

ALGEBRES DE LIE LIBRES ASSOCIEES A UN SYSTEME DE PFAFF

Amina OUAZZANI

Abstract

By using an invariant related to free Lie algebras, we give a criterion of non existence of isomorphism for the Pfaffian systems.

1 Introduction

Le but de ce travail est de mettre en évidence un critère pratique pour montrer la non isomorphie de certains systèmes de Pfaff. Comme application on montre que les deux systèmes de Pfaff

$$(S_1) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 + y_2 dy_3 \\ \omega_2 = dy_2 + y_4 dy_3 \\ \omega_3 = dy_3 + y_5 dy_4 \end{cases} \quad (S_2) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 + y_2 dy_3 \\ \omega_2 = dy_2 + y_4 dy_3 \\ \omega_3 = dy_4 + y_5 dy_3 \end{cases}$$

à cinq variables ne sont pas isomorphes. Cette propriété, qui avait échappée à Elie Cartan avait été relevée pour la première fois par Giaro, Kumpera et Ruiz ([4]). Nous l'appliquerons également à certains systèmes de Pfaff à six variables.

2 Définition de l'invariant : $g(S)$

2.1 Rappel

Soient (S) un système de Pfaff, $x \in \mathbb{R}^n$, U un ouvert contenant x et $\omega_1, \dots, \omega_r$ des formes de Pfaff définies sur U telles que le système (S) soit défini dans U par les équations

$$\omega_i = 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

1991 Mathematics Subject Classification: 53C12, 17BXX, 58A17.
Servicio de Publicaciones. Universidad Complutense. Madrid, 2000

3 Etude de la non isomorphie des systèmes (S_1) et (S_2)

Soit (S) un système de Pfaff défini dans $U \subset \mathbb{R}^5$ de rang 3, de classe 5 représenté par les formes $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ dont les dérivées extérieures vérifient

$$\begin{cases} d\omega_1 = 0 & \text{mod}(D^1(S)) \\ d\omega_2 = \omega_3 \wedge \omega_4 & \text{mod}(D^1(S)) \\ d\omega_3 = \omega_4 \wedge \omega_5 & \text{mod}(S) \end{cases}$$

Le premier système dérivé $D^1(S)$ étant supposé engendré par $\{\omega_1, \omega_2\}$. Les formes ω_4 et ω_5 sont des formes de Pfaff linéairement indépendantes de ω_1 , ω_2 et ω_3 .

Le deuxième système dérivé $D^2(S) = \{\omega_1\}$. Supposons dans ce cas $cl(D^2(S)) = 3$.

Proposition 3.1. ([3]) : *Tout système dans \mathbb{R}^5 vérifiant les conditions ci dessus est isomorphe à (S_1) ou (S_2)*

Proposition 3.2. *Les systèmes (S_1) et (S_2) ne sont pas localement isomorphes.*

Démonstration. Le noyau de (S_1) est engendré par les champs de vecteurs

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial y_5} \\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y_4} - y_5 \frac{\partial}{\partial y_3} + y_4 y_5 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_2 y_5 \frac{\partial}{\partial y_1} \end{cases}$$

tandis que celui défini par (S_2) est engendré par les champs de vecteurs

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial y_5} \\ Y_2 = \frac{\partial}{\partial y_3} - y_5 \frac{\partial}{\partial y_4} - y_4 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} \end{cases}$$

On a les relations suivantes :

$$[X_1, X_2] = -\frac{\partial}{\partial y_3} + y_4 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} = X_3$$

$$[X_2, X_3] = \frac{\partial}{\partial y_2} = X_4$$

$$[X_3, X_4] = -\frac{\partial}{\partial y_1} = X_5$$

$$[X_2, X_4] = -y_5 \frac{\partial}{\partial y_1} = y_5 X_5 = X_6$$

$$[X_1, X_6] = X_5$$

Les autres crochets non définis étant nuls; l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(S_1)(X_1, X_2)$ est une algèbre de dimension finie égale à 6. On a également

$$[X_1, Y_2] = -\frac{\partial}{\partial y_4} = Y_3$$

$$[Y_2, Y_3] = -\frac{\partial}{\partial y_2} = Y_4$$

$$[Y_2, Y_4] = -\frac{\partial}{\partial y_1} = Y_5$$

les autres crochets non définis étant nuls.

