REVISTA MATEMÁTICA COMPLUTENSE (2000) vol. XIII, num. 1, 195-205
ISNN 1139-1138
http://dx.doi.org/10.5209/rev_REMA.2000.v13.n1.17098

LIMITE DE LA SOLUTION DE $u_t - \Delta u^m + \mathbf{div}F(u) = 0$ LORSQUE $m \to \infty$

Ph. BÉNILAN* and N. IGBIDA*

Résumé

Dans cette article, on étudie la limite, lorsque $m \to \infty$, de la solution du problème de Cauchy $n_t - \Delta u^m + \mathrm{div}F(u) = 0$ sur un ouvert Ω avec des conditions aux bords de type Dirichlet et une donnée initiale $u_0 \geq 0$. On démontre que $u_m \to u$ où u est l'unique solution entropique de $n_t + \mathrm{div}F(u) = 0$ avec $u(0) = \underline{u}_0$ la "mesa" de u_0 qui est la limite, lorsque $m \to \infty$, de la solution qui correspond au cas $F \equiv 0$. Cette étude concerne aussi bien le cas dún ouvert Ω borné que le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$.

1 Introduction

On considére la limite, lorsque $m \to \infty$, de la solution du problème de Cauchy

$$(PC_m) \begin{cases} u_t - \Delta u^m + \mathrm{div}F(u) = 0 & \text{sur} \quad Q = (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}^N \end{cases}$$

où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ est supposée ici pour simplifier localement lipchitzienne et $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $u_0 \geq 0$.

Pour tout $m \geq 1$, il existe une unique solution faible u_m de (PC_m) : $u_m \in \mathcal{C}\left([0,\infty); L^1(\mathbb{R}^N)\right) \cap L^\infty(Q)$, $u_m \geq 0$, $\nabla {u_m}^m \in L^2(Q)$ (cf. [14], [10], [11], [12]). Nous prouvons ici que

$$u_m \to u \text{ dans } \mathcal{C}\left((0,\infty); L^1(\mathbb{R}^N)\right)$$

*Equipe de Mathématiques, UMRCNRS 6623 Université de Franche-Comté, Route de Gray, 25030 Besanç cedex FRANCE

1991 Mathematics Subject Classification: 35R25, 35D10, 35F99
Servicio de Publicaciones. Universidad Complutense. Madrid, 2000

où u est l'unique solution entropique (au sens de Kruzhkov, cf. [16]) de

$$(PC)\begin{cases} u_t + \mathrm{div}F(u) = 0 & \text{sur} \quad Q \\ u(0,.) = \underline{u}_0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}^N \end{cases}$$

avec $\underline{u}_0$, la "mesa" de u_0 (cf. [13], [3]), i.e. $\underline{u}_0 = u_0\chi_{[w=0]} + \chi_{[w>0]}$ où w est l'unique solution de

$$\begin{aligned} w \in H^2(\mathbb{R}^N),\ w \geq 0,\ 0 \leq \Delta w + u_0 \leq 1, \\ \text{et } w(\Delta w + u_0 - 1) = 0 \text{ p.p. } \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{1}$$

Lorsque $F \equiv 0$, ceci a été prouvé dans [3] (cf. aussi [13], [9]). Notons qu'un résultat similaire a été prouvé pour l'équation

$$u_t - \Delta u^m + g(u) = 0 \text{ sur } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$$

(cf. [15] et aussi [6], [5]). Nous utilisons ici la même idée consistant à considérer l'équation comme une perturbation continue de l'équation $u_t - \Delta u^m = 0$. La continuité doit être considérée pour la topologie d'un espace de Banach X, dans lequel le semi-groupe associé à $u_t - \Delta u^m = 0$ est de contraction. Dans le cas $u_t - \Delta u^m + g(u) = 0$ nous avions pris $X = L^1$; pour l'équation $u_t - \Delta u^m + \mathrm{div}F(u) = 0$ il est naturel de prendre $X = H^{-1}$. Mais pour cela nous avons besoin de nous restreindre au cas d'un ouvert borné Ω et considérer le problème de Dirichlet

$$(PD_m)\begin{cases} u_t - \Delta u^m + \mathrm{div}F(u) = 0 & \text{sur } (0,\infty) \times \Omega \\ u^m = 0 & \text{sur } (0,\infty) \times \partial\Omega \\ u(0,.) = u_0 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

