

## POLYNÔME D’ALEXANDER À L’INFINI D’UN POLYNÔME À DEUX VARIABLES

E. ARTAL BARTOLO\* and P. CASSOU-NOGUÈS

### Abstract

In this work, we compute the Alexander invariants at infinity of a complex polynomial in two variables by means of its resolution and also by means of the Eisenbud-Neumann diagram of the generic link at infinity of the polynomial.

### 1 Introduction

Soit  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germe de fonctions analytiques à singularité isolée. Soit  $\epsilon$  assez petit et  $\delta$  tels que  $0 < \delta \ll \epsilon$ . Soit

$$D_\delta^* = \{t \in \mathbb{C} \mid 0 < |t| < \delta\}$$

On considère l’application

$$\Psi : \begin{array}{l} B_\epsilon \cap f^{-1}(D_\delta^*) \longrightarrow D_\delta^* \\ x \mapsto f(x). \end{array}$$

L’application  $\Psi$  est une fibration localement triviale pour  $0 < \delta \ll \epsilon$ , suffisamment petits. Considérons le cercle de centre l’origine et de rayon  $\delta/2$  dans  $D_\delta^*$ . Nous identifions ce cercle à  $\mathbb{S}^1$ . On peut alors considérer la fibration  $\Psi$  comme une fibration sur  $\mathbb{S}^1$ , et on montre [M, Thm 4.8 et Thm 5.11] que cette fibration est difféomorphiquement équivalente à la fibration de Milnor, qui est la fibration de l’entrelacs algébrique défini par  $f$ :

$$\pi : \begin{array}{l} \mathbb{S}_\epsilon^{2n+1} \setminus K \longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x \mapsto \frac{f(x)}{|f(x)|} \end{array}$$

---

\*Financé en partie par CAICYT PB94-0291 et DGES PB97-0284-C02-02

pour  $\epsilon$  assez petit, où  $K = \mathbb{S}_\epsilon^{2n+1} \cap f^{-1}(0)$ . Dans le cas  $n = 2$ , on peut alors appliquer les résultats sur les entrelacs toriques itérés [EN] pour avoir une description complète de la monodromie associée à  $\Psi$  (polynôme d'Alexander, blocs de Jordan).

Soit  $f \in \mathbb{C}[X, Y]$  un polynôme de degré  $d > 0$ . D'après [V, Corollaire 5.1] (qui utilise des idées dans [T]), il existe un ensemble minimal  $S = \{s_1, \dots, s_m\} \subset \mathbb{C}$  de valeurs tel que la restriction  $f|_{\mathbb{C}^2 \setminus f^{-1}(S)} : \mathbb{C}^2 \setminus f^{-1}(S) \rightarrow \mathbb{C} \setminus S$  est une fibration  $\mathcal{C}^\infty$ -localement triviale;  $S$  est dit *l'ensemble de bifurcation* de  $f$ . Soit  $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que  $\eta > \max\{|s| : s \in S\}$  et soient  $\mathbb{S}_\eta^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = \eta\}$  et  $E_\eta := f^{-1}(\mathbb{S}_\eta^1)$ . Alors, la restriction  $f|_{E_\eta} : E_\eta \rightarrow \mathbb{S}_\eta^1$  est aussi une fibration  $\mathcal{C}^\infty$ -localement triviale. Le type d'isotopie de cette fibration ne dépend pas du choix particulier de  $\eta$ . Par conséquent, les invariants topologiques de  $f_\eta$  sont des invariants topologiques de  $f$ .

Soit  $F_t := f^{-1}(t)$ ,  $t \in \mathbb{C} \setminus S$ ;  $F_t$  est une surface de Riemann épointée avec un nombre fini de trous, dont le type topologique ne dépend pas de  $t$ ; nous supposons que  $F_t$  est connexe, i.e., que le polynôme  $f$  est primitif.

Une question naturelle est de se demander si comme dans le cas algébrique il existe un entrelacs graphé, fibré, dont la fibration soit équivalente à la fibration que l'on veut étudier.

Soit  $K_{f,t}$  l'entrelacs à l'infini d'une fibre  $f^{-1}(t)$ . Rappelons la construction de cet entrelacs (qui se trouve dans [NR]): Pour tout  $t \in \mathbb{C}$  il existe un  $R_t \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que pour tout  $R \geq R_t$  la fibre  $f^{-1}(t)$  rencontre transversalement la sphère  $\mathbb{S}_R^3 := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x|^2 + |y|^2 = R^2\}$ . Soit  $K_{R,t} \subset \mathbb{S}_R^3$  l'entrelacs obtenu comme l'intersection de  $f^{-1}(t)$  et  $\mathbb{S}_R^3$ . Alors, le type topologique de  $K_{R,t} \subset \mathbb{S}_R^3$  ne dépend que de  $f$  et  $t$ ; si, en plus,  $t$  est générique (où *générique* veut dire  $t \in \mathbb{C} \setminus S$ ), le type topologique ne dépend que de  $f$ . Nous notons  $K_{f,\infty} \subset \mathbb{S}^3$  le type topologique de l'entrelacs pour un  $t$  générique. Les entrelacs que l'on obtient ainsi, sont orientés en tant que bords de surfaces trouées. Il est démontré dans [NR] que tous ces entrelacs sont des entrelacs toriques itérés.

Un *multientrelacs*  $(K, \mathbf{m})$  est la donnée d'un entrelacs orienté  $K = K_1 \cup \dots \cup K_s$  (dans  $\mathbb{S}^3$ ) et un entier  $m_j$  attaché à chaque composante connexe  $K_j$  de l'entrelacs,  $j = 1, \dots, s$ ,  $\mathbf{m} := (m_1, \dots, m_s)$ . Rappelons qu'un multientrelacs  $(K, \mathbf{m}) \subset \mathbb{S}^3$  est *fibré*, voir [EN, Chap 1, section 4],

s'il existe une fibration  $C^\infty$ -localement triviale

$$\pi : \mathbb{S}^3 \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^1$$

telle que pour chaque composante  $K_i$  il existe un voisinage régulier fermé  $N(K_i)$  de  $K$  dans  $\mathbb{S}^3$ , muni d'une trivialisatation

$$\psi_i : D^2 \times K_i \rightarrow N(K_i), \quad D^2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}, \quad \psi(0, w) = w, w \in K_i,$$

de telle sorte que  $\pi \circ \psi_i : D^2 \setminus \{0\} \times K_i \rightarrow \mathbb{S}^1$  vérifie

$$\pi \circ \psi_i(z, w) = \left(\frac{z}{|z|}\right)^{m_i}, \quad w \in K_i.$$

Une telle fibration est essentiellement unique, voir [EN]. Cette fibration est aussi déterminée par un epimorphisme  $\alpha : H_1(\mathbb{S}^3 \setminus K; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  qui envoie la classe d'homologie du méridien positif de la composante  $K_i$  sur la valeur  $m_i$ . Un *entrelacs orienté* est dit *fibré* si le multientrelacs défini par un poids  $\mathbf{m}$  constant égal à 1 est fibré.