L'algèbre de Lie $\mathcal{L}(S_2)(X_1, Y_2)$ est de dimension 5. Ainsi $g(S_2) \leq 5$.

Montrons que $g(S_1) = 6$.

Lemme 3.3. *Pour tous champs $Z_1, Z_2 \in \text{Ker}(S_1)$ et indépendants en tout point, alors l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(S_1)(Z_1, Z_2)$ est de dimension supérieure à 6.*

Preuve. Posons

$$\begin{cases} Z_1 = f_1 X_1 + f_2 X_2 \\ Z_2 = f_3 X_1 + f_4 X_2 \end{cases} \quad \text{avec } g = f_1 f_4 - f_2 f_3 \neq 0 \text{ partout.}$$

On a :

$$\begin{aligned} [Z_1, Z_2] &= [f_1 X_1 + f_2 X_2, f_3 X_1 + f_4 X_2] \\ &= (f_1 X_1(f_3) - f_3 X_1(f_1) + f_2 X_2(f_3) - f_4 X_2(f_1)) X_1 \\ &\quad + (-f_3 X_1(f_2) + f_1 X_1(f_4) + f_2 X_2(f_4) - f_4 X_2(f_2)) X_2 \\ &\quad + (f_1 f_4 - f_2 f_3) [X_1, X_2] \end{aligned}$$

Ainsi $[Z_1, Z_2] = g_1 X_1 + g_2 X_2 + g X_3$ où $X_3 = [X_1, X_2]$. Posons $[Z_1, Z_2] = Z_3$.

Rappelons les crochets définissant l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(S_1)(X_1, X_2)$:

$$[X_1, X_2] = X_3, [X_2, X_3] = X_4, [X_3, X_4] = X_5, [X_2, X_4] = X_6.$$

On a les relations suivantes

$$[Z_1, Z_3] = h_1 X_1 + h_2 X_2 + h_3 X_3 + h X_4 \text{ avec } h = f_2 g. \text{ On pose } [Z_1, Z_3] = Z_4$$

De même en particulier

$$[Z_2, Z_3] = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha X_4 = Z_5 \text{ avec } \alpha = f_4 g$$

$$[Z_1, Z_4] = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta X_6 = Z_6 \text{ avec } \beta = f_2 h = f_2^2 g$$

$$[Z_3, Z_4] = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 + \lambda X_5 + \lambda_6 X_6 = Z_7 \text{ avec } \lambda = gh = f_2 g^2$$

$$[Z_2, Z_5] = \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2 + \delta_3 X_3 + \delta_4 X_4 + \delta X_6 = Z_8 \text{ avec } \delta = f_4 \alpha = f_4^2 g$$

$$[Z_3, Z_5] = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 + \mu_4 X_4 + \mu X_5 + \mu_6 X_6 = Z_9 \text{ avec } \mu = g \alpha = f_4 g^2$$

Comme $g = f_1 f_4 - f_2 f_3 \neq 0$, l'une des deux fonctions f_2 ou f_4 est non nulle. Supposons $f_2 \neq 0$, alors les fonctions h, β , et λ sont non nulles et du fait que le système $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$ est libre, on en déduit que les champs de vecteurs Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_6 , et Z_7 sont linéairement

indépendants dans $\mathcal{L}(S_1)(Z_1, Z_2)$. De même, si $f_4 \neq 0$, alors les fonctions α , δ et μ sont non nulles et $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_5, Z_8, Z_9\}$ est libre dans $\mathcal{L}(S_1)(Z_1, Z_2)$. Par conséquent dans les deux cas la dimension de $\mathcal{L}(S_1)(Z_1, Z_2)$ est supérieure à 6. Ainsi

$$g(S_1) = 6$$

et les systèmes (S_1) et (S_2) ne sont pas isomorphes.