Dans la section 2, nous étudions la limite, lorsque $m \to \infty$, du problème (PD_m). Et, dans la section 3, nous étudions la limite, lorsque $m \to \infty$, du problème (PC_m).

2 Cas du problème de Dirichlet sur un ouvert borné

Dans cette section, on se donne Ω un ouvert borné à bord lipchitzien et on pose $Q = (0,\infty) \times \Omega$. On se donne d'autre part, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ continue avec $F(0) = 0$ et $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \geq 0$. D'après [10] (Théorème

4.10) (voir aussi [11]), pour tout $m > 0$, il existe une unique solution faible u de (PD_m) au sens

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{C}\left([0,\infty); L^1(\Omega)\right) \cap L^\infty(Q), \; u \geq 0, \; u^m \in L^2(0,\infty; H_0^1(\Omega)) \\ u_t - \Delta u^m + \mathrm{div} F(u) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(Q), \; u(0) = u_0 \text{ p.p. } \Omega. \end{array} \right. \tag{2}$$

De plus u vérifie les inégalités entropiques

$$\int_Q \mathrm{sign}_0^+(u-s)\left\{(F(u)-F(s)).\nabla\xi - \nabla u^m.\nabla\xi \right. \tag{3}$$

$$\left. + (u-s)\xi_t\right\} dxdt - \int_\Omega (u_0 - s)^+ \xi(0) dx \geq 0$$

et

$$\int_Q \mathrm{sign}_0^+(-s-u)\left\{(F(u)-F(-s)).\nabla\xi - \nabla u^m.\nabla\xi \right. \tag{4}$$

$$\left. + (u+s)\xi_t\right\} dxdt - \int_\Omega (-u_0 - s)^+ \xi(0) dx \geq 0$$

pour tout $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times (L^2(0,\infty; H^1(\Omega)) \cap W^{1,1}(0,\infty; L^\infty(\Omega))$ tel que $s \geq 0$, $\xi \geq 0$ et pour tout $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times (L^2(0,\infty; H_0^1(\Omega) \cap W^{1,1}(0,\infty; L^\infty(\Omega))$ tel que $\xi \geq 0$.

On définit le semi-groupe $S_m(t) \; : \; L^\infty(\Omega)^+ \to L^\infty(\Omega)^+$ par $S_m(t)u_0 = u_m(t)$. On sait de plus que $S_m(t)$ est une T-contraction dans $L^1(\Omega)$; i.e.

$$\int (S_m(t)u_0 - S_m(t)\hat{u}_0)^+ \leq \int (u_0 - \hat{u}_0)^+ \quad \forall \, u_0, \; \hat{u}_0 \; \in L^\infty(\Omega)^+, \; t \geq 0$$

et que $S_m(t)$ laisse invariant

$$BV(\Omega) = \left\{u \in L^1(\Omega) \; ; \; \nabla u \text{ est une mesure de Radon bornée sur } \Omega\right\}$$

avec

$$\|S_m(t)u_0\|_{BV} \leq \|u_0\|_{BV} \quad \forall \, u_0 \in BV(\Omega), \; t \geq 0,$$

où $\|u\|_{BV} = \displaystyle\int_\Omega |u| + \int_\Omega |\nabla u|$.