En général, l'entrelacs générique à l'infini d'un polynôme  $f$  n'est pas un entrelacs fibré. Il l'est si et seulement si le polynôme  $f$  est *bon*, voir [N2]. Si pour une valeur  $t_0 \in \mathbb{C}$ , l'entrelacs  $K_{f,t_0}$  est fibré, Neméthi et Zaharia [NZ] ont montré que

$$\pi : \begin{array}{l} \mathbb{S}_R^{2n+1} \setminus K_{f,t_0} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x \mapsto \frac{f(x)-t_0}{|f(x)-t_0|} \end{array}$$

est une fibration localement triviale pour  $R$  assez grand, ce qui donne une analogie avec le cas local. Ce résultat s'applique au cas bon pour n'importe quelle valeur régulière de  $f$ , et dans ce cas Há et Zaharia [HZ] ont montré que  $\pi$  est isomorphe à  $f_\eta$ , complétant l'analogie avec le cas local.

Dans le cas général, Neumann [N2] a défini un multientrelacs fibré  $(K_0, \mathbf{m})$ , torique itéré aussi, tel que l'entrelacs générique de  $f$  soit l'intersection de la fibre de la fibration avec le bord d'un voisinage régulier de  $K_0$  (par conséquent, l'entrelacs générique est obtenu par un cablage de  $K_0$ ). Nous donnerons dans les sections suivantes une construction explicite de ce multientrelacs  $(K_0, \mathbf{m})$  qui va nous permettre, avec le théorème qui suit, de décrire la monodromie à l'infini dans le cas général et de retrouver les résultats que nous venons de citer.

**Théorème 1.1.** *Soit  $f \in \mathbb{C}[X, Y]$  un polynôme primitif. La fibration  $f_\eta$  est équivalente à la fibration du multientrelacs  $K_0$ .*

Ces fibrations sont déterminées par leurs monodromies géométriques agissant sur les fibres. Ces monodromies induisent des automorphismes sur la cohomologie (en degré 1) des fibres et leurs polynômes caractéristiques deviennent des invariants de ces fibrations, appelés les polynômes d'Alexander; nous noterons  $\Delta_\infty$  celui de la monodromie à l'infini.

**Corollaire 1.2.** *Les polynômes d'Alexander du multientrelacs  $(K_0, \mathbf{m})$  et celui  $\Delta_\infty$  de la monodromie à l'infini de  $f$  coïncident.*

Nous rappelons que Libgober et Sperber [LS] ont calculé la fonction zêta de la monodromie à l'infini en toute dimension pour des polynômes commodes qui sont non dégénérés par rapport à leur polyèdre de Newton. Une autre approche pour l'étude de la monodromie à l'infini des polynômes de deux variables se trouve dans [D].

Dans la première partie, nous démontrons le théorème (1.1). L'idée est d'utiliser la résolution d'une application polynomiale  $f$ . En prenant le bord d'un voisinage régulier de certaines composantes irréductibles d'une compactification de  $\mathbb{C}^2$ , on définit une variété graphée  $\widetilde{M}_\infty$  et un entrelacs  $\widetilde{K}_\infty \subset \widetilde{M}_\infty$  torique itéré. Par chirurgie de Dehn (voir [R]) le long de  $\widetilde{K}_\infty$ , nous construisons alors une variété  $M_\infty$  isotope à  $\mathbb{S}^3$  dans  $\mathbb{C}^2$  et le multientrelacs de Neumann  $K_0$  est la réunion des âmes des tores pleins que l'on a rajouté dans la chirurgie; le poids  $\mathbf{m}$  est associé à la résolution de  $f$ . Nous comparons alors la fibration  $f_\eta$  à celle de  $\widetilde{K}_\infty$  et celle de  $\widetilde{K}_\infty$  à celle de  $(K_0, \mathbf{m})$ .

Dans la deuxième partie, nous donnons deux méthodes pour calculer la monodromie, soit en utilisant  $\widetilde{K}_\infty$ , c'est à dire la résolution, soit en utilisant les résultats de [EN] sur les multientrelacs toriques itérés. Nous ferons aussi quelques remarques sur la monodromie des fibres spéciales. Dans la troisième partie nous traitons quelques exemples.

Les auteurs remercient les programmes PICASSO qui ont permis au deuxième auteur de se rendre à l'Université de Saragosse, en 1992 et 1996.

## 2 Résolution de l'application polynomiale

Dans cette section nous allons fournir des modèles précis pour toutes les fibrations qui apparaissent dans §1 et qui donneront une preuve du théorème (1.1). Pour ce faire, nous rappelons la construction de la résolution d'une application polynomiale qui est développée dans [LW] et [Ar].

Soit  $f(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$  un polynôme primitif de degré  $d > 0$ , c'est-à-dire, la fibre générique est connexe. Notons  $F(X, Y, Z) := Z^d f(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$ . L'application rationnelle

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1 \\ [x : y : z] &\longmapsto \frac{F(x, y, z)}{z^d} \end{aligned}$$

est une extension de  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , compte tenu des identifications naturelles, et elle est bien définie en dehors de  $C_{\infty, f} := \{[x : y : 0] \in \mathbb{P}^2 \mid F(x, y, 0) = 0\}$  qui est un ensemble fini.

