

## *Una estrategia didáctica para la enseñanza del álgebra lineal con el uso del sistema de cálculo algebraico DERIVE*

PEDRO ORTEGA PULIDO  
Universidad Autónoma de Madrid

### RESUMEN

El propósito de este trabajo ha sido analizar las características educativas de una estrategia didáctica que incorpora el uso del sistema de cálculo algebraico DERIVE en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal. La estrategia didáctica empleada se ha basado en la introducción del sistema de cálculo algebraico en el aula utilizando una metodología experimental y por descubrimiento, con el fin de que los alumnos adquieran un aprendizaje significativo y relacional con ayuda de las capacidades que brinda el SCA (sistema de cálculo algebraico) y las posibilidades que ofrece el entorno computacional para el aprendizaje colaborativo. En esta estrategia se ha incorporado la resolución de problemas con la finalidad de profundizar en los contenidos matemáticos introducidos previamente. También se han utilizado las páginas web y el correo electrónico como herramientas adicionales. Para analizar el comportamiento de esta estrategia en la práctica educativa se ha realizado un análisis cualitativo y cuantitativo sobre un grupo de alumnos de primer curso de universidad a lo largo de un cuatrimestre académico. Este análisis nos ha permitido estudiar las características educativas que ofrece DERIVE en el contexto de nuestra estrategia didáctica: i) ofrece un sistema de notación intermedio para la enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal, ii) favorece la interactividad entre alumnos y entre alumnos y profesor, iii) potencia el protagonismo del alumno, iv) permite que el alumno reconozca los contenidos esenciales del álgebra lineal y, además, v) facilita la simplificación de numerosos cálculos rutinarios. Estas características favorecen y proporcionan situaciones de enseñanza que conducen a un aprendizaje significativo por descubrimiento y activo, estimulando el uso de varias estrategias de resolución de problemas así como un aprendizaje colaborativo que favorece la atención a la diversidad.

**ABSTRACT**

The purpose of this work is to analyze the educational features of a didactical strategy to introduce the use of the computer algebra system DERIVE into the learning and teaching of linear algebra. The didactical strategy applied is based on the introduction of DERIVE in the classroom by means of a hands on discovery methodology. The goal is that the students acquire a significative learning relation through an experimental and discovery methodology and that they perceive the power of this tool and the possibilities that it opens for a collaborative learning process. The use of web pages and e-mail communication were also introduced as additional tools. The didactical strategy has been explored by means of a through qualitative and quantitative analysis of the performance of several groups of students in their first year at the university during a period of four months. Through this analysis we have been able to assess many of the didactical possibilities of DERIVE. The study shows among other results that: i) DERIVE offers a useful and interesting intermediate notation system for the teaching and learning of linear algebra; ii) it fosters the interactivity between students and also with their teachers; iii) it enhances the role of the student as promoter of his/her own learning; iv) it favours the familiarity of the students with the most important contents of linear algebra; and v) it allows the students to perform with easy many routinary computations. These features facilitate a set of teaching situations that open the way towards an active and significative learning through discovery. They also foster the use of different problem solving strategies of collaborative learning favouring the attention to diversity.

**RÉSUMÉ**

L'object de ce travail, a été d'analyser les caractéristiques éducatives d'une stratégie didactique qui introduit l'utilisation du système de calcul algébrique DERIVE dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire. La stratégie didactique employée se base sur l'incorporation du système de calcul algébrique (SCA) dans la classe en utilisant une méthodologie expérimentale et pour la découverte, dans le but que les élèves acquièrent un apprentissage significatif et en relation avec l'aide des capacités qu'offre le SCA et les possibilités qu'apportent le contexte des ordinateurs pour l'apprentissage collaboratif. Dans cette stratégie, était introduit la résolution de problèmes dans le but d'approfondir les contenus mathématiques introduits précédemment. Elle était aussi utilisée comme outil additionnel dans l'utilisation des pages WEB et du courrier électronique. L'analyse comportemental de cette stratégie était réalisée grâce à une analyse qualitative et quantitative sur un groupe d'élèves de première année d'université pendant une période de quatre mois académiques. Avec cette analyse nous avons prouvé que DERIVE comporte de nombreuses caractéristiques éducatives: offrir un système de notation intermédiaire pour l'enseignement/apprentissage de l'algèbre linéaire, permettre que l'élève reconnaisse le contenu essentiel de l'algèbre linéaire et permettre de réaliser de nombreuses calculs routiniers. Ces caractéristiques favorisent et fournissent des situa-

tions d'enseignement qui conduisent a un apprentissage significatif pour la découverte, qui stimulent l'utilisations de nombreuses stratégies de résolution de problèmes et un apprentissage collaboratif qui favorise l'attention à la diversité.

**Palabras clave:** sistemas de cálculo algebraico, aprendizaje significativo, aprendizaje colaborativo, metodología experimental, aprendizaje por descubrimiento, resolución de problemas.

## 1. Introducción

La aparición de los ordenadores en la segunda mitad del siglo XX ha provocado una auténtica revolución tecnológica en numerosos aspectos de nuestra cultura. La enseñanza de las Matemáticas no ha quedado ajena a esta influencia, prueba de ello son los numerosos programas informáticos que se han venido utilizando para mejorar tanto los procesos de enseñanza y aprendizaje como la investigación en este área de conocimiento. Desde los primeros paquetes informáticos utilizados en los grandes ordenadores, pasando por los tutoriales, los juegos de ordenador y los lenguajes de programación [Kaput, 1992], el uso de estas nuevas tecnologías ha tenido como objetivo educativo fundamental aprovechar las ventajas que ofrece el medio computacional para facilitar la exploración, el cálculo, la experimentación, la resolución de problemas y la modelización matemática. Aunque algunos matemáticos han considerado que el uso de los ordenadores en la enseñanza de las Matemáticas es claramente nocivo [Truesdell, 1984], sin embargo, para otros la utilización de estos recursos informáticos puede ser muy beneficiosa para la enseñanza si se tienen en cuenta los peligros y las ventajas que se derivan de la utilización de estas herramientas tecnológicas [Guzmán, 1992], [Halmos, 1991], [García, 1999], [Roanes, 1991], opinión que compartimos plenamente, como se pone de manifiesto a lo largo de este trabajo.

Los programas más utilizados en la actualidad para la enseñanza de las Matemáticas se encuadran dentro de los denominados sistemas de cálculo algebraico (SCA). Las posibilidades simbólicas, numéricas y gráficas que ofrecen este tipo de programas están provocando numerosos cambios en la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina [Leinbach, 1991], [Llorens, 1993], [Landay, 1999], [Salter-Gilligan, 1991], [Kutzler, 1999], [García y otros, 1994], [Guzmán, 2001], [Hodgson-Muller, 1992], [Roanes, 1991], [Ortega-Sanz-Vázquez, 1998]. Estos cambios giran en torno a dos aspectos básicos de la enseñanza de las Matemáticas: ¿qué destrezas básicas se deberían enseñar en el aula? y ¿cuál sería la forma más adecuada de enseñarlas? Para incorporar un SCA en el aula

de Matemáticas es necesario diseñar un planteamiento metodológico que evite los peligros asociados al uso de este tipo de sistemas, tales como la pérdida del sentido crítico y la confusión entre manipulación matemática y conocimiento matemático [García, 1999], [Guzmán, 1992], [Halmos, 1991], y facilite un aprendizaje experimental que ayude al alumno a progresar en niveles superiores del pensamiento formal, evitando de esta forma numerosos cálculos rutinarios inútiles [Guzmán, 1992].

El objetivo de nuestra investigación ha consistido en analizar la influencia que ejercen los SCA en la enseñanza del álgebra lineal. Para ello definimos una estrategia didáctica que incorporaba el uso del SCA DERIVE en el aula de álgebra lineal, analizando las características que ofrecía dicha estrategia en la práctica educativa. Por este motivo en el segundo apartado de este trabajo mostramos el diseño formal de esta estrategia didáctica, describiendo los principios metodológicos que la fundamentan. En el tercer apartado presentamos el diseño de la investigación educativa que utilizamos para analizar la práctica educativa que nos ha proporcionado dicha estrategia. En el cuarto apartado describimos, de forma general, el desarrollo de la experiencia educativa que realizamos. En el quinto apartado analizamos los datos obtenidos en esta investigación educativa y, finalmente, en el apartado sexto mostramos las conclusiones de la investigación.