D'autre part, on notera $T_m(t)$ le semi-groupe associé à l'équation $u_t - \Delta u^m = 0$, c'est à dire associé à (PC_m) avec $F \equiv 0$. En plus des propriétées précédentes, $T_m(t)$ est une contraction dans l'espace de Hilbert $H^{-1}(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^{-1}} = < u, (-\Delta)^{-1}v >_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega \nabla(-\Delta)^{-1}u.\nabla(-\Delta)^{-1}v$$

où $(-\Delta)^{-1}$ est l'isomorphisme réciproque de

$$-\Delta \ : \ u \in H_0^1(\Omega) \to -\Delta u \in H^{-1}(\Omega).$$

En fait (cf. [8]) pour $v_0 \in L^\infty(\Omega)^+$, $v(t) = T_m(t)v_0$ est l'unique solution forte du problème d'évolution dans $H^{-1}(\Omega)$

$$\frac{dv(t)}{dt} + \partial\phi_m(v(t)) \ni 0, \quad v(0) = v_0 \tag{5}$$

où ϕ_m est la fonction s.c.i. sur $H^{-1}(\Omega)$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{lll} \phi_m(u) = \dfrac{1}{m+1}\displaystyle\int |u|^{m+1} & \text{si} & u \in L^{m+1}(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega) \\ \phi_m(u) = +\infty & \text{si} & u \in H^{-1}(\Omega) \setminus L^{m+1}(\Omega). \end{array} \right.$$

Rappelons (cf. [3]) que pour $u_0 \in L^\infty(\Omega)^+$, on a

$$T_m(t)u_0 \to \underline{u}_0 \text{ dans } L^1(\Omega), \text{ lorsque } m \to \infty, \text{ pour } t > 0 \tag{6}$$

où $\underline{u}_0 = u_0\chi_{[w=0]} + \chi_{[w>0]}$, w étant l'unique solution de

$$\begin{array}{c} w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \ w \geq 0, \ 0 \leq \Delta w + u_0 \leq 1, \\ \text{et } w(\Delta w + u_0 - 1) = 0 \text{ p.p. } \Omega. \end{array} \tag{7}$$

Notons d'ailleurs que $\underline{u}_0$ est la projection orthogonal dans $H^{-1}(\Omega)$ de u_0 sur $\{u \in L^\infty(\Omega) \ ; \ |u| \leq 1\}$, convexe fermé de $H^{-1}(\Omega)$.

Enfin (cf. [10], [11]), il existe une unique solution entropique du problème

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_t + \text{div}F(u) = 0 & \text{sur} & (0,\infty) \times \Omega \\ u = 0 & \text{sur} & (0,\infty) \times \partial\Omega \\ u(0,.) = u_0 & \text{sur} & \Omega, \end{array} \right. \tag{8}$$

au sens

$$\int_Q \operatorname{sign}_0^+(u-s)\left\{(F(u)-F(s)).\nabla\xi+(u-s)\xi_t\right\}dxdt \qquad (9)$$
$$+\int_\Omega (u_0-s)^+\xi(0)dx \geq 0$$

et

$$\int_Q \operatorname{sign}_0^+(-s-u)\left\{(F(u)-F(-s)).\nabla\xi+(u+s)\xi_t\right\}dxdt \qquad (10)$$
$$+\int_\Omega (-u_0-s)^+\xi(0)dx \geq 0$$

pour tout $(s,\xi)\in\mathbb{R}\times(L^2(0,\infty;H^1(\Omega))\cap W^{1,1}(0,\infty;L^\infty(\Omega))$ tel que $s\geq 0$, $\xi\geq 0$ et pour tout $(s,\xi)\in\mathbb{R}\times(L^2(0,\infty;H_0^1(\Omega)\cap W^{1,1}(0,\infty;L^\infty(\Omega))$ tel que $\xi\geq 0$.

Nous notons $S(t)$ le semi-groupe de $L^\infty(\Omega)^+$ défini par $S(t)u_0=u(t)$.

