_h$  la fonction en escalier, définie sur  $Q$  par

$$u_h(t, x) = \sum_{k=0}^{N-1} u^k(x) \chi_k(t),$$

$\chi_k$  étant la fonction caractéristique de l'intervalle de temps  $[kh, (k+1)h]$ . On suppose en outre la fonction  $d$  de mobilité massique globale, introduite en (H1) indépendante de la pression.

On dispose alors des résultats partiels de stabilité du schéma, lorsque le pas de temps devient arbitrairement petit, contenus dans la proposition suivante:

**Proposition 2:** *Lorsque le pas de temps  $h$  tend vers  $0^+$ ,*

- (P1)  $(S_w)_h$  demeure dans un borné fixe de  $L^\infty(Q)$ ,
- (P2)  $(S_g)_h$  demeure dans un borné fixe de  $L^\infty(Q)$ ,
- (P3)  $(P)_h$  demeure dans un borné fixe de  $L^\infty(0, T; L^0(\Omega))$ ,
- (P4)  $(C)_h$  demeure dans un borné fixe de  $L^\infty(Q)$ .

**Démonstration:** On distingue comme précédemment deux parties, selon que l'on s'intéresse aux inconnues  $(S_w, S_g, P)$  ou au problème hyperbolique du premier ordre.

**Première partie**

Les propriétés (P1) et (P2) résultent immédiatement du fait qu'à chaque itération, le couple  $(S_w^k, S_g^k)$  appartient au triangle-diagramme de référence  $\mathfrak{T}$ , de sorte que  $(S_w)_h$  et  $(S_g)_h$  décrivent le prisme  $\mathfrak{T} \times ]0, T[$ . Pour établir (P3), on introduit le problème intermédiaire suivant, qui va permettre un principe de comparaison:

A chaque itération, on considère  $\hat{P}^k$  la solution du problème correspondant à un modèle d'écoulements incompressibles, définie par:

$$\hat{P}^k \in H^1(\Omega)$$

et vérifie l'équation variationnelle

$$\int_{\Omega} d_k \nabla \hat{P}^k \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma} \lambda d_k \hat{P}^k v \, d\Gamma = \int_{\Gamma} f v \, d\Gamma, \forall v \in H^1(\Omega),$$

où donc, conformément aux notations précédentes et à l'hypothèse nouvelle sur l'indépendance de la fonction  $d$  en l'inconnue de pression, on a noté:

$$d_k = d(S_w^k, S_g^k, (X_o^h)^{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

On observe aisément que:

- \*)  $f \geq 0$  p.p. sur  $\Gamma_e$  implique  $\hat{P}^k \geq 0$  p.p. dans  $\Omega$ ;
- \*\*\*) il existe une constante  $R_4$ , indépendante de  $k$ , telle que

$$(P5) \quad \|\hat{P}^k\|_{H^1(\Omega)} \leq R_4, \quad \forall k.$$

On va établir que l'on dispose de l'encadrement:

$$(P6) \quad 0 \leq P_k \leq \bar{P} + \hat{P}^k \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad \forall k,$$

$\bar{P}$  étant défini en (2).

Dès lors, puisque l'on sait qu'en dimension 3, d'après un résultat de Sobolev [10], p. 162 et suivantes, par exemple,

$$W^{1,2}(\Omega) \subset L^6(\Omega) \text{ avec injection continue,}$$

la propriété (P3) résulte immédiatement de (P5) et (P6).

Pour établir (P6), il suffit de prendre

$$\begin{aligned} v &= P^k - (P^k - \bar{P} - \hat{P}^k)^+ \\ &= \min(P^k, \bar{P} + \hat{P}^k), \text{ élément de } H^1(\Omega) \cap C^+ \end{aligned}$$

dans l'inéquation relative à  $P^k$ ,  
et  $v = (P^k - \bar{P} - \hat{P}^k)^+$  dans l'équation relative à  $\hat{P}^k$ .

Par différence, il vient:

$$\begin{aligned} & 1/h \int_{\Omega} S_g^k(\rho_g(P^k) - 1)(P^k - \bar{P} - \hat{P}^k)^+ dx + \int_{\Omega} d_k[\nabla(P^k - \bar{P} - \hat{P}^k)^+]^2 dx \\ & + \int_{\Gamma_s} \lambda d_k(P^k - \hat{P}^k)(P^k - \bar{P} - \hat{P}^k)^+ d\Gamma \leq \\ & 1/h \int_{\Omega} S_g^{k-1}(\rho_g(P^{k-1}) - 1)(P^k - \bar{P} - \hat{P}^k)^+ dx \\ & \leq 0. \end{aligned}$$

Observant que le premier terme du membre de gauche est nul, car on intègre sur l'ensemble des  $x$  où

$$P^k \geq \bar{P} + \hat{P}^k$$

ensemble contenu dans la région où l'on a

$$P^k \geq \bar{P} \text{ et } \rho_g(P^k) = 1 \text{ par construction,}$$

et qu'en outre

$$(P^k - \hat{P}^k)(P^k - \bar{P} - \hat{P}^k)^+ \geq [(P^k - \hat{P}^k - \bar{P})^+]^2,$$

la propriété annoncée est établie.