**Théorème 2.3.** [LW] [Ar] *Il existe une suite d'éclatements au-dessus de  $C_{\infty, f} \subset L_{\infty}$  telle que si  $\sigma : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  est la composition de ces éclatements, alors, on peut trouver de façon unique un morphisme algébrique régulier  $\tilde{\Phi} : X \rightarrow \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  (partout bien définie) tel que  $\tilde{\Phi} \circ \sigma = \Phi$ .*

Puisque les éclatements du théorème précédent se produisent au-dessus de la droite à l'infini  $L_{\infty}$  d'équation  $Z = 0$ , nous identifions  $\mathbb{C}^2$  avec un ouvert dense de  $X$  de telle sorte que  $D_{\infty} := X \setminus \mathbb{C}^2 = \sigma^{-1}(L_{\infty})$ ; il s'agit d'une courbe à croisements normaux dont les composantes irréductibles sont des courbes rationnelles lisses et le graphe dual  $G_{\infty}$  est un arbre. Le nombre d'Euler de chaque composante irréductible de  $D_{\infty}$  induit une pondération sur le sommet correspondant dans  $G_{\infty}$ .

D'après [N1], le bord d'un petit voisinage régulier  $N(D_{\infty})$  est une variété graphée de Waldhausen et puisque  $\sigma(N(D_{\infty}))$  est un voisinage régulier de  $L_{\infty}$  dans  $\mathbb{P}^2$ , on en déduit que  $\partial N(D_{\infty})$  est une variété de dimension 3 isotope dans  $\mathbb{C}^2$  à une sphère  $S^3_R$ . Nous pouvons utiliser comme modèle de  $N(D_{\infty})$  la preimage par  $\sigma$  du complément dans  $\mathbb{P}^2$  de la boule ouverte centrée à l'origine de rayon  $R$  assez grand; nous allons

préciser comment construire un autre modèle de  $N(D_\infty)$  qui sera plus convenable.

Il y a trois types de composantes irréductibles dans  $D_\infty$ :  $D_\infty = \tilde{D}_\infty \cup D_f \cup \text{Dic}$ , où:

1.  $\tilde{D}_\infty = \tilde{\Phi}^{-1}(\infty)$ ,
2.  $\text{Dic} = D_1 \cup \dots \cup D_r$ ; les courbes  $D_i$  sont les composantes irréductibles de  $D_\infty$  telles que  $\tilde{\Phi}|_{D_i}$  est surjective (on les appelle les composantes dicritiques),
3.  $D_f = \bigcup_{t \in \mathbb{C}} D_t$ , où  $D_t$  est la réunion des composantes irréductibles  $D_i^t$  de  $D_\infty$  telles que  $\tilde{\Phi}(D_i^t) = \{t\}$ .

**Théorème 2.4.** [LW] *La courbe  $D_\infty$  vérifie les propriétés suivantes:*

- (I) *Le graphe dual  $\tilde{G}_\infty$  de la courbe  $\tilde{D}_\infty$  est un arbre.*
- (II) *Chaque composante dicritique rencontre  $\tilde{D}_\infty$  en un point et  $D_f$  en, au plus, un point.*
- (III)  *$\tilde{D}_\infty \cap D_f = \emptyset$  et chaque composante connexe de  $D_f$  rencontre exactement une composante dicritique.*
- (IV) *Si  $D_i \cap D_f = \emptyset$ , nous posons  $D_f^i = \emptyset$ ; si non, nous notons  $D_f^i$  la seule composante connexe de  $D_f$  qui rencontre  $D_i$ . Alors, le graphe dual de  $D_f^i$  est une chaîne linéaire (aussi appelé bambou).*

Nous allons interpréter le théorème (2.4) en termes de théorie des nœuds. Soit  $\Delta \subset \mathbb{P}^1$  un petit disque centré à l'infini et soit  $N(\tilde{D}_\infty) := \tilde{\Phi}^{-1}(\Delta)$ ; il s'agit d'un petit voisinage régulier de  $\tilde{D}_\infty$ . Son bord  $\tilde{M}_\infty$  est par construction une variété graphée de dimension 3 qui fibre sur le cercle  $\partial\Delta$  par la restriction de  $\tilde{\Phi}$ . L'intersection de  $\tilde{M}_\infty$  avec  $\text{Dic}$  est un entrelacs torique itéré  $\tilde{K}_\infty$  de la variété graphée  $\tilde{M}_\infty$ ; nous rappelons que l'on peut définir des entrelacs toriques itérés pour n'importe quelle variété graphée au sens de Waldhausen, voir [W]. Chaque composante irréductible  $D_i$  de  $\text{Dic}$  produit une composante connexe de  $\tilde{K}_\infty$ ; il s'agit du bord d'une curvette de la composante irréductible de  $\tilde{D}_\infty$  qui rencontre  $D_i$ .

Nous pouvons construire maintenant le voisinage  $N(D_\infty)$  de la façon suivante. On considère un voisinage régulier  $\tilde{N} := N(\text{Dic} \cup D_f)$  de la réunion de composantes irréductibles de Dic et  $D_f$  de sorte que pour chaque composante irréductible  $D_i$  de Dic, si  $P_i = D_i \cap \tilde{D}_\infty$ , nous pouvons choisir des coordonnées locales  $(u, v)$  centrées en  $P_i$  de sorte que:

1. L'équation locale de  $D_i$  est  $u = 0$  et celle de  $\tilde{D}_\infty$  est  $v = 0$ .
2. Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que l'équation locale de  $\tilde{N}$  est  $|u| \leq \varepsilon$ .
3.  $\tilde{\Phi}(u, v) = v^{-k}$  où  $k$  est la multiplicité de  $D_i$ , c'est-à-dire, le degré de la restriction de  $\tilde{\Phi}$  à  $D_i$ .

Notons que  $\tilde{N}$  peut avoir plusieurs composantes connexes. Alors, nous fixons  $N(D_\infty) = N(\tilde{D}_\infty) \cup \tilde{N}$ . Le passage de  $\tilde{M}_\infty$  à  $M_\infty = \partial N(D_\infty)$  se fait de la façon suivante:

**Pas 1.** On enlève l'intérieur d'une réunion finie disjointe de tores pleins dont les âmes sont les  $r$  composantes connexes de  $\tilde{K}_\infty$  (une pour chaque composante dicritique). Le résultat  $\tilde{M}_\infty \setminus \overset{\circ}{N}(\tilde{K}_\infty)$  est une variété orientée à bord qui fibre sur le cercle, dont le bord est une réunion disjointe de  $r$  tores. La fibration est donnée par la restriction de  $\tilde{\Phi}$ .