Théorème 1. *Lorsque $m\to\infty$, on a*

$$S_m(t)u_0\to S(t)\underline{u}_0 \text{ dans } L^1(\Omega), \text{ pour tout } t>0 \qquad (11)$$

où $\underline{u}_0$ est donnée par $\underline{u}_0=u_0\chi_{[w=0]}+\chi_{[w>0]}$, w étant l'unique solution de (7).

Preuve. D'après la propriété de contraction dans $L^1(\Omega)$, on peut toujours supposer que $u_0\in BV(\Omega)$ et donc

$$\|S_m(t)u_0\|_{BV}\leq\|u_0\|_{BV}. \qquad (12)$$

1ère étape. On suppose d'abord que

$$0\leq u_0\leq 1.$$

Il est clair qu'alors $\underline{u}_0=u_0$ et que $|S_m(t)u_0|\leq 1$. La fonction $u_m(t)=S_m(t)u_0$ est solution de

$$\frac{\partial u_m}{\partial t}=\Delta {u_m}^m-\operatorname{div}F(u_m) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q)$$

avec $0 \leq {u_m}^m \leq 1$ et $|F(u_m)| \leq \sup_{0 \leq r \leq 1} |F(r)|$.

Puisque, pour tout $\delta > 0$,

$$\int_{\Omega_\delta} |u_m(t, x+h) - u_m(t,x)| dx \leq h \|u_0\|_{BV} \quad \text{pour } |h| \leq \delta$$

avec $\Omega_\delta = \{ x \in \Omega \; ; \; \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \delta \}$, on déduit du Théorème 2 de [17], en utilisant les théorèmes d'Ascoli et de Riesz-Fisher-Kolmogorov, que u_m est relativement compact dans $\mathcal{C}\left([0,\infty); L^1(\Omega)\right)$.

D'autre part, on a

$$\|\nabla {u_m}^m\|_{L^2(Q)} = \frac{1}{m+1} \int_\Omega {u_0}^{m+1} \leq \frac{|\Omega|}{m+1}$$

et donc

$$\nabla {u_m}^m \to 0 \text{ dans } \left(L^2(Q)\right)^N, \text{ lorsque } m \to \infty.$$

En considérant une suite extraite m_k telle que

$$u_{m_k} \to u \quad \text{dans } \mathcal{C}\left([0,\infty); L^1(\Omega)\right),$$

et en passant à la limite dans (3) et (4), on obtient les inégalités entropiques (9) et (10) pour u. D'après l'unicité de la solution entropique, on déduit que lorsque $m \to \infty$, on a

$$S_m(t)u_0 \to S(t)u_0 \quad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ uniformément en } t \geq \text{ borné.}$$

2ème étape. On suppose maintenant

$$\|u_0\|_\infty > 1.$$

La fonction $u_m(t) = S_m(t)u_0$ est la solution forte (cf. [8]) du problème d'évolution dans $H^{-1}(\Omega)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_m(t)}{\partial t} + \partial\phi_m u_m(t) \ni h_m(t) & \text{sur } (0,\infty) \\ u_m(0) = u_0 \end{cases}$$

où $h_m(t) = -\mathrm{div} F(u_m(t)) \in L^\infty(0,\infty; H^{-1}(\Omega))$ et vérifie

$$\|h_m(t)\|_{H^{-1}} = \|F(u_m(t))\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1(|\Omega|, \|u_0\|_\infty) =: C_1.$$

Pour $\tau > 0$, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
\frac{\tau}{m+1}\int_\Omega {u_m}^{m+1}(\tau) &\leq \frac{1}{m+1}\int_0^\tau\int_\Omega {u_m}^{m+1} = \int_0^\tau \phi_m(u_m(t))dt \\
&\leq \int_0^\tau \left(u_m(t), h_m(t) - u_m'(t)\right)_{H^{-1}} \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{H^{-1}} + \left(\|u_0\|_{H^{-1}} + \int_0^\tau \|h_m(t)\|_{H^{-1}}dt\right) \\
&\qquad \times \int_0^\tau \|h_m(t)\|_{H^{-1}}
\end{aligned}$$