## 2. Una estrategia didáctica para la enseñanza del álgebra lineal

Para diseñar una estrategia didáctica que incorpore un sistema de cálculo algebraico en el aula de álgebra lineal es necesario describir previamente algunas de las ventajas educativas que nos proporcionan estos sistemas. Algunas de dichas ventajas son las siguientes:

- Los SCA facilitan la manipulación de *múltiples sistemas de representación*, característica que puede permitir que los alumnos adquieran una visión de los objetos matemáticos como INVARIANTES de sus múltiples representaciones [Kapur, 1992]. Esta visión del concepto matemático les puede proporcionar una visión más global y completa del objeto algebraico que están manipulando y que, por otro lado, puede reducir la denominada «barrera del formalismo», dificultad muy ligada a las manipulaciones simbólicas del álgebra lineal [Sierspinski-Dreyfus-Hillel, 1999].
- El uso de los SCA en el aula permite *prescindir del esfuerzo rutinario de cálculo* [Guzmán, 1992].

- Los SCA pueden favorecer la *adquisición de conceptos y relaciones por medio de la experimentación*.
- Estos sistemas pueden *favorecer el protagonismo del alumno*, ya que el uso de un SCA reduce los cálculos y permite que el alumno oriente su esfuerzo hacia la exploración y experimentación de los hechos y principios que se van introduciendo.
- El manejo de un SCA ofrece una nueva *dialéctica de colaboración* entre los alumnos y entre alumnos y profesor, favoreciendo la aparición de contextos que conducen hacia el denominado aprendizaje colaborativo [Crook, 1999].

Estas características propias de los sistemas de cálculo algebraico nos han servido de base para definir los cinco principios metodológicos que perfilan nuestra estrategia:

- 1) El primer principio sobre el que se basa nuestra estrategia es el que define el tipo de metodología empleada: *la construcción del conocimiento matemático por medio de la exploración y la experimentación*. Este principio subyacente en el quehacer matemático nos ha servido de fundamento para perfilar el tipo de metodología que hemos empleado: una metodología basada en la adquisición de aprendizajes por medio de la experimentación, la exploración y la observación del alumno en base a unos conocimientos previos, es el denominado aprendizaje significativo [Ausubel-Novak-Hanessian, 1987] o relacional [Skemp, 1989]. Los SCA pueden facilitar el desarrollo de una metodología de estas características, ya que estos sistemas permiten manipular múltiples sistemas de representación y además poseen una gran rapidez de cálculo, circunstancias que pueden propiciar un aprendizaje significativo a partir de la exploración y la experimentación.
- 2) Si bien en un primer estadio educativo el primer principio metodológico es el que sirve de soporte inicial para la adquisición del conocimiento, en un segundo estadio resulta necesario asentar e interrelacionar los contenidos adquiridos de una manera global. Para ello *introducimos la resolución de problemas como núcleo de profundización de los conceptos matemáticos* que se iban introduciendo. De esta forma los contenidos adquiridos inicialmente de forma experimental se podrían asimilar y transferir en la resolución de situaciones problemáticas globales [Bautista, 1987] utilizando para ello diversas estrategias de resolución de problemas [Guzmán, 2001].

- 3) De esta forma el SCA se convertía en un elemento primordial tanto para el uso de una metodología experimental como para la resolución de problemas. El protagonismo que adquiriría de esta manera el SCA nos obligó a determinar la forma de utilizar e incorporar el sistema de cálculo algebraico dentro del aula. Actualmente los SCA se han incorporado en el aula de Matemáticas de diferentes formas: como medio de presentación de conceptos, mediante laboratorios de Matemáticas [Auer-Muller, 1990], [García y otros, 1994], [Benítez y otros, 1996], [Llorens, 1993], [Watkins, 1992], [Child-Leinbach, 1990], como calculadora simbólica o como herramienta incorporada a un sistema de enseñanza asistida por ordenador. De todas estas formas de uso, consideramos que la que más se adaptaba a nuestros principios metodológicos era la introducción del SCA como una calculadora simbólica a la que tenían acceso todos los alumnos dentro del aula. De esta forma *la incorporación plena del SCA en el aula como calculadora simbólica* se configura como el tercer principio metodológico interrelacionado con los restantes.
- 4) Teniendo en cuenta que los ordenadores favorecen la aparición de contextos de *aprendizaje colaborativo* [Crook, 1999], consideramos que este tipo de aprendizaje podría favorecer los procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal, ya que el uso de un SCA incorporaba un nuevo elemento de comunicación que podría reforzar esa faceta social del aprendizaje. Este canal de comunicación entre ordenadores, alumnos y profesor podría potenciar las colaboraciones entre los alumnos, suscitando la necesidad de construir un conocimiento compartido con la ayuda y estímulo de la nueva herramienta tecnológica. Por todo ello consideramos que el aprendizaje colaborativo constituía el cuarto principio para nuestra estrategia.
- 5) Por último, el quinto aspecto que incluimos en nuestra estrategia fue *el uso de páginas web y del correo electrónico para facilitar a los alumnos la información* relacionada con los contenidos y actividades del curso a desarrollar. Aunque existen cursos interactivos de álgebra lineal por Internet que integran el manejo de programas de cálculo simbólico, consideramos que las páginas web no eran el elemento central de nuestra estrategia, tan sólo una herramienta auxiliar que facilitaría probablemente la enseñanza-aprendizaje de los contenidos de álgebra lineal, proporcionando a los alumnos la documentación necesaria para complementar el estudio de la asignatura. El uso del correo electrónico facilitaría una resolución fluida de las dudas de los alumnos.

Para concretar estos principios metodológicos tuvimos que elegir en primer lugar el SCA que emplearíamos y en segundo lugar diseñar, sobre el sistema escogido, el conjunto de tareas de enseñanza o actividades que concretasen nuestra estrategia didáctica. Para la elección del sistema de cálculo algebraico utilizamos tres criterios básicos: la sencillez de manejo, la facilidad de aprendizaje y la potencia de cálculo del sistema. Estos criterios motivaron la elección del SCA DERIVE [DERIVE, 1990] ya que, a nuestro juicio, era el SCA que mejor se ajustaba a los mismos.

Una vez elegido el programa, teniendo en cuenta el carácter experimental y constructivista de nuestra metodología, y con el fin de concretar las tareas de enseñanza que definían nuestra estrategia, nos vimos obligados a determinar los conocimientos previos o «no esenciales» sobre los que podríamos usar el programa DERIVE sin ninguna restricción. Esta circunstancia nos obligó a clasificar previamente los contenidos matemáticos que iríamos introduciendo a lo largo de las unidades didácticas en dos tipos de contenidos: CONTENIDOS ESENCIALES y CONTENIDOS NO ESENCIALES [Murakami-Hata, 1997]. Los contenidos esenciales, serían aquellos que no podrían manipularse por medio del SCA en el momento de ser introducidos, ya que eran esenciales e irremplazables por un proceso de cálculo automático. Por otro lado los contenidos no esenciales serían aquellos contenidos de carácter manipulativo supuestamente conocidos previamente por el alumno y que no eran esenciales para comprender los contenidos básicos o esenciales. A partir de esta clasificación previa de los contenidos, y teniendo en cuenta los principios metodológicos de nuestra estrategia, elaboramos una programación didáctica de cada una de las unidades temáticas del curso, de tal forma que, además de definir los objetivos de cada unidad y clasificar en cada unidad los contenidos en esenciales y no esenciales, concretamos la metodología propuesta por nuestra estrategia utilizando cuatro tipos de tareas de enseñanza:

1. *Actividades de introducción teórico-prácticas:* Si nuestro objetivo era introducir un contenido «A», se proponían actividades en las que se podría manipular DERIVE, de tal forma que los procesos de cálculo que manejasemos constituirían los contenidos «B» no esenciales para la comprensión del contenido «A», que permitirían al alumno explorar e indagar sobre los elementos centrales que perfilaban ese contenido.
2. *Ejercicios de manipulación:* Actividades destinadas a proporcionar a los alumnos la habilidad necesaria para manejar en DERIVE los contenidos NO ESENCIALES que se estaban manipulando, favoreciendo la consolidación de los procesos y de las estrategias que se consideraban básicas. La realización de este tipo de ejercicios se podría efectuar en

- grupo, proporcionando así un «aprendizaje entre iguales» y propiciando situaciones de colaboración.
3. *Problemas fin de capítulo*: Colección de problemas planteados al final de cada unidad didáctica con el fin de que los alumnos fuesen capaces de asimilar y transferir sobre situaciones problemáticas de carácter general y de contenido económico, los contenidos esenciales.
  4. *Cuestiones teóricas fin de capítulo*: Conjunto de cuestiones teóricas de tipo test y de respuesta múltiple propuestas para que los alumnos fuesen capaces de interrelacionar los contenidos y procesos del álgebra lineal en los que, el uso del programa DERIVE, no era fundamental para su resolución. Este tipo de cuestiones pretendían profundizar más que en la operativa, en los razonamientos teóricos necesarios para dar respuesta a cada cuestión. Con estas cuestiones se pretendía que el alumno fuese capaz de determinar la verdad o falsedad de un razonamiento a partir de unas premisas iniciales.