On peut remarquer que l'on dispose de l'encadrement

$$(P7) \quad 0 \leq P^k \leq \bar{P} + \sup_{\Gamma_e} \hat{P}^k \text{ p.p. dans } \Omega, \forall k.$$

Il suffit pour cela de poser

$$M_k = \sup_{\Gamma_e} \hat{P}^k, \text{ supposé exister,}$$

et de prendre dans l'équation relative à  $\hat{P}^k$  la fonction-test  $v = (\hat{P}^k - M_k)^+$ , de trace nulle sur  $\Gamma_e$ .

## Deuxième partie de la démonstration

Pour établir la propriété (P4), il suffit d'obtenir une majoration de  $C^k$  sur  $\Omega$  puisque la condition  $C^k \in \mathfrak{K}_k$  entraîne de façon évidente une minoration de  $C^k$  sur  $\Omega$ .



Pour cela, on démontre, en effectuant une récurrence sur  $k$ , pour  $h$  tel que  $0 < h < 1/2\omega$ , l'inégalité:

$$(P8) \quad C^k \leq e^{2\omega kh} M,$$

où  $\omega$  est la constante introduite dans l'hypothèse (H4) et  $M$  désigne la constante  $(\rho_o \omega_o^h)(1)$ .

En effet, la condition (H5) et l'égalité (5) donnent la majoration:  $C^o \leq M$ . En supposant vraie l'inégalité (P8) à l'étape  $(k-1)$ , on considère dans l'inégalité du problème iv),  $v = C^k \pm (C^k - e^{2\omega kh} M)^+$ , ces choix étant loïsibles. Il vient:

$$(P9) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} [(A_k + b_k + 1/h) \cdot (C^k - e^{2\omega kh} M)] (C^k - e^{2\omega kh} M)^+ dx \\ & + \int_{\Omega} [b_k + 1/h (1 - e^{-2\omega h})] e^{2\omega kh} M (C^k - e^{2\omega kh} M)^+ dx \\ & \leq 1/h \int_{\Omega} (C^{k-1} - e^{2\omega(k-1)h} M) (C^k - e^{2\omega kh} M)^+ dx \\ & \leq 0 \text{ par utilisation de l'hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Le premier terme de (P9) est transformé à l'aide de la formule de Green (justifiée pour les fonctions de  $\tilde{W}(A_k)$  dans [14]) et par suite est minoré par:

$$\omega/2 \int_{\Omega} [(C^k - e^{2\omega kh} M)^+]^2 dx,$$

en utilisant la coercivité de l'opérateur  $A_k + (b_k + 1/h)$  qui résulte de (H4) (voir (12)) lorsque  $h < 1/\omega$ .

Le deuxième terme de (P9) est de signe positif puisque le coefficient  $b_k + 1/h (1 - e^{-2\omega h})$  est supérieur à  $b_k + 2\omega - 2\omega^2 h$  qui est positif grâce à (H4) lorsque  $h$  vérifie,  $0 < h < 1/2\omega$ .

On déduit alors de (P9) l'égalité  $(C^k - e^{2\omega kh} M)^+ = 0$ , d'où résulte la majoration (P8).

## II.5. Cas d'une exploitation du gisement à pression imposée sur les puits de drainage

On suppose donc la seconde condition de bord de (E20) remplacée par la condition de Dirichlet non homogène

$$(P10) \quad P = P^* \text{ sur } \Sigma_e,$$

où  $P^*$  est une pression, supposée constante connue, strictement positive, ce

qui, compte tenu de la translation opérée sur l'échelle des pressions, signifie que la pression imposée sur les puits de drainage est supérieure à la pression extérieure régnant au voisinage des puits de production.

Pour tenir compte de cette nouvelle condition aux limites, on modifie partiellement le cadre fonctionnel en introduisant

$$\mathfrak{H}^* = \{v \in H^1(\Omega), v = P^* \text{ sur } \Gamma_e, v \geq 0 \text{ sur } \Gamma - \Gamma_e\},$$

convexe fermé non vide de  $H^1(\Omega)$ .