Remarque. La non isomorphie des systèmes (S_1) et (S_2) avait été remarquée pour la première fois par Giaro ([4]). Cet oubli d'Elie Cartan peut surprendre de prime abord. Comme on constate assez facilement que les systèmes (S_1) et (S_2) sont projectivement équivalents, l'oubli de Cartan peut dans ce cadre, être volontaire.

Giaro, Kumpera et Ruiz démontrent leur résultat en étudiant la transitivité en l'origine des algèbres de Lie associées. La méthode présentée ici permet de mettre en évidence un invariant qui permet de conclure sur la non isomorphie de certains systèmes en dimension 6, alors que des propriétés de transitivité sont insuffisantes. On l'illustre dans le paragraphe suivant.

4 Etude de systèmes non isomorphes dans \mathbb{R}^6

Considérons un système $(S) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ de rang 4 à six variables dont les dérivées extérieures vérifient :

$$\begin{cases} d\omega_1 = 0 \\ d\omega_2 = 0 \\ d\omega_3 = 0 \\ d\omega_4 = \omega_5 \wedge \omega_6 \end{cases} \quad \text{mod}(S)$$

où ω_5 et ω_6 sont des formes de Pfaff telles que $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \wedge \omega_5 \wedge \omega_6 \neq 0$. Le système (S) est alors de classe 6, admettant un système dérivé $D^1(S) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ de rang 3. Supposons de plus que ce système dérivé satisfait au modèle différentiel

$$\begin{cases} d\omega_1 = 0 \\ d\omega_2 = 0 \\ d\omega_3 = \omega_4 \wedge \omega_5 \end{cases} \quad \text{mod}(D^1(S))$$

Le système de Pfaff $D^1(S)$ est donc de classe 5, et d'après la classification des systèmes de Pfaff à cinq variables ([2]), il est donc isomorphe à l'un des cinq systèmes

$$(S_5^7); (S_5^8); (S_5^9); (S_5^{10}); (S_5^{11})(F)$$

a) $D^1(S) = (S_5^7)$

D'après ([2]), (S) est isomorphe à

$$\begin{cases} \omega_1 = dy_1 \\ \omega_2 = dy_2 \\ \omega_3 = dy_3 + y_4 dy_5 \\ \omega_4 = dy_4 + y_6 dy_5 \end{cases}$$

b) $D^1(S) = (S_5^8)$

Il existe un système de coordonnées tel que

$$\{\omega_1 = dy_1; \omega_2 = dy_2 + y_3 dy_4; \omega_3 = dy_3 + y_5 dy_4\}$$

Comme $d\omega_3 = 0 \pmod{(S)}$, alors :

$$d\omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 = dy_5 \wedge dy_4 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \wedge \omega_4 = 0.$$

D'où $\omega_4 = a_1 dy_1 + a_2 dy_2 + a_3 dy_3 + a_4 dy_4 + a_5 dy_5$. Posons $\bar{\omega}_4 = \omega_4 - a_1 \omega_1 - a_2 \omega_2 - a_3 \omega_3$. En rebaptisant $\bar{\omega}_4$ par ω_4 , on en déduit $\omega_4 = a_4 dy_4 + a_5 dy_5$. Comme le rang de (S) est 4, l'une des deux fonctions a_4 ou a_5 est non identiquement nulle. Supposons que $a_4 \neq 0$, en divisant ω_4 par a_4 , on ramène l'écriture de ω_4 à $dy_4 + a_5 dy_5$. La relation $d\omega_4 \neq 0 \pmod{(S)}$ implique

$$d\omega_4 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 = da_5 \wedge dy_5 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \wedge dy_4 \neq 0.$$