Una vez perfilados los principios metodológicos y el tipo de actividades que concretaban estos principios se hacía necesario analizar el comportamiento de esta estrategia didáctica en la práctica educativa, es decir, obtener las características educativas de una estrategia didáctica que incorporaba el uso del SCA DERIVE en el aula. La investigación se basó en la asignatura «Matemáticas II», asignatura troncal de la Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas de la Universidad Autónoma de Madrid. Los contenidos de esta asignatura proporcionan a los alumnos de primer curso de universidad un conocimiento básico de álgebra lineal: espacios vectoriales, matrices y aplicaciones lineales, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, autovalores y autovectores, diagonalización de matrices, formas cuadráticas, funciones cóncavas y convexas y programación lineal. La descripción acerca de la forma de utilizar DERIVE en el aula se realizó de forma detallada en la programación didáctica de cada una de las unidades que componían el curso. Además elaboramos unos ficheros de DERIVE que constituían lo que denominamos GUIONES-TEÓRICOS, en los que se proponían actividades de introducción y algunos ejercicios de manipulación que los alumnos realizaban en otros ficheros denominados HOJAS DE TRABAJO. De forma adicional se elaboró una página web para los alumnos del curso: <http://www.uam.es/pedro.ortega>. En esta página los alumnos tenían acceso a dos bloques de información: un primer bloque que contenía el desarrollo de las exposiciones didácticas realizadas en clase distribuidas en capítulos y apartados, y un segundo bloque que contenía los ejercicios de manipulación propuestos, los problemas propuestos y las cuestiones teóricas resueltas.



### 3. Diseño de la investigación educativa

Para analizar el comportamiento de nuestra estrategia didáctica en la práctica educativa era necesario diseñar un modelo de investigación. Este diseño nos permitiría obtener los detalles que definían las características educativas de dicha estrategia. El primer aspecto que tuvimos que definir en nuestro diseño fue la finalidad de nuestra investigación educativa, que consistió en:

*Analizar la influencia que ejercen los programas de cálculo simbólico en el aprendizaje del álgebra lineal, mediante el estudio detallado de nuestra estrategia didáctica que incorpora totalmente el uso del programa DERIVE en la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina.*

Esta finalidad general se concretó en torno a varias cuestiones que nos permitirían analizar el comportamiento de la estrategia didáctica en la práctica educativa. Las cuestiones que planteamos en la investigación fueron las siguientes:

- 1) Determinar si el SCA DERIVE permite construir un SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO entre los sistemas de notación formales del álgebra lineal y sistemas de notación más familiares e intuitivos para el alumno.
- 2) Analizar el grado de INTERACTIVIDAD que suscita esta estrategia entre los alumnos y el profesor entre los propios alumnos y entre los alumnos y el programa informático.
- 3) Estudiar si la estrategia didáctica favorece el PROTAGONISMO y la CREATIVIDAD del alumno frente al medio tecnológico, evitando así que el alumno sea un mero usuario del sistema, es decir, analizar si la estrategia favorece la iniciativa y la creatividad del alumno para investigar y resolver problemas.
- 4) Determinar si las pautas de uso que establece nuestra estrategia evitan que el ordenador se utilice como una mera herramienta de cálculo, evitando un tratamiento automático de los contenidos que consideramos ESENCIALES y facilitando de esta forma una utilización correcta del programa, ya que tan sólo se propicia un uso automático del programa en aquellas rutinas algebraicas que constituyen los CONTENIDOS NO ESENCIALES del temario.
- 5) Analizar si el programa DERIVE permite prescindir del ESFUERZO RUTINARIO que se utiliza habitualmente para desarrollar operaciones algebraicas.

- 6) Estudiar si las formas de uso que se proponen en nuestra estrategia para utilizar DERIVE convierten el sistema en una auténtica HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN.
- 7) Comprobar si nuestra estrategia didáctica ha facilitado a los alumnos la adquisición de un APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO de los contenidos del álgebra lineal que íbamos introduciendo.
- 8) Determinar si el tipo de manipulación que desarrollamos con DERIVE favorece el uso de diferentes ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.
- 9) Analizar si el manejo de este programa ha generado BARRERAS ADICIONALES de carácter manipulativo. para el aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal.
- 10) Estudiar si este tipo de estrategia ha generado AUTONOMÍA COGNITIVA en los alumnos, permitiéndoles e incitándoles a indagar de forma autónoma ciertas situaciones, anulando de esta forma las dependencias que suelen existir entre los alumnos y el profesor u otros expertos.
- 11) Comprobar si la estrategia didáctica ha favorecido la RELACIÓN DIALÉCTICA entre los alumnos y entre alumnos y profesor.
- 12) Determinar si nuestra estrategia didáctica favorece un APRENDIZAJE COLABORATIVO entre los alumnos.
- 13) Estudiar si la estrategia didáctica ha permitido una adecuada ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD, ofreciendo la posibilidad de diseñar actividades con diferentes niveles y ritmos de aprendizaje.
- 14) Analizar el grado de MOTIVACIÓN que suscita esta estrategia entre los alumnos frente a los contenidos del álgebra lineal.

La naturaleza de la finalidad objeto de nuestro estudio así como las cuestiones que hemos formulado nos han obligado a realizar una recogida y elaboración de datos de carácter mixto cualitativo y cuantitativo. La dimensión cualitativa de esta investigación ha pretendido dar respuesta a las cuestiones iniciales que eran de naturaleza interna a los sujetos y que requerían una interpretación adecuada de los mismos. Los datos recogidos para este análisis cualitativo nos han permitido ir generando de forma inductiva una serie de categorías que posteriormente han perfilado las conclusiones de nuestra investigación de una manera inductiva. Se ha tratado por tanto de un proceso de investigación cualitativo de carácter constructivo [Goetz-LeCompte, 1988]. La dimensión cuantitativa nos ha servido para dar respuesta a los aspectos instructivos de los procesos de enseñanza desencadenados, permitiendo confrontar cuantitativamente los resultados de rendimiento académico obtenidos.

Esta investigación educativa fue realizada sobre un grupo de 153 alumnos que cursaron la asignatura «Matemáticas II» en el primer curso de la Licenciatura de Administración y Dirección de Empresas de la Universidad Autónoma de Madrid durante el curso 1999-2000. Con el objeto de analizar las bondades de nuestra estrategia didáctica y obtener además una comparativa entre dicha estrategia y una estrategia didáctica convencional de carácter expositivo, dividimos este grupo de alumnos en dos subgrupos:

- Un primer subgrupo que denominamos «subgrupo A», en el que utilizamos una metodología basada en nuestra estrategia didáctica, incorporando el programa de cálculo simbólico DERIVE y dirigida por los principios metodológicos que hemos expuesto en el apartado anterior.
- Un segundo subgrupo que denominamos «subgrupo B», en el que empleamos una metodología clásica de carácter expositiva, sin el uso del SCA DERIVE.

Esta división del grupo principal en dos subgrupos se realizó el primer día de clase a través de una encuesta, en la que los alumnos mostraron su elección y su preferencia por una u otra metodología. Aunque inicialmente planteamos varios requisitos previos para poder formar parte del «subgrupo A» de carácter experimental, sin embargo la clasificación de los alumnos se redujo a dos criterios: la voluntariedad del alumno para desarrollar toda la asignatura siguiendo la metodología y evaluación propuestos para este subgrupo y la obligatoriedad de asistencia a las clases del «subgrupo A». Este primer subgrupo que utilizó la estrategia didáctica con DERIVE se formó con 16 alumnos y el «subgrupo B» con 137 alumnos. Para eliminar posibles sesgos en la variable profesorado, el profesor que impartió ambos subgrupos fue el mismo, coincidiendo además con la figura del investigador que, por consiguiente, asumió un rol de observador participante.

A partir de este desdoblamiento del grupo principal, pudimos obtener datos de carácter CUANTITATIVO que nos permitieron contrastar los resultados obtenidos en ambos subgrupos sobre dos aspectos: un primer aspecto centrado en una comparativa de las características generales de ambas estrategias y un segundo aspecto a través de la comparación cuantitativa de las calificaciones finales obtenidas por los alumnos en ambos subgrupos. La dimensión CUALITATIVA de la investigación se basó en un ESTUDIO DE CASOS MÚLTIPLES [Gil-Rodríguez, 1993] centrado en el «subgrupo A» con el fin de obtener datos que nos permitieran analizar el comportamiento de la estrategia didáctica en este subgrupo.