On va réécrire l'équation en pression en cherchant la nouvelle pression  $P^k$ , à la  $k$ -ième itération, dans  $\mathfrak{H}^*$ , ce qui introduit une contrainte latérale intéressante à analyser; en effet, on aura, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$

$$(P11) \quad \begin{cases} P^k \geq 0, n. (Q_w + \rho_o Q_o + \rho_g Q_g)_k - \lambda d_k P^k \leq 0, \\ P^k [n. (Q_w + \rho_o Q_o + \rho_g Q_g)_k - \lambda d_k P^k] = 0 \text{ sur } \Gamma_s, \end{cases}$$

ce qui montre que le débit massique global des trois constituants à travers les puits de production est toujours sortant, lorsque sur  $\Gamma_s$ , la pression interne est strictement supérieure à la pression extérieure. On dispose alors du résultat d'existence suivant:

**Proposition 3.** *Pour tout  $\epsilon > 0$  et tout  $h > 0$ , suffisamment petit, pour toute donnée initiale*

*$(S_w^o, S_g^o, P^o, (X_o^h)^o)$  vérifiant les hypothèses énoncées à la proposition 1, il existe au moins une suite  $(S_w^k, S_g^k, P^k, C^k)$ ;  $k \in \mathbb{N}^*$ , telle que:*

$$\begin{aligned} S_w^k &\in K_1, S_g^k \in K^+, P^k \in \mathfrak{H}^* \cap L^\infty(\Omega), \\ C^k &\in \mathfrak{K}_k \cap \tilde{W}(A_k) \cap L^\infty(\Omega) \\ (S_w^k, S_g^k) &\in \mathfrak{J}, \end{aligned}$$

*vérifiant les relations variationnelles i), ii), iv) de la proposition 1, l'inéquation iii) étant remplacée par:*

$$(P.12) \quad \begin{aligned} &1/h \int_{\Omega} [S_g^k (\rho_g (P^k) - 1) - S_g^{k-1} (\rho_g (P^{k-1}) - 1)] (v - P^k) dx \\ &+ \int_{\Omega} d_k \nabla P^k \cdot \nabla (v - P^k) dx + \int_{\Gamma_s} \lambda d_k P^k (v - P^k) d\Gamma \geq 0, \forall v \in \mathfrak{H}^*. \end{aligned}$$

### Principe de la démonstration

On utilise une idée de F. Guerfi [18], qui permet de généraliser la démonstration de la proposition 1 à des situations nouvelles, en faisant

l'économie de la première étape; pour cela, on utilise une méthode de troncature en introduisant la fonction  $\theta$ , définie par:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

et pour décrire la première itération, on se donne un triplet  $(s_w, s_g, p)$  dans  $[H^1(\Omega)]^3$ , et on considère  $P$  la solution dans  $\mathfrak{H}^*$  de l'inéquation variationnelle:

$$P = P(s_w, s_g, p) \in \mathfrak{H}^*$$

et vérifie

$$\begin{aligned} & 1/h \int_{\Omega} [\theta(s_g)(\rho_g(p) - 1) - S_g^o(\rho_g(P^o) - 1)](v - P) dx \\ & + \int_{\Omega} d(s_w, s_g, p, (X^h)_p) \nabla P \cdot \nabla (v - P) dx \\ & + \int_{\Gamma} \lambda d(s_w, s_g, p, (X^h)_o) P (v - P) d\Gamma \geq 0, \forall v \in \mathfrak{H}^*. \end{aligned}$$

Prenant la fonction-test  $v = P^*$ , choix admissible, et puisque chacune des fonctions  $\theta$ ,  $\rho_g$ ,  $d$  est bornée, on obtient l'existence d'une constante  $R_5$ , indépendante du choix du triplet  $(s_w, s_g, p)$ ,  $R_5 = R_5(h)$ , telle que:

$$\|P(s_w, s_g, p)\|_{H^1(\Omega)} \leq R_5, \forall (s_w, s_g, p) \in [H^1(\Omega)]^3. \quad (\text{P.13})$$

Il faut observer que le choix de  $v = \bar{P}$  n'est plus loisible dans  $\mathfrak{H}^*$ . Dès lors, la démonstration de l'existence par le théorème de point fixe de Kakutani rejoint celle décrite à la proposition 1, toute chose étant égale par ailleurs.