**Pas 2.** On recolle la partie qui correspond pour  $\partial \tilde{N} \setminus N(\tilde{D}_\infty)$ . Du point de vue des voisinages réguliers on doit ajouter à  $N(\tilde{D}_\infty)$  le voisinage régulier de

$$\text{Dic} \cup D_f = \prod_{i=1}^r (D_i \cup D_f^i)$$

D'après le théorème (2.4) pour chaque  $i = 1, \dots, s$ , le graphe dual de  $D_i \cup D_f^i$  est un bambou (i.e., un graphe linéaire), dont l'un des bouts est le sommet qui correspond à  $D_i$ ; par conséquent, le bord de  $N(D_i \cup D_f^i)$  est un espace lenticulaire et le complément d'un voisinage régulier du bord d'une curvette de  $D_i$  dans  $\partial N(D_i \cup D_f^i)$  est un tore plein. Nous devons recoller ces tores pleins le long des composantes du bord de la variété obtenue dans le Pas 1.

Nous venons d'expliquer le passage par chirurgie de Dehn de  $\tilde{M}_\infty$  à  $M_\infty$  qui est isotope à  $\mathbb{S}_R^3$ . Nous définissons  $K_0$  comme la réunion des âmes des tores pleins que l'on a rajouté dans la chirurgie. Il y a une composante connexe  $K_i$  associée à chaque dicritique  $D_i$  comme suit: Si

$D_f^i \neq \emptyset$ , nous prenons la composante irréductible  $\widehat{D}_i \neq D_i$  de  $D_i \cup D_f^i$  qui correspond au sommet qui est au bout du bambou défini par le graphe dual de  $D_i \cup D_f^i$ ; si  $D_f^i$  est vide, nous prenons  $\widehat{D}_i = D_i$ .  $K_i$  est le bord orienté négativement d'une curvette de cette composante. En tant qu'entrelacs  $K_0 = K_1 \cup \dots \cup K_r$ .

Nous allons comparer les fibrations  $f_\eta : E_\eta \rightarrow \mathbb{S}_\eta^1$  et  $\pi : \widetilde{M}_\infty \setminus \overset{\circ}{N}(\widetilde{K}_\infty) \rightarrow \partial\Delta$  où  $\pi$  est obtenue par restriction de  $\widetilde{\Phi}$ . Nous pouvons supposer que  $\partial\Delta$  est le cercle de rayon  $\eta$  ce qui implique que  $\widetilde{M}_\infty \setminus \overset{\circ}{N}(\widetilde{K}_\infty) \subset E_\eta$  et  $\pi$  est la restriction de  $f_\eta$ . La fibre de  $f_\eta$  est la fibre générique de  $f$  qui est une surface compacte moins un nombre fini de points. La fibre de  $\pi$  est obtenue en enlevant des petits disques centrés en ces points. Il y a donc une équivalence d'homotopie évidente entre les fibres qui en induit une pour les fibrations  $f_\eta$  et  $\pi$ .

Par la construction précédente, nous avons une égalité des variétés de dimension 3 à bord

$$B_\infty := \widetilde{M}_\infty \setminus \overset{\circ}{N}(\widetilde{K}_\infty) = M_\infty \setminus \overset{\circ}{N}(K_0).$$

Nous pouvons considérer  $\pi$  comme étant définie sur  $B_\infty$ . Par construction nous avons:

- Les fibres de  $\widetilde{\Phi}$  au-dessus de  $\partial\Delta$  ne sont pas transverses à la 3-sphère  $M_\infty$  (l'intersection des fibres avec  $M_\infty$  sont des surfaces réelles à bord). Néanmoins,  $\pi$  est une fibration localement triviale et il en est de même pour sa restriction au bord de la 3-variété  $B_\infty$  (qui est une réunion disjointe de  $s$  tores). Pour chaque  $t \in \partial\Delta$  nous obtenons sur le bord un entrelacs  $K_t \subset M_\infty \cap \widetilde{M}_\infty$ .
- Les fibres de  $\widetilde{\Phi}$  au-dessus d'une petite couronne fermée  $\Theta$ , extérieure à  $\Delta$ , sont transverses à  $M_\infty$ ; par conséquent, la restriction de  $\widetilde{\Phi}$  à  $\widetilde{\Phi}^{-1}(\Theta) \cap M_\infty$  est une fibration localement triviale dont les fibres  $\widetilde{K}_t$ ,  $t \in \Theta$ , sont des entrelacs. Puisque  $K_t = \widetilde{K}_t$  si  $t \in \partial\Delta$ , alors, pour tout  $t \in \Theta$ , ces entrelacs sont isotopes aux entrelacs du point précédent. D'autre part la fibration sur  $\widetilde{\Phi}^{-1}(\Theta) \cap M_\infty$  peut être étendue (de façon unique à isotopie près) en une application différentiable de  $N(K_0)$  sur un disque qui est une fibration localement triviale en dehors de  $K_0$  (qui est la preimage du centre du disque). Ceci implique que pour tout  $t \in \Theta$ ,  $K_t$  est un câble de



$K_0$ . Pour chaque composante irréductible  $K_0^i$  de  $K_0$ ,  $i = 1, \dots, s$ , ce câblage définit une multiplicité pour chaque composante connexe qui rend  $K_0$  un *multientrelacs* fibré dont la fibration est une extension convenable de  $\pi$  à  $M_\infty \setminus K_0$ .

- Nous pouvons faire une isotopie dans  $\mathbb{C}^2$  de la sphère  $M_\infty$  à la sphère  $\mathbb{S}_R^3$  qui respecte les fibres au-dessus d'une petite sous-couronne  $\Theta_1 \subset \Theta$ , i.e., cette isotopie envoie  $K_t$ ,  $t \in \Theta_1$ , sur  $K_{f,\infty}$ . Nous notons à nouveau  $K_0$  l'image de  $K_0$  dans  $\mathbb{S}^3$  et nous en déduisons que  $K_{f,\infty}$  est un câble de  $K_0$ . Cette identification donne le théorème (1.1).