Las herramientas y estrategias de recogida de datos que utilizamos en la investigación podemos clasificarlas en dos bloques:

- a) Un grupo de pruebas de las que se obtuvieron datos relacionados exclusivamente con los contenidos de álgebra lineal. Dentro de este bloque se encuadra el conjunto de pruebas objetivas que se propusieron a los alumnos para analizar su grado de comprensión y evolución en los diferentes contenidos del curso. Las pruebas que se realizaron dentro de este conjunto de datos fueron: hojas de problemas propuestos, cuestiones propuestas y examen final.
- b) El segundo bloque de recogida de datos tenía un carácter general y estaba basado en algunos indicadores de carácter externo tales como la motivación del alumnado, el interés suscitado por la estrategia, el tipo de relaciones dialécticas... Las herramientas de recogida de datos que se propusieron en este segundo grupo de datos fueron las siguientes:
  - Una encuesta inicial que se realizó al principio de curso para seleccionar los subgrupos y obtener datos generales de los alumnos.
  - Una entrevista inicial, realizada sobre los alumnos del «subgrupo A» para obtener datos relacionados con las actitudes personales de los alumnos frente al álgebra lineal, a los ordenadores, al trabajo en grupo, sobre sus conocimientos iniciales en Matemáticas y las expectativas del curso.
  - Un diario de campo, realizado por el investigador, en el que se anotaron diariamente las incidencias y observaciones realizadas sobre los alumnos del «subgrupo A» que pudieran aportar alguna información respecto a las diferentes cuestiones de la investigación.
  - Una entrevista intermedia, realizada a cada uno de los alumnos de «subgrupo A» a mitad de curso, para obtener nuevamente información referente a las opiniones de los alumnos y otros aspectos que pudieran contestar a cada una de las cuestiones.
  - Una entrevista final realizada nuevamente sobre cada uno de los alumnos del «subgrupo A», efectuada después del examen final con el fin de verificar los datos que se habían ido obteniendo.
  - Una entrevista realizada a la observadora cualificada (observadora externa) que presenció todas las sesiones del «subgrupo A», para contrastar los datos que se fueron obteniendo relacionados con las cuestiones de la investigación.

Todos estos datos se fueron analizando a medida que iba avanzando el curso, construyendo sobre cada una de las cuestiones una serie de categorías que sirvieron de base para elaborar las conclusiones de la investigación.

#### 4. Descripción general del desarrollo de la experiencia educativa

La primera toma de contacto con los alumnos tuvo lugar el primer día de clase, momento en el que se expusieron las dos estrategias didácticas para que los alumnos eligiesen una de ellas. Los datos se recogieron a través de una encuesta inicial cuyo resumen puede concretarse en la siguiente tabla:

<i>ENCUESTA INICIAL</i> <i>(porcentajes realizados sobre los alumnos que realizaron la encuesta en ambos subgrupos)</i>	<i>Subgrupo A</i>	<i>Subgrupo B</i>
Alumnos MATRICULADOS (% del total)	16 (10,45%)	137 (89,55%)
Tamaño total ALUMNOS QUE ASISTEN a la primera clase y realizan la encuesta (% de los que asisten)	16 (20,5%)	62 (79,5%)
Alumnos que cursan por primera vez la asignatura / Repiten	14 / 2	56 / 2
Alumnos / Alumnas (% sobre cada subgrupo de los que asisten)	12 (75%) / 4 (25%)	32 (52%) / 30 (40%)
Calificación media acceso a la Universidad	6,73	6,93
Calificación media en Matemáticas durante los cursos anteriores	6,96	6,69
Actitud positiva ante las Matemáticas	13 (81%)	56 (90%)
Conocimientos en Informática	16 (100%)	40 (64%)

Las dos primeras sesiones del «subgrupo A» se emplearon para introducir a los alumnos en el programa DERIVE y en el manejo de la página web diseñada especialmente para el curso. A las dos semanas de curso realizamos una entrevista inicial a cada uno de los alumnos del «subgrupo A», obteniendo de ella datos muy positivos relacionados con el curso tales como la motivación y el interés de los alumnos, aunque existían ciertos temores por el uso del pro-

grama y el tipo de evaluación. A mitad de curso se realizó nuevamente otra entrevista a cada uno de los participantes de este «subgrupo A», y con los datos obtenidos se fueron perfilando diferentes aspectos de las cuestiones iniciales de la investigación. A medida que se iba terminando cada unidad proponíamos a los alumnos una hoja de problemas y una colección de cuestiones teóricas. Con los datos obtenidos en estas pruebas se observó una participación muy activa por parte de los alumnos y alguna deficiencia en la resolución de situaciones problemáticas ocasionadas fundamentalmente por la falta de práctica del alumnado en la resolución de este tipo de problemas. Sin embargo, estas deficiencias fueron disminuyendo a lo largo del curso a medida que el alumno se fue familiarizando con la metodología y con el programa. De forma simultánea el investigador fue anotando observaciones sobre diferentes aspectos de la experiencia relacionados con la asistencia de los alumnos, el tipo de dudas que se planteaban, las actitudes que tenía el alumnado y la motivación.

Al finalizar el curso se realizó un examen final, que constó de dos partes: una primera parte de cuestiones teóricas similares a la realizadas en clase (igual en ambos subgrupos), y una parte práctica compuesta por varios problemas. En la parte práctica del examen el «subgrupo A» tuvo problemas más complejos que el «subgrupo B», ya que se permitió el uso del programa DERIVE en el examen. Una vez terminada la evaluación de todos los alumnos, realizamos una última entrevista con cada uno de los alumnos del «subgrupo A» y con una observadora cualificada con el fin de verificar y contrastar finalmente las conclusiones a las que habíamos ido llegando de forma inductiva a lo largo de toda la investigación.

## **5. Análisis de los datos obtenidos en la experiencia educativa**

El proceso de análisis de datos que realizamos sobre el «subgrupo A» constó de dos tipos: un análisis vertical y un análisis horizontal o longitudinal.

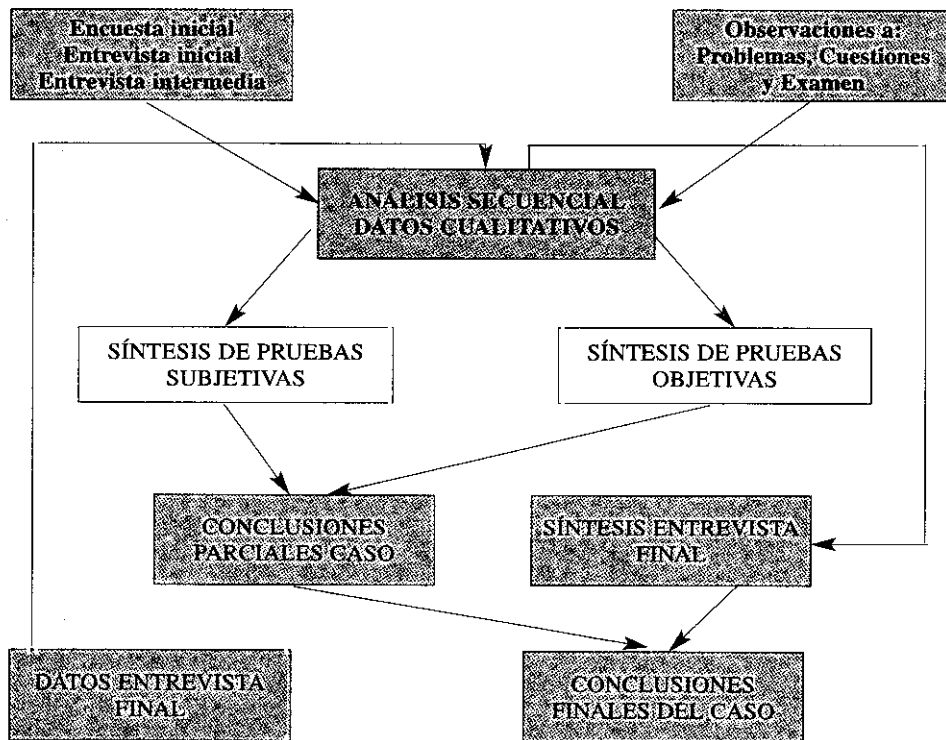
El análisis vertical se realizó considerando sobre cada uno de los casos de la investigación (alumnos) las cuestiones planteadas inicialmente, mientras que en el análisis horizontal el estudio se centró en analizar cada una de las cuestiones de la investigación sobre cada caso, tal y como se observa de forma esquemática en el siguiente cuadro:

**Estudio de cada uno de los casos (alumnos)**

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15
<b>ANÁLISIS VERTICAL</b>															
Cuestión 1															
Cuestión 2															
Cuestión 3															
Cuestión 4															
Cuestión 5															
Cuestión 6															
Cuestión 7															
Cuestión 8															
Cuestión 9															
Cuestión 10															
Cuestión 11															
Cuestión 12															
Cuestión 13															
Cuestión 14															
Otras cuestiones															