On en déduit que $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, a_5\}$ est un système de coordonnées locales. On pose alors $a_5 = y_6$, et on se ramène au modèle $\omega_4 = dy_4 + y_6 dy_5$. Si $a_5 \neq 0$, en divisant ω_4 par a_5 et en utilisant $d\omega_4 \neq 0 \pmod{(S)}$, on trouve $\omega_4 = y_6 dy_4 + dy_5$. On obtient ainsi deux représentations de (S)

$$(S_3) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 \\ \omega_2 = dy_2 + y_3 dy_4 \\ \omega_3 = dy_3 + y_5 dy_4 \\ \omega_4 = dy_4 + y_6 dy_5 \end{cases} \quad (S_4) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 \\ \omega_2 = dy_2 + y_3 dy_4 \\ \omega_3 = dy_3 + y_5 dy_4 \\ \omega_4 = dy_5 + y_6 dy_4 \end{cases}$$

Proposition 4.1. *Les systèmes (S_3) et (S_4) ne sont pas localement isomorphes. }*

En restriction à l'hyperplan $y_1 = \text{constante}$, les systèmes (S_3) et (S_4) induisent des systèmes équivalents à (S_1) et (S_2) . D'où

$$g(S_3) = g(S_1) = 6 ; g(S_4) = g(S_2) \leq 5$$

et par conséquent (S_3) et (S_4) ne sont pas localement isomorphes.

c) $D^1(S) = (S_5^9)$.

On a

$$\{\omega_1 = dy_1 + y_2dy_3 ; \omega_2 = dy_2 + y_4dy_3 ; \omega_3 = dy_3 + y_5dy_4\}$$

Un calcul analogue au précédent nous ramène aux deux modèles :

$$(S_5) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 + y_2dy_3 \\ \omega_2 = dy_2 + y_4dy_3 \\ \omega_3 = dy_3 + y_5dy_4 \\ \omega_4 = dy_4 + y_6dy_5 \end{cases} \quad (S_6) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 + y_2dy_3 \\ \omega_2 = dy_2 + y_4dy_3 \\ \omega_3 = dy_3 + y_5dy_4 \\ \omega_4 = dy_5 + y_6dy_4 \end{cases}$$

Proposition 4.2. *Les deux systèmes (S_5) et (S_6) ne sont pas localement isomorphes.*

En effet, $\text{Ker}(S_6)$ est engendré par les champs :

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial y_6} \\ Y_2 = y_2y_5 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_4y_5 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_5 \frac{\partial}{\partial y_3} + \frac{\partial}{\partial y_4} - y_6 \frac{\partial}{\partial y_5} \end{cases}$$

On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} [X_1, Y_2] &= -\frac{\partial}{\partial y_5} = Y_3 \\ [Y_2, Y_3] &= y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_4 \frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial y_3} = Y_4 \\ [Y_2, Y_4] &= \frac{\partial}{\partial y_2} = Y_5 \\ [Y_4, Y_5] &= -\frac{\partial}{\partial y_1} = Y_6 \\ [Y_2, Y_5] &= -y_5 \frac{\partial}{\partial y_1} = y_5 Y_6 = Y_7 \\ [Y_2, Y_7] &= y_6 \frac{\partial}{\partial y_1} = Y_8 \\ [Y_3, Y_7] &= \frac{\partial}{\partial y_1} = -Y_6 \\ [X_1, Y_8] &= \frac{\partial}{\partial y_1} = -Y_6 \end{aligned}$$

Les autres crochets non définis étant nuls, ce qui montre que $g(S_6) \leq 8$.

De même $\text{Ker}(S_5)$ est engendré par :

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial y_6} \\ X_2 = -y_2 y_5 y_6 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_4 y_5 y_6 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_5 y_6 \frac{\partial}{\partial y_3} - y_6 \frac{\partial}{\partial y_4} + \frac{\partial}{\partial y_5} \end{cases}$$

On a :

$$[X_1, X_2] = -y_2 y_5 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_4 y_5 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_5 \frac{\partial}{\partial y_3} - \frac{\partial}{\partial y_4} = X_3$$

$$[X_2, X_3] = -y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_4 \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} = X_4$$

$$[X_3, X_4] = \frac{\partial}{\partial y_2} = X_5$$

$$[X_2, X_4] = y_6 \frac{\partial}{\partial y_2} = y_6 X_5 = X_6$$

$$[X_2, X_5] = y_5 y_6 \frac{\partial}{\partial y_1} = X_7$$

$$[X_3, X_5] = y_5 \frac{\partial}{\partial y_1} = X_8$$

$$[X_4, X_5] = \frac{\partial}{\partial y_1} = X_9$$

$$[X_1, X_6] = X_5$$

$$[X_2, X_6] = y_5 y_6^2 \frac{\partial}{\partial y_1} = X_{10}$$

$$[X_3, X_6] = X_7$$

$$[X_4, X_6] = y_6 \frac{\partial}{\partial y_1} = X_{11}$$

Lemme 4.3. $g(S_5) \geq 9$

Démonstration du lemme. Posons

$$\begin{cases} Z_1 = f_1 X_1 + f_2 X_2 \\ Z_2 = f_3 X_1 + f_4 X_2 \end{cases} \quad \text{avec } g = f_1 f_4 - f_2 f_3 \neq 0 \text{ partout.}$$

D'après un calcul précédent, on obtient

$$[Z_1, Z_2] = g_1 X_1 + g_2 X_2 + g X_3 = Z_3 \text{ avec } g \neq 0$$

$$[Z_1, Z_3] = h_1 X_1 + h_2 X_2 + h_3 X_3 + h X_4 = Z_4 \text{ avec } h = f_2 g$$

$$[Z_2, Z_3] = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha X_4 = Z_5 \text{ avec } \alpha = f_4 g$$

$$[Z_1, Z_4] = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta X_6 = Z_6 \text{ avec } \beta = f_2 h = f_2^2 g$$

$$[Z_3, Z_4] = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 + \lambda X_5 + \lambda_6 X_6 = Z_7 \text{ avec } \lambda = gh = f_2 g^2$$

$$[Z_2, Z_5] = \delta_1 X_1 + \delta_2 X_2 + \delta_3 X_3 + \delta_4 X_4 + \delta X_6 = Z_8 \text{ avec } \delta = f_4 \alpha = f_4^2 g$$

$$[Z_3, Z_5] = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 + \mu_4 X_4 + \mu X_5 + \mu_6 X_6 = Z_9 \text{ avec } \mu = g \alpha = f_4 g^2$$

$$[Z_1, Z_7] = \Theta_1 X_1 + \Theta_2 X_2 + \Theta_3 X_3 + \Theta_4 X_4 + \Theta_5 X_5 + \Theta_6 X_6 + \Theta X_7 + \Theta_{10} X_{10} = Z_{10} \text{ avec } \Theta = f_2 \lambda = f_2^2 g^2$$

$$[Z_2, Z_9] = \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 X_3 + \gamma_4 X_4 + \gamma_5 X_5 + \gamma_6 X_6 + \gamma X_7 + \gamma_{10} X_{10} = Z_{11}$$

avec $\gamma = f_4\mu = f_4^2g^2$

$$[Z_3, Z_7] = \eta_1X_1 + \eta_2X_2 + \eta_3X_3 + \eta_4X_4 + \eta_5X_5 + \eta_6X_6 + \eta_7X_7 + \eta X_8 + \eta_{10}X_{10} = Z_{12} \text{ avec } \underline{\eta = g\lambda = f_2g^3}$$

$$[Z_3, Z_9] = \xi_1X_1 + \xi_2X_2 + \xi_3X_3 + \xi_4X_4 + \xi_5X_5 + \xi_6X_6 + \xi_7X_7 + \xi X_8 + \xi_{10}X_{10} = Z_{13} \text{ avec } \underline{\xi = g\mu = f_4g^3}$$

$$[Z_4, Z_7] = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + a_5X_5 + a_6X_6 + a_7X_7 + a_8X_8 + aX_9 + a_{10}X_{10} + a_{11}X_{11} = Z_{14} \text{ avec } \underline{a = h\lambda = f_2^2g^3}$$

$$[Z_5, Z_9] = b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4 + b_5X_5 + b_6X_6 + b_7X_7 + b_8X_8 + bX_9 + b_{10}X_{10} + b_{11}X_{11} = Z_{15} \text{ avec } \underline{b = \alpha\mu = f_4^2g^3}$$

Comme $g \neq 0$, alors $f_2 \neq 0$ ou bien $f_4 \neq 0$.

Si $f_2 \neq 0$, le sous espace engendré par

$\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_6, Z_7, Z_{10}, Z_{12}, Z_{14}\} \subset \mathcal{L}(S_5)(Z_1, Z_2)$ est de dimension supérieure ou égale à 9.

Si $f_4 \neq 0$, le sous espace engendré par

$\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_5, Z_8, Z_9, Z_{11}, Z_{13}, Z_{15}\} \subset \mathcal{L}(S_5)(Z_1, Z_2)$ est aussi de dimension supérieure ou égale à 9.

Ainsi $g(S_5) \geq 9$. Comme $g(S_6) \leq 8$, on en déduit que les systèmes (S_5) et (S_6) ne peuvent être localement isomorphes.

d) $\underline{D^1(S) = (S_5^{10})}$

Soit

$$\{\omega_1 = dy_1 + y_2dy_3 ; \omega_2 = dy_2 + y_4dy_3 ; \omega_3 = dy_4 + y_5dy_3\}$$

En utilisant le même raisonnement que dans les deux cas précédents, on obtient les deux écritures de (S) :

$$(S_7) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 + y_2dy_3 \\ \omega_2 = dy_2 + y_4dy_3 \\ \omega_3 = dy_4 + y_5dy_3 \\ \omega_4 = dy_3 + y_6dy_5 \end{cases} \quad (S_8) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 + y_2dy_3 \\ \omega_2 = dy_2 + y_4dy_3 \\ \omega_3 = dy_4 + y_5dy_3 \\ \omega_4 = dy_5 + y_6dy_3 \end{cases}$$

Proposition 4.4. *Les systèmes (S_7) et (S_8) ne sont pas localement isomorphes.*

En effet, en faisant le même calcul que dans les cas précédents, on obtient

$$g(S_8) \leq 6 \text{ et } g(S_7) \geq 7$$

Remarque. L'étude en dimension 5 montre l'existence d'une infinité de modèles paramétrés par une fonction $F(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ s'écrivant

localement

$$(S_5^{11}(F)) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 + y_3 dy_4 \\ \omega_2 = dy_2 + F dy_4 \\ \omega_3 = dy_3 - y_5 dy_4 \end{cases}$$

l'étude du système (S) tel que $D^1(S) = (S_5^{11})(F)$ ne peut être conclue par le seul usage de $g(S)$.

References

- [1] J.M. Ancochea Bermúdez-M. Goze, *Classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension inférieure ou égale à 7*, Archiv der Math. Vol. 2(1989), 157-185.
- [2] A. Awane-M. Goze, *Systèmes de Pfaff et Systèmes symplectiques*, Preprint Mulhouse 1995.
- [3] E. Cartan, *Les systèmes de Pfaff à cinq variables*, Ann. Sci. Ec. Nor. Sup. 27(1910) 109-192.
- [4] A. Giaro, A.Kumpera and C. Ruiz. *Sur la lecture correcte d'un résultat d'Elie CARTAN*, [J]C.R. Acad. Sci., Paris, Ser. A287,241-244(1978).
- [5] A. Ouazzani, *Systèmes de Pfaff à six variables*, Preprint, Université de Casablanca.

Faculté des Sciences Ben M'sik
 Université Hassan II
 Département de mathématiques
 CASABLANCA (Maroc)

Recibido: 7 de Abril de 1999

Revisado: 5 de Noviembre de 1999