On notera la généralisation opérée en passant de l'artifice  $s_g^+$  (proposition 1) à  $\theta(s_g)$  (proposition 2) et la nécessité qu'il y a à établir que la seconde composante du triplet  $(S_w, S_g, P)$  construit par la méthode de point fixe est telle que:

$$0 \leq S_g \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega,$$

de sorte qu'alors  $\theta(S_g)$  s'identifie à  $S_g$ , et on obtient une solution pour l'équation énoncée au départ. Le point délicat à vérifier, compte tenu du changement d'espace fonctionnel, est que l'on dispose de la propriété

$$S_w \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega;$$

pour cela, on reprend les développements de la quatrième étape de la démonstration de la proposition 1, en prenant  $v = (S_w - 1)^+$  dans l'équation i)

$v = P + (S_w - 1)^+$  dans l'inéquation relative à  $P$ , en observant que ce choix est loisible; il vient par différence:

$$\int_{\Omega} \{S_w - S_w^o + S_g^o(\rho_g(P^o) - 1) - \theta(S_g)(\rho_g(P) - 1)\} (S_w - 1)^+ dx \leq 0$$

avec  $S_w - S_w^o + S_g^o(\rho_g(P^o) - 1) - \theta(S_g)(\rho_g(P) - 1) \geq S_w - S_w^o - S_g^o \geq S_w - 1$ ,

d'où la propriété.

Observons enfin que l'on a l'estimation uniforme

(P.14)  $P^k \leq \bar{P}$  p.p. dans  $\Omega$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ;

en effet, pour le choix de la fonction-test

$$v = P^k - (P^k - \bar{P})^+ = \min(P^k, \bar{P})$$

choix loisible, puisqu'à l'évidence, on a

$$P^k \leq \bar{P}, \text{ (et même } P^k \ll \bar{P} \text{!)},$$

il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} d_k(\nabla(P^k - \bar{P})^+)^2 dx + \int_{\Gamma} \lambda d_k P^k (P^k - \bar{P})^+ d\Gamma \\ & \leq 1/h \int_{\Omega} \{S_g^{k-1}(\rho_g(P^{k-1}) - 1) - S_g^k(\rho_g(P^k) - 1)\} (P^k - \bar{P})^+ dx \\ & = 1/h \int_{\Omega} S_g^{k-1}(\rho_g(P^{k-1}) - 1) (P^k - \bar{P})^+ dx \leq 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Dès lors, de l'appartenance de  $P^k$  à  $\mathfrak{H}^*$ , pour tout  $k$  et de la propriété (P14), on déduit l'estimation

$$0 \leq \text{trace } P^k \leq \bar{P} \text{ p.p. sur } \Gamma, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{et donc } |P^k|_{L^\infty(\Gamma)} \leq \bar{P}, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

De plus, il résulte de l'inéquation (P12), pour le choix de la fonction-test

$$v = P^k + \varphi,$$

$\varphi$  prise arbitrairement dans  $H_o^1(\Omega)$ ,

que l'on dispose de l'égalité variationnelle:

$$\int_{\Omega} d_k \nabla P^k \cdot \nabla \varphi \, dx = 1/h \int_{\Omega} \{S_g^{k-1}(\rho_g(P^{k-1})-1) - S_g^k(\rho_g(P^k)-1)\} \varphi \, dx,$$

pour toute fonction  $\varphi$  de  $H_0^1(\Omega)$ , avec, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$

$$1/h \{S_g^{k-1}(\rho_g(P^{k-1})-1) - S_g^k(\rho_g(P^k)-1)\} \in L^\infty(\Omega),$$

$d_k \in L^\infty(\Omega)$ , satisfaisant l'hypothèse (H1).

Le théorème 13.1 de O.A. Ladyzenskaja et N.N. Ural'ceva [22] s'applique et permet d'affirmer que  $P^k$  est borné dans  $\Omega$ .

On remarquera que  $|P^k|_{L^\infty(\Omega)}$  est majoré par une constante  $C$  dépendant a priori de  $h$ .

**Remarque.** Une proposition analogue pourrait être obtenue en cherchant à chaque itération  $P^k$  dans le convexe  $\mathcal{H}^* \cap C^+$ , toute chose étant égale par ailleurs; dès lors, en vérifiant que toutes les démonstrations précédentes peuvent être reconduites pour cette nouvelle contrainte, on aurait l'analogue de la propriété (P.14), et plus précisément

$$0 \leq P^k \leq \bar{P} \text{ p.p. dans } \Omega, \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

de sorte que  $(P)_h$ , dans cette variante, reste dans un borné fixe de  $L^\infty(Q)$ , lorsque  $h$  tend vers zéro, et on dispose donc des résultats de stabilité inconditionnelle analogue à ceux énoncés à la proposition 2.

Des résultats d'unicité partiels peuvent être obtenus en introduisant des approximations lipschitziennes adéquates de la fonction de Heaviside; on pourra consulter [17] pour le détail des démonstrations.

### Bibliographie

- [1] MARLE, C.: *Cours de production t. 4. Les écoulements polyphasiques en milieu poreux*, ed. Technip. Paris.
- [2] CHAVENT, G., JAFFRE, J.: *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation*. (Nort Holland).
- [3] CILIGOT-TRAVAIN, G.: *Les modèles de gisements*. A paraître, ed. Technip., Paris.
- [4] BIA, P., COMBARNOUS, M.: *Les méthodes thermiques de production des hydrocarbures; chapitre 1, Transfert de chaleur et de masse (revue de l'Institut Français du pétrole, mai-juin 1975, pp. 359-395)*.
- [5] GAGNEUX, G.: *Sur des problèmes unilatéraux dégénérés de la théorie des écoulements diphasiques en milieu poreux* (Thèse de doctorat d'Etat, 1982, Université de Besançon).

- [6] MADAUNE-TORT, M.: *Perturbations singulières de problèmes aux limites du second ordre, hyperboliques et paraboliques non linéaires* (thèse de doctorat d'Etat, avril 1981, Université de Pau).
- [7] GAGNEUX, G.: *Une étude théorique sur la modélisation de G. Chavent des techniques d'exploitation secondaire des gisements pétrolifères* (J. Mécan. Théo. et Appl., janvier 1983, vol. 2, n.º 1, pp. 33-56).
- [8] CORRE, B., EYMARD, R., QUETTIER, L.: *Applications of a thermal simulator to field cases*. Proceedings of the 59th Annual Technical Conference (Society of Petroleum Engineers of AIME) 1984, Houston (Texas).
- [9] DUVAUT G et LIONS J. L.: *Les inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [10] BREZIS, H.: *Analyse fonctionnelle, théorie et application* (Masson, 1983).
- [11] CHAVENT, G., SALZANO, G.: *Un algorithme pour la détermination de perméabilités relatives triphasiques satisfaisant une condition de différentielle totale*. Rapport de Recherche INRIA n.º 355, janvier 1985.
- [12] LIONS, J. L.: *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* (Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969).
- [13] BARDOS, C.: *Problèmes aux limites, pour les équations aux dérivées partielles, du premier ordre à coefficients réels*. (Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 3, 1970, pp. 185-233).
- [14] MIGNOT, F., PUEL, J. P.: *Inéquations variationnelles et quasi-variationnelles hyperboliques du premier ordre* (J. Math. pures et appli. 55, 1976, pp. 353-378).
- [15] GAGNEUX, G., LEFEVERE, A. M., MADAUNE-TORT, M.: *Une approche analytique d'un modèle black oil des écoulements triphasiques compressibles en ingénierie pétrolière*. (J. Mécan. Théo. et Appl., 1987, vol. 6, n.º 4, pp. 1-24).
- [16] GAGNEUX, G., LEFEVERE, A. M., MADAUNE-TORT, M.: *Modélisation d'écoulements polyphasiques en milieu poreux par un système de problèmes unilatéraux* (M2AN-RAIRO), Vol. 22, n.º 3, 1988, p. 389-415.
- [17] G. GAGNEUX, F. GUERFI: *Approximations de la fonction de Heaviside et unicité pour une classe de problèmes quasi-linéaires stationnaires*. Rapport n.º 1987-12 de l'U.A.—CNRS n.º 1204 (Univ. de Pau).
- [18] F. GUERFI: *Un schéma semi-discrétisé implicite en simulation d'écoulements forcés triphasiques compressibles non miscibles*. A paraître aux publications de l'U.A.—CNRS N.º 1204 (Univ. de Pau).
- [19] M. BAHLOUL: *Thèse en préparation*.
- [20] F. GUERFI: *Thèse en préparation*.
- [21] GAGNEUX, G., LEFEVERE, A. M., MADAUNE-TORT, M.: *An implicit time-stepping scheme for polyphasic flows in porous media including coupled quasilinear inequalities*. Soumis pour publication aux comptes-rendus du Congrès International «Problèmes paraboliques et elliptiques non linéaires», Nancy, mars 1988.
- [22] O. A. LADYZENSKAJA, N. N. URAL'CEVA: *Equations' aux dérivées partielles de type elliptique*. Dunod, Paris, 1968.
- [23] I. I. VRABIE: *Compactness methods for nonlinear evolutions*. Pitmans Monographs and surveys in Pure and applied Mathematics, n.º 32, 1987.