El proceso de **análisis vertical** se basó en un análisis secuencial de datos. Este análisis secuencial consistió en un proceso de análisis cualitativo, realizado sobre un conjunto de datos textuales. Estos datos textuales se obtuvieron de la transcripción de las entrevistas realizadas a los alumnos y de las observaciones realizadas por el investigador sobre las pruebas objetivas, tal y como se muestra en el siguiente cuadro:

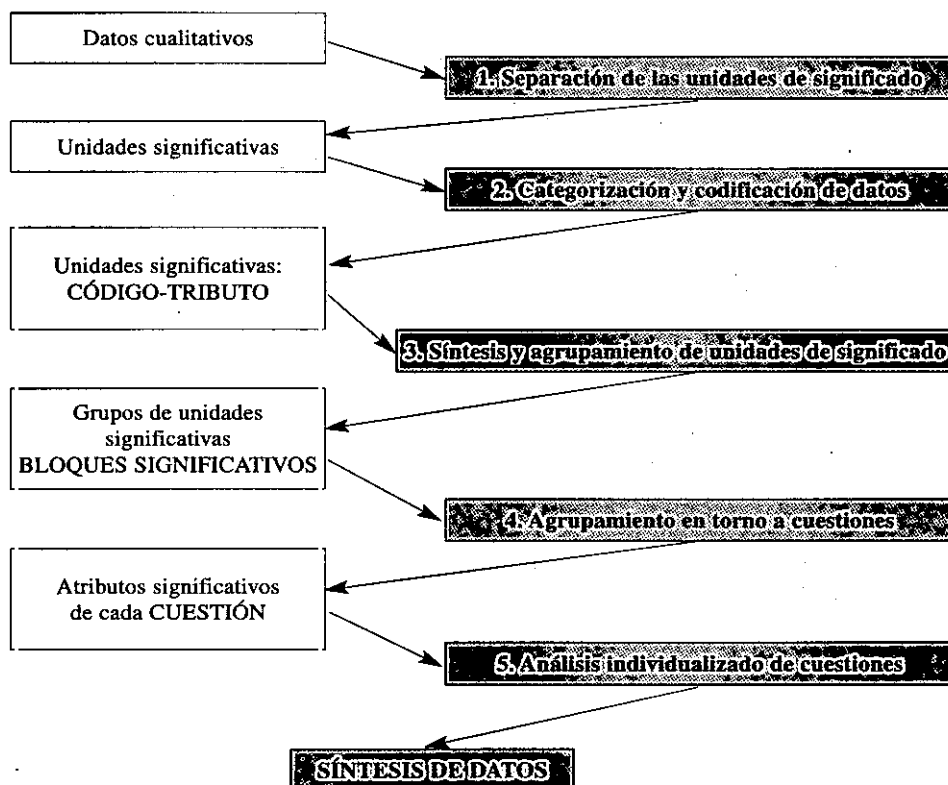
### PROCESO



En el **análisis secuencial** se separaron aquellos datos textuales que consideramos podrían ser significativos respecto de las cuestiones planteadas inicialmente, constituyendo lo que denominamos elementos o unidades significativas. De esta forma, mediante los procesos de categorización, síntesis y agrupamiento de las unidades de significado, pudimos obtener en cada caso unos aspectos característicos o atributos que facilitaban la elaboración de una síntesis de datos. En el siguiente cuadro se muestra de forma esquemática el proceso de análisis secuencial:



## ANÁLISIS SECUENCIAL DE DATOS



Una vez realizado el análisis de cada uno de los casos a través de las diferentes herramientas de recogida de datos diseñadas, efectuamos un análisis minucioso de cada una de las cuestiones de la investigación. Para realizar este segundo proceso, que denominamos **análisis transversal**, consideramos como datos básicos los obtenidos en las conclusiones finales de cada caso, que fueron complementados por los datos deducidos de:

- el análisis cuantitativo de las calificaciones obtenidas por los alumnos en ambos subgrupos,
- las observaciones de las notas de campo realizadas por el investigador
- y el análisis de los datos aportados por la observadora cualificada.

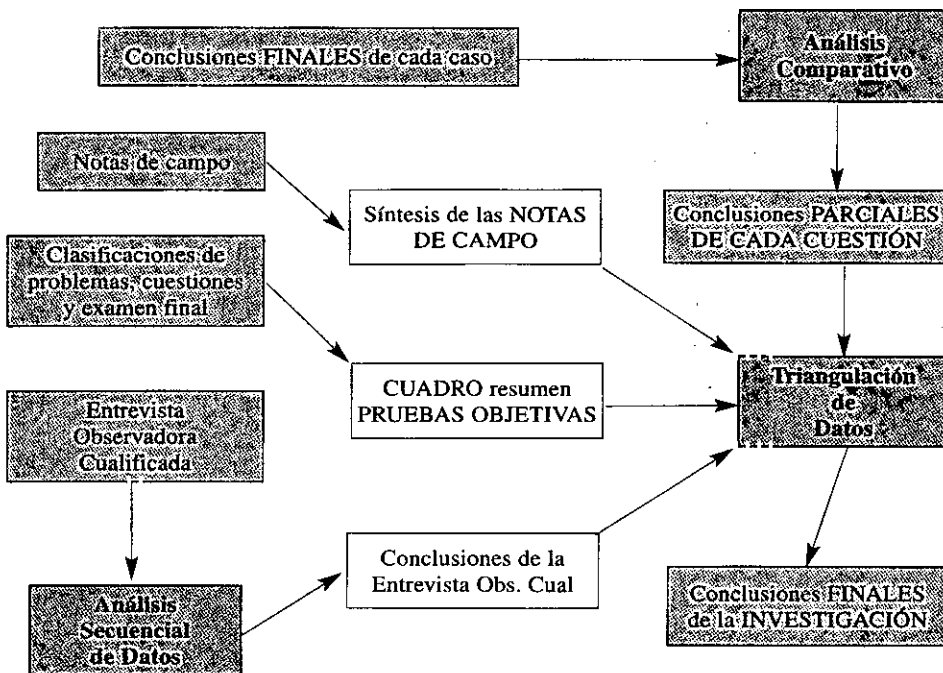
Estos datos nos permitieron verificar y triangular las conclusiones finales. Este proceso de análisis transversal lo realizamos en cuatro etapas:

- 1) La primera etapa se basó en las conclusiones finales obtenidas para cada caso en el proceso de análisis vertical. A partir de estas conclusiones y mediante un **análisis comparativo** elaboramos las conclusiones parciales de cada cuestión. Para realizar este análisis comparativo fijamos inicialmente una serie de atributos o caracteres que podrían definir de forma concreta cada cuestión. En el proceso de observación y comparación determinamos una serie de aspectos característicos que contestaban cada uno de los atributos que nos habíamos planteado inicialmente. Con este proceso de análisis pudimos determinar cuáles eran los aspectos característicos que tenían una mayor incidencia y significado sobre los casos objeto de estudio. Esta incidencia global la resumimos en una tabla de datos particularizada sobre cada cuestión y más tarde a partir de esa tabla elaboramos un diagrama de barras del que pudimos deducir con mayor facilidad las conclusiones parciales de cada cuestión.
- 2) A partir de las notas de campo elaboradas por el investigador mediante un proceso de resumen general de los datos y observaciones obtenidas, obtuvimos una síntesis de notas de campo. Las principales conclusiones a las que llegamos con esta síntesis fueron las siguientes:
  - a) Hubo un elevado grado de asistencia a las clases, información que resulta significativa respecto de la motivación y el protagonismo que tenía el alumnado.
  - b) Los alumnos participaron bastante en el desarrollo de las clases, existió mucha colaboración entre las diferentes parejas de trabajo y además se observó un elevado índice de motivación por parte del alumnado a la hora de resolver ejercicios y problemas.
  - c) La estrategia para introducir los conceptos y el uso de guiones teóricos con DERIVE facilitó la atención a la diversidad de ritmos de aprendizaje y niveles educativos existentes en el aula. Esta estrategia facilitó la estructuración de los contenidos esenciales y no esenciales del programa.
  - d) Las dudas que se plantearon a lo largo del curso se centraron fundamentalmente en contenidos propios de álgebra lineal, no hubo apenas dudas sobre el manejo del programa.
  - e) Se observaron tres niveles educativos en el «subgrupo A», un nivel de 2 alumnos avanzados, un nivel intermedio formado por 11 alumnos y un nivel inferior formado por 3 alumnos.