donc,

$$\frac{\tau}{m+1}\int_\Omega {u_m}^{m+1}(\tau) \leq (1+\tau)C_2. \tag{13}$$

avec $C_2 = C_2(|\Omega|, \|u_0\|_\infty)$.
D'autre part, d'après (12) et le Théorème de Riesz-Ficher-Kolmogorov, $u_m(\tau)$ est relativement compact dans $L^1(\Omega)$. Si m_k est une suite extraite telle que $u_{m_k}(\tau) \to u(\tau)$, alors d'après (13) et le Lemme de Fatou on a $0 \leq u(\tau) \leq 1$. Donc, d'après la 1ère étape et compte tenu de la propriété de contraction dans $L^1(\Omega)$ de $S_m(t)$, on a

$$u_{m_k}(t) \to u(t) = S(t-\tau)u(\tau) \quad \text{dans } L^1(\Omega)$$
$$\text{uniformément pour } t \geq \tau \text{ borné.}$$

Par un procédé diagonal, on déduit que u_m est relativement compact dans $\mathcal{C}\left((0,\infty); L^1(\Omega)\right)$ et que si m_k est une suite extraite telle que $u_{m_k} \to u$ dans $\mathcal{C}\left((0,\infty); L^1(\Omega)\right)$, alors u est solution entropique de

$$\begin{cases} u_t + \mathrm{div}F(u(t)) = 0 & \text{sur} \quad (0,\infty)\times\Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad (0,\infty)\times\partial\Omega. \end{cases}$$

Il reste à démontrer la condition initiale $u(0) = \underline{u}_0$.

Pour cela, notons que pour $\tau > 0$, on a

$$\|u_m(t) - T_m(t)u_0\|_{H^{-1}} \leq \int_0^\tau \|h_m(t)\|_{H^{-1}} \leq C_1\tau.$$

Et alors,

$$\begin{aligned}
\|u(\tau) - \underline{u}_0\|_{H^{-1}} &= \lim_{m_k\to\infty} \|u_{m_k}(\tau) - \underline{u}_0\|_{H^{-1}} \\
&\leq C\tau + \lim_{m_k\to\infty} \|T_m(\tau)u_0 - \underline{u}_0\|_{H^{-1}} \quad = \quad C_1\tau.
\end{aligned}$$

Par conséquent, u est une solution entropique de (8), et par unicité de la solution entropique, on déduit que, lorsque $m \to \infty$, on a

$$u_m(t) \to S(t)\underline{u}_0 \quad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ uniformément pour } t \in [t_1, t_2]$$

pour tout $0 < t_1 < t_2 < \infty$.

■

3 Cas du problème de Cauchy sur $\mathbb{R}^N$

On se donne $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ continue et $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $u_0 \geq 0$. Pour simplifier, on suppose que F est localement lipchitzienne. On sait (cf. [16]) qu'il existe une unique solution entropique du problème de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} u_t + \operatorname{div} F(u) = 0 & \text{sur} \quad (0,\infty) \times \mathbb{R}^N = Q \\ u(0) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Il résulte aussi immédiatement de [10], que pour tout $m > 0$, il existe une unique solution du problème (PC_m).
Enfin, on sait que dans le cas $F \equiv 0$, l'unique solution v_m du problème de Cauchy

$$\begin{cases} v_t - \Delta v^m = 0 & \text{sur} \quad Q \\ v(0) = u_0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{14}$$

satisfait

$$v_m(t) \to \underline{u}_0 \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^N), \text{ lorsque } m \to \infty, \text{ pour tout } t > 0 \tag{15}$$

où $\underline{u}_0 = u_0 \chi_{[w=0]} + \chi_{[w>0]}$, w étant l'unique solution du problème

$$\begin{aligned} w \in H^2(\mathbb{R}^N),\ w \geq 0,\ 0 \leq \Delta w + u_0 \leq 1, \\ \text{et } w(\Delta w + u_0 - 1) = 0 \text{ p.p. } \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{16}$$

Théorème 2. *Lorsque $m \to \infty$, on a*

$$u_m(t) \to \underline{u}(t) \quad \textit{dans } L^1(\mathbb{R}^N), \textit{ pour tout } t > 0$$

où $\underline{u}$ est l'unique solution entropique de (PC) avec la donnée initiale $\underline{u}(0) = \underline{u}_0$.

Remarque. On a supposé F localement lipchitzienne, ce qui assure l'unicité d'une solution entropique de (PC). Le Théorème s'étend directement a tout flux continue F pour lequel il y a une telle unicité (cf. [1], [2], [7] et [18]).

Preuve. : Premièrement, notons qu'en utilisant la propriété de contraction dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ des semi-groupes associés à (PC_m) et (PC), on peut supposer que u_0 est à support compact. Alors (cf. [4]), $\underline{u}_0$ est aussi à support compact. Soit $r_0 > 0$ tel que $B(0, r_0)$ contienne les supports de u_0 et de $\underline{u}_0$. Notons u_m la solution de (PC_m).

Pour $\tau > 0$ fixée, on sait que

$$\|u_m(\tau)\|_1 \leq \|u_0\|_1$$

et

$$\|u_m(\tau, . + h) - u_m(\tau, .)\|_1 \leq \|u_0(. + h) - u_0(.)\|_1 \ ;$$

donc il existe une suite extraite m_k telle que

$$u_{m_k}(\tau) \to u(\tau) \quad \text{dans } L^1_{loc}(\Omega) \text{ lorsque } m_k \to \infty \tag{17}$$

avec $u(\tau) \in L^1(\Omega)$.
D'autre part, on sait que, pour tout $m \geq 1$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_m(\tau) = \int_{\mathbb{R}^N} u_0 = \int_{\mathbb{R}^N} \underline{u}_0 = \int_{\mathbb{R}^N} \underline{u}(\tau), \tag{18}$$

où $\underline{u}$ est, rappelons-le, la solution entropique de (PC) avec $\underline{u}(0) = \underline{u}_0$.
Il suffit donc de montrer que

$$\underline{u}(\tau) \leq u(\tau)$$

pour déduire que $u_m(\tau) \to \underline{u}(\tau)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.
Pour cela, on se restreint à la boule $B(0, r)$, avec $r > r_0$ et on considère la solution au sens de (2) du problème (PD_m) en prenant $\Omega = B(0, r)$. On note u_{mr} le prolongement par 0 de cette dernière sur $\mathbb{R}^N \setminus B(0, r)$.

Notons d'abord, que pour tout $m \geq 1$, on a

$$u_{rm}(\tau) \uparrow u_m(\tau), \text{ lorsque } r \uparrow \infty. \tag{19}$$

En effet, d'une part, on voit que $r \to u_{rm}$ est croissante, par exemple en approchant la fonction $\varphi(z) = |z|^m$ par des fonctions $\varphi_n \in \mathcal{C}^\infty$ avec $\varphi_n' > 0$ pour se ramener à des solutions classiques. D'autre part, $\lim_{r\to\infty} u_{rm}$ est solution de (PC_m) et donc égal à u_m, par unicité.

Ensuite, pour tout $r > r_0$, on appliquant le Théorème 1, on a

$$u_{rm}(\tau) \to \underline{u}_r(\tau) \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^N), \text{ lorsque } m \to \infty \tag{20}$$

où $\underline{u}_r$ est le prolongement par 0 sur $\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)$ de la solution entropique du problème (8), avec $\Omega = B(0,r)$ et $\underline{u}_r(0) = \underline{u}_0$ sur Ω.

L'application $r \to u_r$ est donc croissante et $\lim_{r\to\infty} u_r$ est une solution entropique de (PC) et donc, d'après l'unicité,

$$\underline{u}_r(\tau) \uparrow \underline{u}(\tau), \text{ lorsque } r \uparrow \infty.$$

Daprès (17), (19) et (20), $\underline{u}_r(\tau) = \lim_{k\to\infty} u_{rm_k}(\tau) \leq \lim_{k\to\infty} u_{m_k}(\tau) = u(\tau)$. Et donc, $\underline{u}(\tau) \leq u(\tau)$, ce qu'il fallait démontrer.

∎

References

[1] B. Andereianov, Ph. Bénilan and S.N. Kruzhkov,L^1 *Theory of scalar conservation law with continuous flux function*, (Preprint).

[2] Ph. Bénilan and S.N. Kruzhkov, *Quasilinear first-order equations with continuous nonlinearities*, Russian Acad. Sci. Dockl. Math.", 50 (3), 391-396, 1995.

[3] Ph. Bénilan, L. Boccardo and M. Herrero, *On the limit of solution of $u_t = \Delta u^m$ as $m \to \infty$*, In M. Bertch et. a., editor *In Some Topics in Nonlinaer PDE's*, Torino, 1989. Proceedings Int. Conf.

[4] Ph. Benilan, H. Brezis and M.G. Crandall, *A semilinear equation in L^1*, Ann. Scula. Norm. Sup. Pisa, 2, 523-555, 1975.

[5] Ph. Bénilan and N. Igbida, *Singular limit for perturbed nonlinear semigroup*, Comm. Applied Nonlinear Anal., 3 (4), 23-42, 1996.

[6] Ph. Bénilan and N. Igbida, *The mesa problem for Newmann boundary value problem*, (à paraître dans J. Func. Anal.).

[7] Ph. Bénilan, *Équation d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications*, Thesis, Orsay, 1972.

[8] H. Brezis, *Monotonicity methods in Hilbert space and some applications to nonlinear partial differential equations*, In E. Zarantonello, editor, Contribution to Nonlinear Functionnal Analysis, Acad. Press, 1971.

[9] L.A. Caffarelli and A. Friedman, *Asymptotic behavior of solution of* $u_t = \Delta u^m$ *as* $m \to \infty$, Indiana Univ. Math. J., pages 711-728, 1987.

[10] J. Carrillo, M. Maliki and H. Toure, *Entropy solutions for nonlinear degenetrate problems*, (en preparation).

[11] J. Carrillo, *Entropy solutions for nonlinear degenetrate problems*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I, 327 (2), 155-160, 1998.

[12] J. Carrillo, *Entropy solutions for nonlinear degenetrate problems*, Arch. Rational Mech. Anal., 147, 269-361, 1999.

[13] C.M. Elliot, M.A. Herrero, J.R. King and J.R. Ockendon, *The mesa patterns for* $u_t = \nabla(u^m \nabla u)$ *as* $m \to \infty$, IMA J.Appl. Math., 37, 147-154, 1986.

[14] G. Gagneux and M. Madaune-Tort, *Analyse mathématique de modèles non linéaires de l' ingénerie pétrolière*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York , 1996.

[15] N. Igbida, *Limite singulière de problèmes d'évolution non linéaires*, Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté", Juin 1997.

[16] S.N. Kruzhkov and E. Yu. Panov, *First-order quasilinear conservation laws with infinite initial data dependence area*, Dokl. Akad. Nauk URSS, 314, (1), 79-84, 1990. English tr. in Soviet Math. Dokl. 42 No.2,pp. 316-421 (1991).

[17] S.N. Kruzhkov, *Generelized solutions of the Cauchy problem in the large for nonlinear equations of first order*, Dok. Akad. Nauk SSSR, 187, (1), 29-32, (1969).

[18] S.N. Kruzhkov, *Result concerning the nature of the continuity of solutions of parabolic equations and some of their applications*, Mat. Zametki, 6 (1), 97 -108, 1969.

Recibido: 14 de Mayo de 1999
Revisado: 30 de Diciembre de 1999