### 3 Formules pour le calcul de la monodromie

La première méthode provient de la démonstration du théorème (1.1). Considérons les graphes  $G_\infty$  et  $\tilde{G}_\infty$ . Soient  $S(G_\infty)$ ,  $S(\tilde{G}_\infty)$  leurs ensembles de sommets et  $A(G_\infty)$ ,  $A(\tilde{G}_\infty)$  leurs ensembles d'arêtes; notons que  $S(\tilde{G}_\infty) \subset S(G_\infty)$ . Pour  $s \in S(G_\infty)$  nous notons  $v(s)$  la valence de  $s$  dans  $G_\infty$  (i.e, le nombre d'arêtes adjacentes). Si  $s \in S(\tilde{G}_\infty)$  nous allons associer un autre entier qui est appelé la multiplicité  $m(s)$  de  $s$ : Soit  $D_s$  la composante irréductible de  $\tilde{D}_\infty$  associée à  $s$ ; soit  $P_s$  un point lisse de  $\tilde{D}_\infty$  dans  $D_s$ . Nous pouvons choisir des coordonnées locales  $u, v$  centrées en  $P_s$  telles que l'équation locale de  $D_s$  est  $u = 0$  et  $\tilde{\Phi}(u, v) = v^{-m}$ . L'entier positif  $m(s) := m$  ne dépend pas des choix.

**Proposition 3.5.** *Le polynôme d'Alexander à l'infini est*

$$\Delta_\infty(t) = (t-1) \prod_{s \in S(\tilde{G}_\infty)} (t^{m(s)} - 1)^{v(s)-2}.$$

**Remarque.** Les bouts de l'arbre  $\tilde{G}_\infty$  donnent les dénominateurs de cette formule, tandis que les sommets de valence plus grande que deux donnent les numérateurs.

**Démonstration.** On utilise la méthode de Clemens [Cl], Landman [L] et A'Campo [A]. La fibration  $f_\eta$  est déterminée par le graphe pondéré  $\tilde{G}_\infty$  où il faut tenir compte des intersections avec les composantes dicritiques. ■

**Remarque.** Considérons une valeur spéciale  $t_0$  du polynôme. Pour calculer le polynôme d'Alexander de la monodromie autour de cette fibre nous procédons comme suit. Nous considérons la fibre  $\tilde{\Phi}^{-1}(t_0)$ ; nous éclatons cette fibre pour que sa réunion avec Dic soit un diviseur à croisements normaux. Notons  $G$  le graphe dual de la transformée totale de  $\tilde{\Phi}^{-1}(t_0)$  par ces éclatements et  $\tilde{G}$  le graphe dual de sa réunion avec Dic; il s'agit d'un graphe pondéré par des multiplicités  $m(s)$  (de l'application induite par  $\tilde{\Phi}$ ) et par le genre des composantes irréductibles  $g(s)$  (pas forcément nuls pour les composantes irréductibles de la compactifiée de la fibre affine). Nous notons comme précédemment  $v(s)$  la valence des sommets de  $G$  dans le graphe  $\tilde{G}$ . Le polynôme d'Alexander est:

$$(t-1) \prod_{s \in S(G)} \left( t^{m(s)} - 1 \right)^{2g(s) + v(s) - 2}.$$

L'autre méthode de calcul utilise le théorème (1.1) et des résultats dans [EN].

L'entrelacs à l'infini d'une courbe  $V$  définie par  $f = t$  peut se représenter par un diagramme de Eisenbud et Neumann, qui donne une façon de coder les singularités de la courbe en ses points à l'infini. La construction de ces diagrammes se trouve dans [EN, chap 1, appendice] et [N2]. Dans [AC], nous avons fait le dictionnaire entre certains invariants qui proviennent des graphes de plombage  $G_\infty$  et  $\tilde{G}_\infty$  et des invariants qui proviennent des diagrammes d'Eisenbud-Neumann. Des exemples de diagrammes d'Eisenbud-Neumann seront donnés dans la section suivante.

Soit  $K$  un entrelacs torique itéré dans  $\mathbb{S}^3$  et soit  $G$  un diagramme d'Eisenbud-Neumann qui code  $K$ . On a deux types de sommets, les flèches et les autres. On note  $\mathcal{F}$  l'ensemble des flèches, et  $\mathcal{V}$  l'ensemble des sommets qui ne sont pas des flèches. Pour chaque élément  $v \in \mathcal{V}$ , on appelle valence et on note  $\delta_v$  le nombre de cotés qui convergent vers  $v$ .

A chaque  $v \in \mathcal{V}$ , on associe une composante virtuelle [N2] (encore appelée compagnon intrinsèque dans [LMW]), notée  $S_v$ . Rappelons que  $S_v$  est une fibre de la fibration correspondante à  $v$  dans la satellisation définie par le diagramme. Plus tard, nous pourrions interpréter  $S_v$  comme une curvette associée à une composante irréductible de  $D_\infty$ . On note  $l_v = \mathcal{L}(S_v, K)$  le coefficient d'enlacement de cette composante

virtuelle avec l'entrelacs  $K$  dans  $\mathbb{S}^3$ . On calcule ces coefficients de la façon suivante:

**Lemme 3.6.** [EN, Chap 3, section 10] *Le coefficient d'enlacement d'une composante, virtuelle ou non, avec une composante de multiplicité  $m$  de l'entrelacs est le produit de tous les entiers adjacents au chemin du diagramme qui joint ces composantes et de  $m$ .*

Sur les diagrammes des exemples, on a mis les nombres  $l_v$  entre parenthèses. Neumann a montré que si  $f^{-1}(t)$  est une fibre générique, alors, pour tout  $v \in \mathcal{V}$ ,  $l_v \geq 0$ . Si le polynôme  $f$  est bon, pour tout  $v \in \mathcal{V}$ ,  $l_v > 0$ . Dans ce cas il est possible de trouver un diagramme d'Eisenbud-Neumann tel que l'on peut associer une bijection entre les éléments de  $\mathcal{V}$  et les éléments de  $S(\tilde{G}_\infty)$  qui ont valence au moins trois dans  $G_\infty$ . Nous avons montré dans [AC], que si  $s_v \in S(\tilde{G}_\infty)$  est associé à  $v \in \mathcal{V}$ , alors,  $l_v = m(s_v)$ . Dans cette bijection, on associe curvettes et composantes virtuelles définies avant (3.6).

Nous sommes en mesure maintenant d'énoncer les résultats de [EN, chap 3, section 12, Theoreme 12.1]. Nous considérons un multientrelacs fibré de fibre  $F$  et nous notons  $h : H_1(F) \rightarrow H_1(F)$  la monodromie.

**Proposition 3.7.** [EN, Théorème 12.1] *Le polynôme d'Alexander de la monodromie est*

$$\Delta_\infty(t) = (t-1) \prod_{v \in \mathcal{V}} (t^{l_v} - 1)^{\delta_v - 2}$$

Cette proposition découle aussi du théorème (1.1), de la proposition (3.5) et du dictionnaire entre les diagrammes d'Eisenbud-Neumann et les graphes de plombage, voir [EN, chap 5] et [AC].

**Proposition 3.8.** [EN, chap 3, section 11, Proposition 11.4] *La valeur propre 1 n'a que des blocs de Jordan d'ordre 1 et elle apparaît dans le polynôme d'Alexander avec la multiplicité  $r-1$ , où  $r$  est le nombre de composantes du multientrelacs.*

**Remarque.** Il est par contre possible de trouver des blocs de Jordan de taille 2 pour la valeur propre 1 pour la monodromie autour des fibres spéciales [ACD].

**Proposition 3.9.** [EN, chap 3, section 13, Théorème 13.6] *Il existe un entier  $q$  tel que la monodromie  $h$  vérifie  $(h^q - 1)^2 = 0$ .*

Nous pouvons aussi décrire les blocs de Jordan d'ordre 2. Pour cela nous devons introduire de nouvelles notations. On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des arêtes du diagramme qui joignent deux sommets  $v \in \mathcal{V}$ . Pour  $C \in \mathcal{C}$  et  $w \in \mathcal{F}$ , on note  $\sigma_{C,w}$  le chemin qui contient  $C$  et qui relie  $C$  à  $w$ . On note  $l_{C,w}$  le produit des entiers adjacents à  $\sigma_{C,w}$  qui ne sont pas sur  $\sigma_{C,w}$ . On note  $w_1, \dots, w_t$  les flèches qui se trouvent à gauche de  $C$  et  $w_{t+1}, \dots, w_n$  celles qui se trouvent à droite de  $C$ . On définit

$$m_C = m_1 l_{C,w_1} + \dots + m_t l_{C,w_t}$$

$$m'_C = m_{t+1} l_{C,w_{t+1}} + \dots + m_n l_{C,w_n}$$

et  $d_C = \text{pgcd}(m_C, m'_C)$ .

Si  $v \in \mathcal{V}$ , on note  $d_v$  le pgcd des  $d_C$  pour  $C \in \mathcal{C}$  et  $C$  contenant  $v$  et des  $m_w$  pour  $w \in \mathcal{F}$ , adjacent à  $v$ . Soit  $d$  le pgcd des  $m_w$ ,  $w \in \mathcal{F}$ .

**Proposition 3.10.** [EN, chap 4, section 14, Théorème 14.1] *Le polynôme caractéristique de la restriction  $h_{|(h^q-1)(H_1(F))}$  est égale à*

$$p(t) = (t^d - 1) \prod_{C \in \mathcal{C}} (t^{d_C} - 1) / \prod_{v \in \mathcal{V}} (t^{d_v} - 1).$$

Le diagramme d'Eisenbud et Neumann associé à l'entrelacs  $K_0$  s'obtient à partir du diagramme de Eisenbud et Neumann de l'entrelacs générique de  $f$  en supprimant tous les sommets tels que  $l_v = 0$  et en remplaçant  $v$  par une flèche avec l'unique multiplicité qui laisse  $l'_v$  inchangé pour tous les autres sommets  $v' \in \mathcal{V}$  de l'entrelacs. On retrouve le fait que si  $f$  est bon, le diagramme de  $K_0$  est celui de la fibre générique et de toutes les fibres de  $f$ .

On remarque que le nombre de composantes de  $K_0$  est égal au nombre de dicritiques  $\delta(f)$ . On retrouve donc le résultat de [D].

**Corollaire 3.11.** *La valeur propre 1 apparaît avec des blocs de Jordan d'ordre 1 et la multiplicité  $\delta(f) - 1$  où  $\delta(f)$  désigne le nombre de dicritiques,*

On a aussi

**Corollaire 3.12.** *Si la courbe  $f = 0$  n'a qu'une seule place à l'infini, alors la monodromie à l'infini est semi-simple.*

Si  $f$  est non dégénéré pour son polygone de Newton à l'infini, on peut détecter aisément les valeurs propres de la monodromie qui apparaissent avec des blocs de Jordan d'ordre 2 [C].

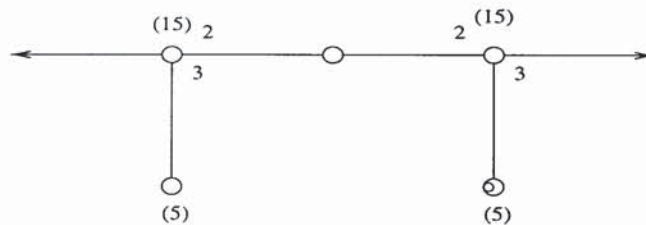
### 4 Exemples et remarques

Nous donnons dans les exemples suivants le diagramme de Eisenbud et Neumann des fibres génériques et le graphe  $\tilde{G}_\infty$  avec les attachements de dicritiques.

**Exemple 4.13.** Le polynôme d'A'Campo:

$$f := (x^3 + y^2)(x^2 + y^3)$$

Le diagramme de Eisenbud et Neumann de  $f = t$  est, pour tout  $t$ .



Le polynôme est bon puisque les  $l_i$  sont tous strictement positifs. Donc le multientrelacs de Neumann est l'entrelacs à l'infini de  $f = t$ . On a

$$\Delta_\infty(t) = (t - 1) \frac{(t^{15} - 1)^2}{(t^5 - 1)^2}$$

La multiplicité de 1 est 1. On a

$$p(t) = t^2 + t + 1$$

On a donc deux blocs de Jordan d'ordre 2. Remarquons que l'entrelacs à l'infini ne coïncide pas avec l'entrelacs de la singularité locale à l'origine, bien que les graphes soient très semblables.

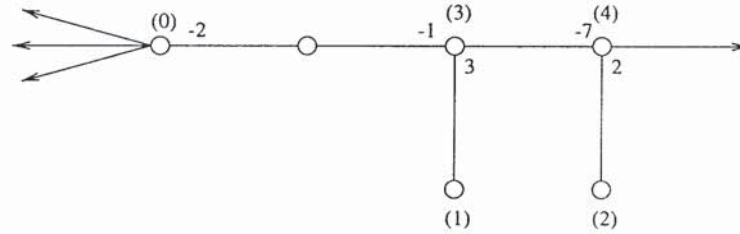
**Exemple 4.14.** Cet exemple est l'exemple de polynôme de plus petit degré dont toutes les fibres sont lisses, irréductibles et non isomorphes à  $\mathbb{C}$  (voir [ACL] pour des familles infinies de tels polynômes).

On pose

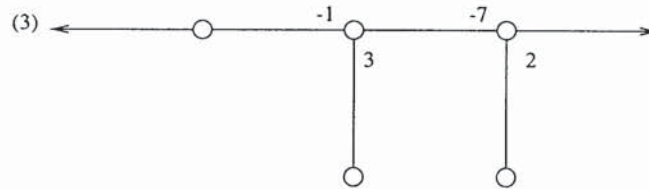
$$p = xy^3 + 16/9y^2 + 1/2y + 1; \quad s_1 = (p-1)/y; \quad s = (s_1 - 1/2)/y; \quad u = ss_1 + x$$

$$f = pu - 41/36s_1 + 1/3s + t$$

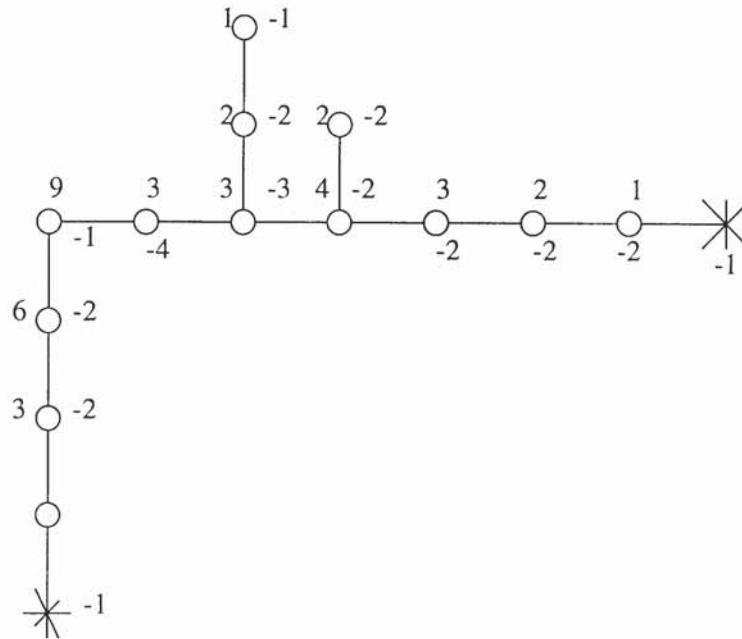
Le diagramme de Eisenbud et Neumann de la fibre générique est



Le diagramme de  $K_0$  est



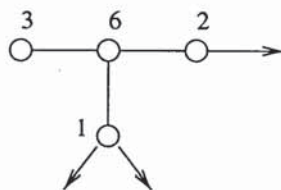
Le diagramme de la résolution est:



Les poids positifs représentent la multiplicité dans  $\tilde{D}_\infty$  et les poids négatifs les nombres d'Euler. Les sommets étoilés représentent les composantes dicritiques. Celle qui est à droite est associée à un dicritique  $D_1$  de multiplicité 1 et celle qui est à gauche à un dicritique  $D_2$  de multiplicité 3 (ayant deux valeurs critiques en dehors de l'infini). On trouve que la monodromie à l'infini est semi simple et:

$$\Delta_\infty = (t^3 - 1)(t^2 + 1).$$

Ce polynôme a deux fibres spéciales qui correspondent aux valeurs critiques  $t_0 = 325/216$  et  $t_1 = -539/216$  de  $\tilde{\Phi}_{|D_2}$ . La fibre pour  $t_0$  rencontre  $D_2$  en un point cuspidal (transverse à  $D_2$ ) et un point lisse et transverse. Nous éclatons le point de contact trois fois pour rendre la réunion de cette fibre et les dicritiques un diviseur à croisements normaux; le graphe dual de la transformée totale de la fibre est:



Les flèches indiquent les intersections avec les dicritiques et la compactifiée de la fibre affine est associée au sommet de multiplicité 1. La monodromie est semisimple et le polynôme d'Alexander de la monodromie est:

$$\Delta_{t_0} = (t^3 + 1)(t - 1)^2.$$

La fibre spéciale pour  $t_1$  rencontre  $D_2$  en un point lisse et en un point double ordinaire (tous les deux transverses à  $D_2$ ). Nous éclatons comme pour la fibre précédente et le graphe dual de la transformée totale de la fibre est:



On a

$$\Delta_{t_1} = (t^2 - 1)(t - 1)^3$$

et un bloc de jordan d'ordre 2 pour la valeur propre 1.

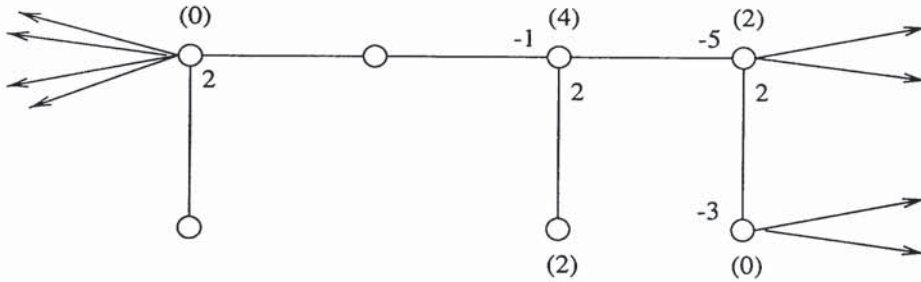
**Exemple 4.15.** [AC] Soit

$$s(x, y) = 1 + xy, p(x, y) = xs(x, y) + 1, u(x, y) = s^2(x, y) + y$$

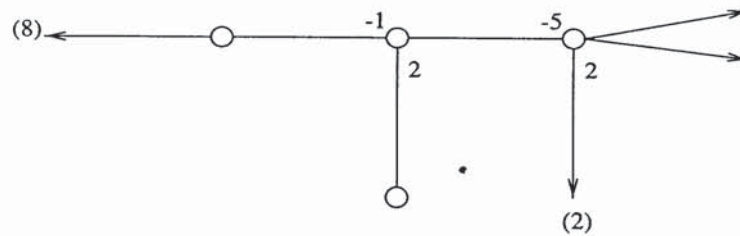
On considère

$$f(x, y) = p^4(x, y)u^2(x, y) - (p(x, y)s(x, y) + 1)^2$$

C'est un exemple de polynôme rationnel qui admet plus d'un dicritique de multiplicité supérieure à un. On a un polynôme de degré 20 dont la fibre générique admet le diagramme d'Eisenbud et Neumann suivant:



Le multientrelacs de Neumann a pour diagramme



On a

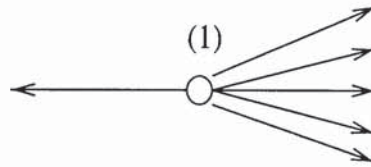
$$\Delta_\infty(t) = (t - 1)(t^4 - 1)(t^2 - 1)$$

La monodromie est semisimple.

**Remarque.** Dans ce dernier cas, comme la fibre générique est rationnelle, on peut appliquer les résultats de [D] pour calculer la monodromie.

**Remarque finale.** La monodromie à l'infini est triviale si et seulement si le diagramme de  $K_0$  est





On en déduit donc que la fibre générique de  $f$  est rationnelle.

Si de plus  $f$  a toutes ses fibres irréductibles, alors d'après Kaliman, on a un seul dicritique, et  $f$  est une forme linéaire à automorphisme près. On retrouve ainsi le résultat de [D].

## References

- [A] N. A'Campo, *La fonction zeta d'une monodromie*, Commentarii math. Helvet. **50** (1975), 233-248.
- [Ar] E. Artal Bartolo, *Une démonstration géométrique du théorème d'Abhyankar-Moh*, J. Reine Angew. Math. **464** (1995), 97-108.
- [AC] E. Artal Bartolo et P. Cassou-Noguès *One remark on polynomials in two variables*, Pacific J. of Math. **176** (1996), 297-309.
- [ACD] E. Artal Bartolo, P. Cassou-Noguès et A. Dimca *Sur la topologie des polynômes complexes*, Singularities (Oberwolfach, 1996), Progr. Math., 162, Birkhäuser, Basel, 1998, pp. 317-343.
- [ACL] E. Artal Bartolo, P. Cassou-Noguès et I. Luengo Velasco *On polynomials whose fibers are irreducible with no critical points*, Maths. Ann. **299** (1994), 477-490.
- [C] P. Cassou-Noguès *Entrelacs toriques itérés et intégrales associées à une courbe plane*, Sémin. Théor. Nombres Bordx. Sér. II **2** (1990), 273-331.
- [Cl] C.H. Clemens Jr., *Picard-Lefschetz theorem for families of nonsingular algebraic varieties acquiring ordinary singularities*, Trans. Amer. Math. Soc. **136** (1969), 93-108.
- [D] A. Dimca, *Monodromy at infinity for polynomials in two variables*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), 771-779.
- [EN] D. Eisenbud et W.D. Neumann, *Three-dimensional link theory and invariance of plane curve singularities*, Annals of Mathematics Studies, No.110., Princeton University Press, Princeton NJ, 1985.
- [HZ] Há H. V. et A. Zaharia, *Families of polynomials with total Milnor number constant*, Math. Ann. **304** (1996), 481-488.

- [L] A. Landman, *On the Picard-Lefschetz transformation for algebraic manifolds acquiring general singularities*, Trans. Amer. Math. Soc. **181** (1973), 89–126.
- [LMW] Lê D.T., F. Michel et C. Weber, *Courbes polaires et topologie des courbes planes*, Ann. Sci. Ec. Norm. Super., IV. Ser. **24** (1991), 141–169.
- [LW] Lê D.T. et C. Weber, *A geometrical approach to the Jacobian conjecture for  $n = 2$* , Kodai Math. J. **17** (1994), 374–381.
- [LS] A. Libgober et S. Sperber, *On the zeta function of monodromy of a polynomial map*, Compos. Math. **95** (1995), 287–307.
- [M] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies, No.61, Princeton University Press, Princeton N.J, 1968.
- [NZ] A. Neméthi et A. Zaharia, *Milnor fibration at infinity*, Indag. Math., New Ser. **3** (1992), 323–335.
- [N1] W.D. Neumann, *A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves*. Trans. Am. Math. Soc. **268** (1981), 299–343.
- [N2] ———, *Complex algebraic plane curves via their links at infinity*, Invent. Math. **98** (1989), 445–489.
- [NR] W.D. Neumann, L. Rudolph, *Unfoldings in knot theory*, Math. Ann. **278** (1987), 409–439.
- [R] D. Rolfsen, *Knots and links*, Mathematics Lecture Series, No. 7, Publish or Perish, Inc., Berkeley CA, 1976.
- [T] R. Thom, *Ensembles et morphismes stratifiés*, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 240–284.
- [V] J.-L. Verdier, *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*, Invent. Math. **36** (1976), 295–312.
- [W] F. Waldhausen, *Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten I*, Invent. Math. **3** (1967), 308–333.

Departamento de Matemáticas  
Universidad de Zaragoza  
50009 Zaragoza  
Spagne  
E-mail: artal@posta.unizar.es

Labotatoire de Mathématiques Pures  
Université Bordeaux I, 350  
Cours de La Libération  
33405 Talence Cedex  
France  
*E-mail:* `cassou@math.u-bordeaux.fr`

Recibido: 14 de Diciembre de 1998

Revisado: 3 de Abril de 2000