- 3) La comparativa de las calificaciones obtenidas por ambos subgrupos en el examen final nos permitió obtener varias conclusiones:
  1. El porcentaje de alumnos presentados en el «subgrupo A» (93,75%) fue muy superior al de alumnos presentados en el «subgrupo B» (59,12%), elemento que resultó significativo respecto a la motivación y el protagonismo de los alumnos.
  2. El porcentaje de alumnos aprobados del «subgrupo A» (81,25%) fue también muy superior al porcentaje de aprobados en el «subgrupo B» (41,6%), incluso si efectuamos la comparativa de los porcentajes respecto de los alumnos presentados tanto en el «subgrupo A» (86,66%) como en el «subgrupo B» (69,62%).
  3. Las puntuaciones medias finales fueron muy similares en ambos subgrupos.
- 4) Finalmente, a partir de la entrevista que se realizó con la observadora cualificada efectuando un proceso de análisis secuencial similar al llevado a cabo en el análisis vertical, se obtuvieron conclusiones para cada una de las cuestiones.

Con estos bloques de análisis (síntesis de notas de campo, cuadro resumen de calificaciones, conclusiones de la entrevista con la observadora cualificada y conclusiones parciales) y mediante un proceso comparativo de triangulación o contraste de los datos, obtuvimos las conclusiones de la investigación. En el siguiente cuadro se muestra de forma esquemática el proceso realizado en el análisis horizontal:

**PROCESO**



**6. Conclusiones de la investigación**

El proceso de análisis que hemos comentado en el apartado anterior nos proporcionó una serie de conclusiones que caracterizaron de forma muy exhaustiva la estrategia didáctica diseñada.

Las primeras conclusiones que contestaron a las diferentes cuestiones propuestas inicialmente en la investigación fueron las siguientes:

**1) DERIVE proporciona un sistema de notación intermedio** entre los sistemas de notación formales del álgebra lineal y los sistemas de notación más familiares al alumnado, por varios motivos:

- Es un sistema de notación más *cercano al alumno y más cómodo* de utilizar que el lápiz y papel.
- *La forma de introducir los datos* del álgebra lineal con DERIVE ha permitido que los alumnos asimilen los procesos rutinarios y manipulativos, ya que estas manipulaciones les obligaban a conocer la forma de intro-

ducir los datos y a reflexionar sobre el concepto que estaban manejando o iban a manejar.

- Es un sistema de notación *complementario al del lápiz y papel*.

2) La interactividad que ha provocado nuestra estrategia didáctica ha sido positiva en los tres entornos de comunicación entre los alumnos, entre alumnos y profesor y entre los alumnos y el programa DERIVE:

- a) *La interactividad entre los alumnos* ha sido muy positiva por varios motivos: por el uso del ordenador, porque el grupo era reducido, porque se trataba de un grupo donde los alumnos podían sentirse diferentes y porque la estrategia didáctica facilitaba la experimentación. Esta interactividad ha suscitado un trabajo en grupo que se ha basado fundamentalmente en parejas de trabajo o en grupos que se correspondían con la ubicación física de los alumnos en el aula.
- b) *La interactividad entre alumnos y profesor* también ha sido muy positiva, ya que el profesor ha respondido rápidamente las preguntas y dudas que se iban planteando, ha sido una comunicación concreta centrada en los contenidos de la asignatura. Los factores que han influido en este grado de interactividad han sido el número reducido de alumnos y la propia estrategia didáctica que favorecía la interacción entre alumnos y profesor.
- c) *La interactividad que ha ofrecido DERIVE a los alumnos* ha sido también muy alta por su rapidez de respuesta y porque los mensajes que ofrecía el programa se entendían generalmente bien.

3) La estrategia didáctica ha favorecido el **protagonismo** de los alumnos frente al medio tecnológico, como muestran por un lado el elevado índice de asistencia, el elevado porcentaje de alumnos presentados al examen final, la valoración de la observadora cualificada y el estudio de casos que hemos realizado. Este protagonismo se ha caracterizado por la elevada participación de los alumnos en las actividades de descubrimiento, por la actitud de búsqueda que suscitaba el programa y porque DERIVE obligaba a pensar al alumno en el planteamiento de los problemas y ejercicios.

Sin embargo, la **creatividad del alumno**, aunque se ha intentado estimular con actividades de exploración y de investigación, sólo se ha constatado en algunos alumnos.

4) La estrategia didáctica ha centrado la atención del alumno sobre los contenidos esenciales del programa con ayuda del guión de trabajo, que ha sido un

medio fundamental para que los alumnos hayan sabido **distinguir claramente entre los contenidos esenciales y los no esenciales del programa**; aunque ha habido una tendencia general de los alumnos para automatizar algunos de los procesos que formaban parte de los contenidos esenciales. Esto ha provocado que los alumnos hayan perdido, en cierta medida, algunas habilidades manuales de cálculo. Estas circunstancias muestran la posibilidad de que algunos procesos relacionados con los contenidos esenciales se hayan automatizado sin haberse asimilado previamente.

5) El programa DERIVE ha permitido que los alumnos **realicen con menos esfuerzo los cálculos repetitivos y rutinarios** necesarios para resolver los problemas y ejercicios de álgebra lineal, permitiendo que los alumnos se concentren en los conceptos y procesos básicos necesarios para entender el álgebra lineal. Este hecho ha proporcionado a los alumnos la posibilidad de dedicar más tiempo a la experimentación y a la investigación, aunque ha provocado cierta disminución en las habilidades y destrezas manuales de cálculo.

6) Aunque la experimentación no era el estilo de trabajo habitual utilizado por los alumnos, el tipo de uso que hemos hecho del programa **DERIVE ha propiciado una actitud de búsqueda de soluciones** en los problemas y cuestiones que se planteaban, y podemos decir que ha aumentado el grado de experimentación de los alumnos. Por otro lado, DERIVE ha dejado al alumno espacios para pensar, pues se deja que el ordenador realice los cálculos rutinarios permitiendo de esta forma que el alumno se centre en procesos de orden superior y de investigación. Se ha constatado que en algunos alumnos este grado de experimentación ha ido aumentando a lo largo del curso y se ha perfilado como uno de los elementos más importantes del trabajo realizado por los alumnos.

7) Esta estrategia didáctica ha potenciado un estilo de **aprendizaje por DESCUBRIMIENTO y ACTIVO**, aunque quizás el hecho de ser un grupo pequeño y diferente puede haber favorecido este tipo de aprendizaje. Pero además de este hecho, la estrategia didáctica empleada y el uso del SCA han sido dos factores decisivos en el estilo de aprendizaje. Sin embargo, aunque el grado de motivación del alumno ha sido muy elevado y el protagonismo de los alumnos también ha sido notable, no podemos garantizar que el tipo de aprendizaje haya sido totalmente significativo. Podemos afirmar que los contenidos que han adquirido los alumnos probablemente hayan quedado afianzados de forma significativa en virtud del proceso de aprendizaje que se ha realizado.

8) La estrategia didáctica empleada con el uso de DERIVE ha facilitado a los alumnos la posibilidad de utilizar varias estrategias de resolución de problemas. La estrategia tenía todos los ingredientes necesarios para que los alumnos utilizaran varias estrategias en la resolución de problemas, muchas más que cuando se les dejaba resolver con lápiz y papel. Sin embargo, el alumno ha utilizado una sola estrategia cuando con ésta se obtenía la solución del problema. Por el contrario, los alumnos ensayaron otros métodos o caminos cuando la primera estrategia no les proporcionaba la respuesta deseada. Las estrategias que han ofrecido mayores problemas a los alumnos fueron la inducción, la modelización matricial de problemas reales y la resolución de problemas con experimentación; por el contrario, sí han sabido resolver problemas relacionados con la modelización vectorial y en los que intervenía como modelo un sistema de ecuaciones lineales.

9) DERIVE ha sido un programa que no ha generado barreras adicionales para el aprendizaje de los principales contenidos de álgebra lineal ya que se trata de un programa de fácil manejo y aprendizaje, aunque en ocasiones los alumnos han tenido ciertas dificultades relacionadas con la programación de funciones y el solapamiento de variables. En general podemos decir que DERIVE ha facilitado la comprensión de contenidos y la resolución de problemas.

10) El grado de autonomía que han adquirido los alumnos, aunque no ha sido muy elevado, sin embargo podemos decir que la forma de uso de DERIVE les ha permitido encontrar en numerosas ocasiones y de forma autónoma las soluciones de las tareas propuestas.

11) La estrategia didáctica ha favorecido las relaciones dialécticas entre alumnos y entre alumnos y profesor. De hecho, las relaciones de comunicación entre los alumnos han sido bastante buenas, motivadas en cierta medida por el ambiente de comunicación que ha potenciado la estrategia didáctica, porque eran pocos alumnos y quizás porque se trataba de un grupo diferente. En cuanto a las relaciones dialécticas entre profesor y alumnos, han sido también muy positivas, el profesor ha resultado más cercano y accesible a los alumnos que en las clases habituales. En estas circunstancias, la concepción abierta del profesor respecto al alumnado, la propia metodología que propiciaba situaciones de comunicación y el reducido número de alumnos han sido tres de los factores que más han influido en las relaciones dialécticas. Por último, debemos señalar que el ambiente de colaboración y trabajo que ha provocado la estrategia didáctica ha favorecido este tipo de relaciones dialécticas entre alumnos y entre alumnos y profesor.

12) La estrategia didáctica que se ha empleado y las formas de uso del programa DERIVE **han generado un ambiente de colaboración** en el aula. Este ambiente de colaboración ha servido para que los alumnos vieran estimulado su interés por la exploración, comprobación y experimentación de los problemas en grupos de trabajo. Aunque las colaboraciones entre alumnos pueden transmitir errores y malos hábitos en algunas ocasiones, sin embargo la existencia de un elemento mediador como es el ordenador les ha permitido contrastar resultados, eliminando de esta forma esos posibles errores de transferencia. Estas circunstancias nos sitúan en un contexto de ambientes en los que se ha favorecido la aparición de aprendizajes colaborativos, donde el factor social ha sido un elemento muy beneficioso para el aprendizaje.

13) La estrategia didáctica **ha favorecido una adecuada ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD**, como lo muestran algunos indicadores:

- El ritmo de las clases se puede calificar de un ritmo **ACTIVO Y DINÁMICO**.
- Los alumnos no se han aburrido en las clases, ni siquiera los más aventajados, y además ningún alumno se ha encontrado perdido en las clases, ya que ha encontrado rápida solución a sus dudas.
- Los tres niveles de aprendizaje que existían en el aula han sido tratados adecuadamente con problemas de diferentes niveles de dificultad, en el examen final y en las cuestiones propuestas. En las clases, las dudas que surgían se atendían de forma adecuada por el profesorado con ayuda de los guiones de trabajo de cada sesión.
- El programa DERIVE ha permitido resolver las dudas que iban apareciendo de una manera automática.
- Los alumnos tenían confianza en sus posibilidades, situación observable de forma clara en el alto porcentaje de presentados en el «subgrupo A», muy superior al del «subgrupo B».

Además debemos añadir que el número reducido de alumnos que integraban este «subgrupo A» ha influido notablemente en esta atención a la diversidad.

14) La estrategia didáctica que se ha empleado en este curso experimental ha provocado unos **índices bastante elevados de MOTIVACIÓN** entre los alumnos, situación que ha quedado constatada por varios indicadores:

- Los alumnos se encontraban bastante entretenidos en clase, las clases resultaban divertidas y nada aburridas y además se les pasaban rápidamente.



- Los alumnos han dedicado bastantes horas a la asignatura fuera del horario de clase, se puede decir que usaban una media de 5 horas semanales, indicador que muestra un elevado interés por la asignatura.
- La valoración media de los alumnos a este curso ha sido bastante alta: 7,9 sobre 10.
- Los alumnos se han encontrado muy satisfechos con la metodología, de hecho todos expresaron de forma unánime que volverían a elegir este subgrupo experimental.
- El programa DERIVE ha sido un elemento muy motivador para el aprendizaje porque les ha facilitado el cálculo, les ha permitido llegar al final en la resolución de muchos problemas, era un programa divertido y además en algunos casos les ha motivado para aprobar la asignatura Matemáticas I en septiembre.
- El índice de asistencia a clase ha sido bastante elevado: más del 75% de los alumnos ha asistido a más del 75% de las clases.
- Ha aumentado el interés de los alumnos por las Matemáticas y en particular por el álgebra lineal, sobre todo por la resolución de problemas.
- El porcentaje de alumnos que se han presentado al examen final ha sido muy elevado.
- El porcentaje de alumnos aprobados también ha sido superior en este grupo respecto del «subgrupo B».

Además de las cuestiones que planteamos inicialmente en la investigación y gracias a los datos recogidos en el transcurso de la misma, hemos obtenido algunas otras características educativas que pasamos a describir:

**15)** El ambiente que se ha generado en el curso ha sido **muy participativo**, invitaba al trabajo individual y colectivo, propiciado por la estrategia didáctica empleada y por el uso del programa DERIVE. Por otro lado, **la dinámica de las clases ha sido muy activa y experimental**, diferente a la realizada en las clases habituales aunque en ocasiones ha tenido un ritmo un poco rápido, pero ha sido una dinámica positiva porque no era necesario estar tomando apuntes como en clases tradicionales, ya que se disponía de una página web donde se podían consultar todos los contenidos. Además ha sido una dinámica entretenida que no inducía al aburrimiento, todo lo contrario.

**16)** Los alumnos han visto realizadas las expectativas que tenían depositadas en el curso, aunque algunos esperaban obtener unas calificaciones más altas, pero se puede afirmar que globalmente los alumnos muestran una gran satisfacción por el curso. Por otro lado, **la evolución de los alumnos podemos**

**decir que ha sido una evolución claramente progresiva**, sobre todo en la parte relacionada con los problemas.

17) El grupo experimental estaba formado en su mayor parte por alumnos de nuevo ingreso en la Universidad (11 de 15) que habían realizado la trayectoria educativa EGB-BUP-COU, obtuvieron unas calificaciones medias en Matemáticas de 7,2 y una calificación media en Selectividad de 7. La mayoría de ellos suspendieron la asignatura Matemáticas I del primer cuatrimestre.

18) Las características del profesorado pueden influir enormemente en la puesta en práctica de esta estrategia, aumentando o disminuyendo todas sus cualidades, ya que una actitud comprometida del profesor le permite obtener una relación de comunicación muy estrecha con el alumnado aunque le obliga a invertir un esfuerzo adicional en la preparación de las clases, sin embargo una actitud pasiva puede permitir al profesor enmascarar su trabajo ofreciendo a los alumnos actividades manipulativas que no provoquen el aprendizaje y mantenga a los alumnos ocupados en actividades meramente mecánicas de manejo del programa. Por otro lado, en esta estrategia didáctica se ensalzan las virtudes o defectos del profesor, en el sentido de que la forma de concebir la educación y la docencia, así como la propia forma de ser del profesorado, influyen enormemente en el desarrollo de la estrategia didáctica.

Estas conclusiones nos permiten afirmar que el programa DERIVE tiene las siguientes características educativas:

- 1) Ofrece un SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO para el álgebra lineal, ya que se trata de un sistema de notación más cercano al alumno, más cómodo de utilizar y además permite que el alumno centre su atención en los conceptos y objetos propios del álgebra lineal cuando introduce o manipula los objetos y contenidos por medio del programa, convirtiéndose en un complemento del lápiz y papel.
- 2) Es un programa que favorece la INTERACTIVIDAD, no sólo entre el alumno y el programa, sino que además favorece la interactividad entre los alumnos y entre alumnos y profesor.
- 3) Potencia el PROTAGONISMO del alumno en su proceso de aprendizaje.
- 4) Permite que el alumno sepa RECONOCER LOS CONTENIDOS ESENCIALES del álgebra lineal, aunque en ocasiones se corre el peligro de automatizar algunos cálculos en detrimento de algunas habili-

dades de cálculo.

- 5) Permite realizar con menos esfuerzo numerosos CÁLCULOS REPETITIVOS Y RUTINARIOS, que suelen ocupar demasiado tiempo a los alumnos.

Estas características del programa DERIVE han favorecido y proporcionado unas **situaciones de enseñanza** que conducen hacia un aprendizaje que tiene las siguientes características:

- a) Se trata de un aprendizaje por descubrimiento y activo, que a partir de los conocimientos previos del alumno, facilita la adquisición de aprendizajes significativos sobre los contenidos básicos del álgebra lineal.
- b) Un aprendizaje que proporciona al alumno la posibilidad de utilizar varias estrategias de resolución de problemas, aunque en general el alumno tienda a utilizar una de ellas.
- c) Un aprendizaje colaborativo, basado en las colaboraciones que propicia el trabajo en grupo suscitado por el programa DERIVE.
- d) Un aprendizaje adaptado a las necesidades de cada alumno, ofreciendo la posibilidad de utilizar varios niveles de aprendizaje, motivado fundamentalmente: por la ayuda que presta el programa, por el ambiente colaborativo que se fomenta entre los alumnos y por el material didáctico disponible en los guiones de trabajo, es decir, permite una adecuada atención a la diversidad.

Estas conclusiones vienen avaladas por las diversas características que ha ofrecido el programa de cálculo simbólico DERIVE, entre las que podemos señalar las siguientes:

- Se ha propiciado una actitud de búsqueda de soluciones, actitud que permite la posibilidad de utilizar el programa como una auténtica herramienta de experimentación. Porque DERIVE ha ofrecido a los alumnos más tiempo para pensar, dejando lo rutinario para el ordenador.
- El uso del programa DERIVE no ha generado barreras adicionales para el aprendizaje de los contenidos de álgebra lineal, ya que se trata de un programa fácil de aprender y de manejar.
- Aunque los alumnos no han adquirido un grado de autonomía significativa, sin embargo les ha ofrecido la posibilidad de intentar con cierta autonomía la resolución de muchos problemas que no hubieran sido

capaces de intentar ni siquiera con lápiz y papel.

- El grado de MOTIVACIÓN del alumnado ha sido bastante elevado, como muestran elevados porcentajes de asistencia, de presentados al examen y también de aprobados.
- El ambiente del curso ha sido muy participativo, y la dinámica de las clases muy activa y experimental.
- Los alumnos han visto realizadas sus expectativas, y han mostrado su satisfacción por el curso, notándose una evolución progresiva en su aprendizaje.

### Ideas para futuras investigaciones:

A lo largo de esta investigación hemos observado algunos factores o elementos que podrían haber mejorado los resultados, en cuanto a la generalización de las bondades de nuestra estrategia didáctica. A continuación mostramos algunos de dichos factores que proporcionarían pautas para futuras investigaciones:

- 1) El reducido número de alumnos del «subgrupo A» ha proporcionado unas características educativas concretas en torno a nuestra estrategia didáctica, pero una cuestión objeto de estudio podría ser el ampliar la investigación sobre grupos con mayor número de alumnos.
- 2) Otro elemento que puede ser objeto de futuras investigaciones es el papel o influencia que puede ejercer el profesorado en esta estrategia didáctica, en particular la influencia que puede ejercer la actitud del profesorado en una estrategia didáctica que fundamenta su razón de ser en la incorporación de un sistema de cálculo algebraico.
- 3) Si bien la resolución de problemas constituía uno de los principios metodológicos de nuestra estrategia, sin embargo no se ha hecho demasiado hincapié en las estrategias de resolución de problemas, por lo que una circunstancia que podría ser objeto de estudios posteriores es el analizar el comportamiento de los alumnos usando un SCA y una estrategia como la anterior pero incorporando técnicas de resolución de problemas.
- 4) Profundizar en el estudio del tipo de aprendizaje que adquieren los alumnos con este tipo de estrategia, es decir, determinar con estudios más prolongados en el tiempo si el tipo de aprendizaje permanece en la memoria a largo plazo y se convierte por tanto en un aprendizaje significativo o si por el contrario el hecho de utilizar un SCA favorece un aprendizaje que se almacena en la memoria a corto plazo y que por tan-

- to no permanece significativamente en el conocimiento del individuo.
- 5) Otro elemento que puede centrarse en el análisis del tipo de uso que hace el alumno del programa de cálculo simbólico, si lo utiliza realmente como herramienta de cálculo y de experimentación o si en cierta medida lo utiliza para automatizar contenidos esenciales atrofiando en cierta medida procesos básicos.
  - 6) ¿Qué ocurriría si los alumnos estuviesen más habituados al sistema DERIVE o sistemas de cálculo algebraico similares en cursos anteriores?, es decir, ¿qué ocurriría si el sistema de cálculo algebraico fuese una herramienta más familiar al alumno, tan familiar como lo es el lápiz y papel? En esas circunstancias, ¿el SCA sigue siendo un sistema de notación intermedio?
  - 7) Respecto al currículum de álgebra lineal, sería necesario indagar si no sería mejor adaptar los contenidos del currículum de esta disciplina a la nueva herramienta tecnológica, suprimiendo del mismo contenidos que son muy manipulativos y añadiendo otros de carácter más profundo.
  - 8) La última cuestión tiene que ver con el uso del programa, en particular en lo que se refiere a las funciones básicas del programa. Los programas de cálculo simbólico contienen numerosas funciones básicas que automatizan procesos y cálculos que en un contexto educativo se pueden considerar como CONTENIDOS ESENCIALES, circunstancia que obliga a enmascarar las funciones, lo cual nos plantea una pregunta: ¿no sería posible desarrollar sistemas de cálculo algebraico que permitan que el profesor determine cuáles son las funciones básicas del programa?, es decir, se trataría de intentar facilitar al profesor la opción mediante la cual sólo se dejen accesibles a los alumnos aquellas opciones que se consideran CONTENIDOS NO ESENCIALES. Una posible solución consistiría en construir ficheros de utilidades, librerías, o facilitar la opción de eliminar funciones dentro del entorno del programa.

Todas estas cuestiones pueden formar parte de futuras investigaciones con las que podremos incorporar de una manera adecuada los sistemas de cálculo algebraico de forma plena en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, para salvaguardar una disciplina bella, creativa y útil para nuestra sociedad.

Este trabajo recoge parte de la investigación desarrollada en la tesis doctoral titulada «La enseñanza del álgebra lineal mediante sistemas computacionales de cálculo algebraico», realizada por Pedro Ortega y defendida el 14 de marzo de 2002 en la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de

Madrid.

### Bibliografía

- Auer, J. W. y Muller, E. R. (1990). Some Examples of the Use of CAS in Teaching Linear Algebra and Calculus. MAA Notes, 24. *Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education* (Zaven A. Karian), 1993, pp. 101-108.
- Ausubel, D. P.; Novak, J. P. y Hanesian, H. (1976). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México, 1976, Trillas.
- Bautista García-Vera, A. (1987). Fundamentos de un método de enseñanza basado en resolución de problemas, *Revista de Educación*, núm. 282, 1987, pp. 151-160.
- Benítez, F.; Díaz, J. M. y Pérez, J. (1996). Experiencia de Laboratorio de Matemáticas en la Universidad de Cádiz. *Matemáticas en Escuelas Técnicas*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva, pp. 47-58.
- Child, D. y Leinbach, C. (1996). Linear Algebra. CAS-CALC Computer Algebra Systems Calculus, 24-28 junio, *Teacher Teaching with Technology Programs*, 1996, pp. 116-127.
- Crook, C. (1999). *Ordenadores y aprendizaje colaborativo*. Ed. Morata, Madrid, 1999.
- DERIVE (1990). *Soft Warehouse. User Manual*.
- García, A. (1999). Uso de herramientas informáticas en la enseñanza de la matemática. Conferencia impartida en el curso de verano de la UNED *La Matemática: su naturaleza, evolución y tratamiento de su didáctica*, julio 1999.
- García, A.; Coronado, J. L.; Corral, A.; Chumillas, V. y otros (Profesores del Dpto. de Matemática Aplicada de la E.U.L., Univ. Politécnica de Madrid) (1994). *Prácticas de Matemáticas con DERIVE* (ed. A. García), AGLI, S.L., Madrid.
- Gil Flores, J. y Rodríguez Gómez, G. (1993). *Metodología de la investigación cualitativa*. Ediciones Aljibe, Granada.
- Goetz, J. P. y LeCompte, M. D. (1998). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Ed. Morata.
- Guzmán, M, de (2001). *Para pensar mejor*. Labor, Barcelona, 1991. Última edición: *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. Pirámide, Madrid, 2001.
- (1992). Los riesgos del ordenador en la enseñanza de la matemática (Eds. Abellanas, M. y García, A), *Enseñanza experimental de la matemática en la Universidad*. Univ. Politécnica de Madrid.
- Halmos, P. R. (1991). Is Computer Teaching Harmfull?. *Notices of the A.M.S.*, vol. 38, núm. 5, 1991, pp. 420-423.
- Hodgson, B. R. y Muller, E. R. (1992). The Impact of Symbolic Mathematical Systems on Mathematical Education. En Bernard Comu and Anthony Ralston (Eds.), *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and Its Teaching*. *Science*

- and *Technology Education*, 44, 1992, UNESCO, pp. 93-107.
- Kaput, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, A project of the NCTM*, New York, Macmillan Publishing Company (1992), pp. 515-575.
- Kutzler, B. (1999). The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics. *Improving Mathematics Teaching with the TI-92*. Langbaum, E.D. (Ed.): *Hand-Held Technology in Mathematics and Science Education: a Collection of Papers, Teachers Teaching with Technology. Short Course Program at the Ohio State University*, 1999, pp. 98-109.
- Landay, S. (1999). Compute and Conjecture. *Notices of the A.M.S.*, febrero 1999, p. 189.
- Leinbach, C. (1991). Calculus Laboratories Using Derive. *Wadsworth New Directions in Mathematics Series*, Belmont, California.
- Llorens, J. L. (1993). *Introducción al uso de DERIVE: aplicaciones al álgebra lineal y al cálculo infinitesimal*. Dpto. de Matemática Aplicada E.U.I.T.A., Universidad Politécnica de Valencia.
- Murakami, H. y Hata, M. (1997). *Mathematical Education in the Computer age*. Davenport: Computer Algebra Systems, pp. 85-92.
- Ortega, P.; Vázquez, J. y Sanz, P. (1998). *Álgebra Lineal, cuestiones, ejercicios y su tratamiento en DERIVE*. Ed. Prentice-Hall.
- Roanes Macías, E. y Roanes Lozano, E. (1991). