REVISTA MATEMATICA de la
Universidad Complutense de Madrid
Volumen 1, números 1, 2, 3: 1988.
http://dx.doi.org/10.5209/rev_REMA.1988.v1.n1.18193

Problemes aux limites non classiques pour equations d'evolution

J. L. LIONS

ABSTRACT. We study the wave equation in a bounded domain $\Omega\times(0, T)$ subject to Cauchy data on $\partial\Omega\times(0, T)$, or on part of $\partial\Omega\times(0, T)$. Tools from the theory of optimal control are used. We use in particular the HUM theory, introduced in J. L. LIONS [1], [2], for the problem of exact controllability.

1. INTRODUCTION

1.1. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière (régulière) Γ. Dans le cylindre $\Omega\times(0, T)$, on considère l'équation des ondes

$$u''-\Delta u=0 \tag{1.1}$$

où

$$u'=\frac{\partial u}{\partial t},\ u''=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

On dénote par

$$\Sigma=\Gamma\times(0, T) \text{ la frontière de } \Omega\times(0, T) \tag{1.2}$$

et par

$$\Sigma_0=\Gamma_0\times(0, T) \text{ un sous ensemble donné de } \Sigma. \tag{1.3}$$

1980 Mathematics Subject Classification (1985 revision): 49B22, 35R25, 49E30, 35L20.

Editorial de la Universidad Complutense. Madrid, 1988.

On cherche u solution de (1.1),

$$u=0 \qquad \text{sur } \Sigma \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=f \qquad \text{sur } \Sigma_0, \tag{1.5}$$

où f est une fonction donnée sur Σ_0 et où $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ désigne la dérivée normale à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω. *Pour fixer les idées* on supposera que

$$f \in L^2(\Sigma_0). \tag{1.6}$$

La première question est: *ce problème admet-il une (ou plusieurs) solution(s)*?

La réponse n'est pas tout à fait évidente, *un élément* de la réponse étant apporté par la *théorie de la contrôlabilité exacte* dont nous rappelons quelques aspects au n.° 2.

Cela permet, *sous certains conditions sur* Σ_0, de donner les conditions nécessaires et suffisantes sur f pour que (1.1), (1.4), (1.5) admette une solution.

Mais s'il n'y a pas de solution au problème, il est assez naturel de le «*relaxer*» de la manière suivante: dans *l'ensemble* des fonctions u vérifiant (1.1), (1.4), trouver (si elle existe) celle des fonctions qui *minimise* la quantité.

$$\int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - f\right)^2 d\Sigma_0. \tag{1.7}$$

On a alors affaire à un *problème de controle*, que nous posons maintenant plus précisément.

1.2. Problème de controle optimal. On considère le système dont l'état y est donné par

$$y'' - \Delta y = 0 \qquad \text{dans } \Omega \times (0, T) \tag{1.8}$$

$$y(0) = v^0, \ y'(0) = v^1,$$

$$v = \{v^0, v^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \tag{1.9}$$

$$y = 0 \text{ sur } \Sigma. \tag{1.10}$$

Le système (1.8), (1.9), (1.10) admet une solution unique et définit donc l'état $y = y(v)$ du système.

Sous les conditions (1.9) on sait que (cf. J. L. Lions [4], résultat redémontré dans J. L. Lions [2], vol. 1),

$$\frac{\partial y(v)}{dv} \in L^2(\Sigma). \tag{1.11}$$

On peut donc introduire la fonctionnelle

$$\mathscr{I}(v) = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_0} \left|\frac{\partial y(v)}{\partial v} - f\right|^2 d\Sigma_0 \tag{1.12}$$

et on cherche

$$\inf.\ \mathscr{I}(v),\ v = \{v^0, v^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \tag{1.13}$$

C'est ce problème que l'on va résoudre aux n.° 3 et 4 après avoir donné, au n.° 2, un bref rappel de quelques notions de la théorie de la contrôlabilité exacte, telle qu'introduite dans J. L. Lions [1].

Quelques variantes seront données au n.° 4.

Remarque 1.1. *Le type* de problèmes considérés ici intervient notamment dans des questions liées à la géologie, qui m'ont été signalées par L. Tarantola [1].

2. CONTROLABILITE EXACTE ET HUM

2.1. Une inégalité. Sous «certains conditions» sur Σ_0 on a l'inégalité:

$$\int_{\Sigma_0} \left|\frac{\partial y(v)}{dv}\right|^2 d\Sigma_0 \geqslant C[\|v^0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|v^1\|^2_{L^2(\Omega)}], \tag{2.1}$$
$$C > 0.$$

Cette inégalité est, en quelque sorte, une inégalité de *type inverse* de celle obtenue en utilisant (1.11), et, plus précisément, que l'application $\{v^0, v^1\} \to \dfrac{\partial y}{dv}$ est *continue* de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Sigma) \to L^2(\Sigma)$.

Cette inégalité (2.1) a d'abord été obtenue par L. F. Ho [1] dans le cas suivant: soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$; on introduit

$$\Gamma(x^0) = \{x | x \in \Gamma,\ (x - x^0) \cdot \nu(x) \geqslant 0\}. \tag{2.2}$$

Alors (2.1) a lieu si

$$\Sigma_0 = \Gamma(x^0) \times (0, T) \tag{2.3}$$

$$T > 2R(x^0),\ R(x^0) = \text{máx.}\ (x - x^0) \cdot \nu(x),\ x \in \Gamma(x^0).$$

Ce résultat a ensuite été étendu par C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [1] qui ont obtenu les conditions nécessaires et suffisantes pour que (2.1) ait lieu.

2.2. Méthode HUM. Le problème de la *contrôbailité exacte* est —dans un cas très particulier— le suivant (on pourra consulter J. L. Lions [1], [2] pour la théorie générale, et la bibliographie de ces travaux).

On considère *l'équation d'état* donnée par

$$z'' - \Delta z = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} z &= w \quad \text{sur} \quad \Sigma_0 \\ z &= 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma/\Sigma_0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$z(0) = y^0,\ z'(0) = y^1. \tag{2.6}$$

Dans (2.6) on suppose que

$$y^0 \in L^2(\Omega),\ y^1 \in H^{-1}(\Omega)\ [\text{dual de } H_0^1(\Omega)]. \tag{2.7}$$

Alors, si $w \in L^2(\Sigma_0)$, on peut montrer (J. L. Lions [4]; cf. aussi [2], vol. 1) que (2.4), (2.5), (2.6) admet une solution unique $z(w)$. La fonction

$$t \to \{z(t;\ w),\ z'(t;\ w)\}$$

est *continue* de $[0, T] \to L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

On cherche w, s'il existe, tel que

$$z(T;\ w) = z'(T;\ w) = 0. \tag{2.8}$$

Si, *pour tout couple* y^0, y^1 vérifiant (2.7), on peut trouver $w \in L^2(\Sigma_0)$ tel que l'on ait (2.8), alors on dit qu'il y a *Contrôlabilité exacte à l'instant T.*

La méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method) montre que *si* (2.1) *a lieu, alors il y a contrôlabilité exacte.*

On opère comme suit: on part de v^0, v^1 et on résout (1.8), (1.9), (1.10).

On introduit ensuite ψ solution de

$$\begin{aligned} &\psi'' - \Delta\psi = 0 && \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \\ &\psi(T) = \psi'(T) = 0 && \text{dans} \quad \Omega, \\ &\psi = \frac{\partial y}{\partial v} && \text{sur} \quad \Sigma_0 \\ &\psi = 0 && \text{sur} \quad \Sigma/\Sigma_0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

On définit enfin $\wedge$ par

$$\wedge \{v^0, v^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}. \tag{2.10}$$

On définit ainsi (cela mérite quelques développements que l'on trouvera dans J. L. Lions [2], vol. 1) un opérateur

$$\wedge \in \mathscr{L}(F; F'), \ F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \tag{2.11}$$

qui est symétrique ($\wedge^* = \wedge$). On a:

$$< \wedge \{v^0, v^1\}, \{v^0, v^1\} > = \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial y(v)}{\partial v}\right)^2 d\Sigma_0 \tag{2.12}$$

(on multiple l'équation (2.9) par $y(v)$ et l'on intègre par parties).

Les intégrations par parties sont valables *par définition*, puisque ψ est solution faible de (2.9) définie par transposition, comme dans J. L. Lions et E. Magenes [1]). Alors

$$\wedge \textit{ est un isomorphisme de } F \textit{ sur } F'. \tag{2.13}$$

On considère alors l'équation

$$\wedge \{v^0, v_1\} = \{y^1, -y^0\}. \tag{2.14}$$

Elle admet une solution unique. On calcule $y(v)$ correspondant à cette solution: si l'on prend $w = \dfrac{\partial y(v)}{\partial v}$ sur Σ_0 on a $z = \psi$, donc (2.8) et on a construit *un* contrôle donnant la contrôlabilité exacte.

Remarque 2.1. En fait s'il *un* contrôle, disons w_0, donnant lieu à (2.8), alors il en existe *une infinité*. Tous les contrôles w donnant lieu à (2.8) forment un espace affine

$$w \in w_0 + \mathscr{V}, \tag{2.15}$$

où $\mathcal{V}$ est défini comme suit. On considère la solution θ de

$$
\begin{aligned}
&\theta'' - \Delta\theta = 0 && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\
&\theta(0) = \theta'(0) = 0 && \text{dans } \Omega \\
&\theta = g && \text{sur } \Sigma_0 \\
&\theta = 0 && \text{sur } \Sigma/\Sigma_0
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Alors

$$
\mathcal{V} = \{g | g \in L^2(\Sigma_0),\ \theta(T) = \theta'(T) = 0\}
\tag{2.17}
$$

Remarque 2.2. On a montré dans J. L. Lions [3] que la condition nécessaire et suffisante pour que (1.1), (1.4), (1.5) admette une solution est que

$$
\int_{\Sigma_0} f g \, d\Sigma_0 = 0 \ \forall g \in \mathcal{V}.
\tag{2.18}
$$

La nécessité est évidente: on multiplie (1.1) par θ avec (2.16), 2.17).

Après intégrations par parties, on trouve (2.18).

Le fait que (2.18) soit suffisant est établi dans l'article cité.

Notre objet est maintenant de résoudre (1.13), *que la condition* (2.18) *ait lieu ou non.*

3. SYSTEME D'OPTIMALITE

On va supposer désormais que (2.1) *a lieu.* Alors le problème (1.13) admet une solution unique. On cherche à caractériser cette solution par un *système d'optimalité.*

Pour cela on introduit *le problème pénalisé* suivant:

$$
\mathcal{J}_\varepsilon(v, y) = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_0} \left|\frac{\partial y}{\partial \nu} - f\right|^2 d\Sigma_0 + \frac{1}{2\varepsilon}\iint_{\Omega \times (0, T)} (y'' - \Delta y)^2 dx\, dt
\tag{3.1}
$$

où y vérifie

$$
y(0) = v^0,\ y'(0) = v^1
\tag{3.2}
$$

et

$$
y = 0 \quad \text{sur } \Sigma
\tag{3.3}
$$

On a pris dans (3.1) $\varepsilon > 0$; *c'est le facteur de pénalisation.*

Le problème pénalisé est:

$$\inf. \mathscr{J}_\varepsilon(v, y) \tag{3.4}$$

où $v=\{v^0, v^1\}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, $y''-\Delta y\in L^2(\Omega\times(0, T))$ avec (3.2) et (3.3).

Le problème (3.4) admet une solution unique, notée $\{v_\varepsilon, y_\varepsilon\}$.

On introduit

$$p_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}(y_\varepsilon''-\Delta y_\varepsilon) \tag{3.5}$$

Lorsque $\varepsilon\to 0$, on a:

$$\underline{V_\varepsilon=}\{v_\varepsilon^0, v_\varepsilon^1\}\to\{v^0, v^1\} \text{ dans } H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega) \tag{3.6}$$

où $\{v^0, v^1\}$ est la solution du problème (1.13).

On écrit le système d'optimalité pour le problème (3.4). L'équation d'Euler est, utilisant la notation (3.5):

$$\int_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial v}-f\right)\frac{\partial y}{\partial v}-\iint_{\Omega\times(0,T)} p_\varepsilon(y''-\Delta y)\,dx\,dt=0 \tag{3.7}$$

$\forall y$ avec (3.2), (3.3).

Après intégrations par parties dans (3.7), on trouve

$$p_\varepsilon''-\Delta p_\varepsilon=0 \quad \text{dans} \quad \Omega\times(0, T) \tag{3.8}$$

$$p_\varepsilon(0)=p_\varepsilon'(0)=p_\varepsilon(T)=p_\varepsilon'(T)=0 \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{3.9}$$

et

$$p_\varepsilon+\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial v}-f=0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_0,\ p_\varepsilon=0 \quad \text{sur} \quad \Sigma/\Sigma_0 \tag{3.10}$$

Il résulte de (3.1) que lorsque $\varepsilon\to 0$ on a:

$$\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial v}\to\frac{\partial y}{\partial v} \quad \text{dans} \quad L^2(\Sigma_0) \tag{3.11}$$

où $y=y(v^0, v^1)$ solution «optimale» correspondant à $v=\{v^0, v^1\}$ solution optimale de (1.13).

On déduit de (3.10), (3.11) que

$$p_\varepsilon|_\Sigma \quad \text{demeure dans un borné de } L^2(\Sigma) \text{ lorsque } \varepsilon\to 0. \tag{3.12}$$

Cela, joint à (3.8) et (3.9) (où l'on peut utiliser *aussi bien* les conditions «initiales» à $t=0$ que les conditions «finales» a $t=T$), montre que, lorsque $\varepsilon\to 0$.

$$\{p_\varepsilon, p'_\varepsilon\} \text{ demeure dans un borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)). \quad (3.13)$$

On peut alors passer à la limite. On trouve:

Théorème 3.1. *Le problème* (1.13) *admet une solution unique* $v=\{v^0, v^1\}$. *Soit* y *la solution correspondante. La fonction* y *est caractérisée par la solution* $\{y, p\}$ *du système d'optimalité*

$$\begin{aligned}
&y''-\Delta y=0 \\
&p''-\Delta p=0 && \text{dans} \quad \Omega\times(0, T) \\
&p(0)=p'(0)=p(T)=p'(T)=0 && \text{dans} \quad \Omega \\
&y=0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \\
&p+\frac{\partial y}{\partial v}-f=0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_0 && p=0 \quad \text{sur} \quad \Sigma/\Sigma_0.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Remarque 3.1. On va maintenant «interpréter» (3.14) —dont on reconnait que ce problème n'est pas d'une lumineuse clarté...— et en déduire *un algorithme* pour résoudre constructivement le problème.

4. ALGORITHME DE RESOLUTION

On commence par introduire *la fonction auxiliaire* F solution de

$$\begin{aligned}
&F''-\Delta F=0 && \text{dans} \quad \Omega\times(0, T) \\
&F(T)=F'(T)=0 && \text{dans} \quad \Omega \\
&F=f \quad \text{sur} \quad \Sigma_0 \qquad F=0 && \text{sur} \quad \Sigma/\Sigma_0.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Considérons dans (3.14) $y(0)=v^0$, $y'(0)=v^1$ comme les *inconnues*. Donc

$$\begin{aligned}
&y''-\Delta y=0 && \text{dans} \quad \Omega\times(0, T) \\
&y(0)=v^0,\ y'(0)=v^1 && \text{dans} \quad \Omega \\
&y=0 && \text{sur} \quad \Sigma
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Alors si l'on pose

$$\psi = -p + F \tag{4.3}$$

on a:

$$\begin{aligned} &\psi'' - \Delta\psi = 0 && \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \\ &\psi(T) = \psi'(T) = 0 && \text{dans} \quad \Omega \\ &\psi = \frac{\partial y}{\partial \nu} \quad \text{sur} \quad \Sigma_0 \qquad \psi = 0 && \text{sur} \quad \Sigma/\Sigma_0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Comparons à (2.9). Il s'agit du même ψ! Donc

$$\{\psi'(0), \ -\psi(0)\} = \Lambda \{v^0, v^1\} \tag{4.5}$$

Λ étant l'opérateur introduit en (2.10) (méthode HUM).

Revenons à (3.14). Les systèmes (4.2), (4.3), (4.4) d'une part, (3.16) d'autre part, sont *identiques* si

$$\{p'(0), \ -p(0)\} = \{0, 0\}$$

i.e. si

$$\{\psi'(0), \ -\psi(0)\} = \{F'(0), \ -F(0)\}$$

i.e. si

$$\Lambda \{v^0, v^1\} = \{F'(0), \ -F(0)\}. \tag{4.6}$$

Conclusion:

Théorème 4.1. *La solution* $\{v^0, v^1\}$ *du problème* (1.13) *est obtenue de la manière suivante:*

(i) *On résout* (4.1).
(ii) *On résout* (4.6) (qui admet une solution unique d'après HUM; cf. les rappels du n.° 2).

Remarque 4.1. *Pour la résolution numérique de* (4.6), on renvoit à R. Glowinski, C. H. Li et J. L. Lions [1] (où l'on trouvera d'autre résultats!).

Remarque 4.2. On a donc obtenu

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} - f = -p \quad \text{sur} \quad \Sigma_0. \tag{4.7}$$

On a $p=0$ sur Σ_0 si et seulement si f vérifie (2.18).

5. QUELQUES VARIANTES

On peut considérer des problèmes du type (1.1), (1.4), (1.5) mais avec une équation aux dérivées partielles *non linéaire* au lieu de (1.1). On utilisera, à cet effet, la méthode introduite par E. Zuazua [1] (extensión *non linéaire* de HUM).

On peut considérer, par les méthodes ci-dessus, le problème suivant: on cherche u solution de

$$u'' + \Delta^2 u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \tag{5.1}$$

avec

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \tag{5.2}$$

et

$$\Delta u = f \quad \text{sur} \quad \Sigma_0. \tag{5.3}$$

On peut également considérer d'autres conditions aux limites.

Il suffit «d'ajouter» les méthodes introduites précédemment et celles de J. L. Lions [1]-[2].

Bibliographie

C. BARDOS; G. LEBEAU et J. RAUCH. [1]. Appendice 2 de J. L. LIONS [2] et série d'articles en préparation.

R. GLOWINSKI; C. H. LI; J. L. LIONS [1]. *A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation (I) Dirichlet control: description of the numerical methods*, Japan, J. of Applied Math.

L. F. HO [1]. *Observabilité frontière de l'équation des ondes*. C. R. Acad. Sc. Paris, 302 (1986), p. 443-446.

J. L. LIONS [1]. *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems*. J. von Neumann Lecture. Boston, 1986. SIAM Rev. March 1988, vol. 30, 1, p. 1-68.

[2] *Contrôlabilité exacte des systèmes distribués.* Volume 1: *Méthode HUM.* Notes rédigées par E. Zuazua, avec deux appendices de E. ZUAZUA et de C. BARDOS, G. LEBEAU et J. RAUCH. Masson RMA, 1988. Volume 2: *Perturbations.* Masson RMA, 1988. Volume 3: en préparation.

[3] *Exact controllability and non well set boundary value problems*, dans *Recent Advances in Communication and Control Theory*, ed. by R. E. KALMAN, G. I. MARCHUK, A. E. RUBERTI et A. J. VITERBI, New York, Optimization Software, 1987, p. 227-238. [4] *Contrôle des systèmes distribués singuliers.* Gauthier-Villars. Collection M.M.I., t. 13, 1983.

J. L. LIONS et E. MAGENES. [1]. *Problèmes aux limites non homogénes et applications.* Vol. 1 et 2. Dunod Paris, 1968.

L. TARANTOLA. [1]. Communication personnelle, 1986.

E. ZUAZUA. [1]. *Contrôlabilité exacte de systèmes d'évolution non-linéaires.* C.R.A.S. 1988.

Collège de France et CNES

Recibido: 10 de marzo de 1988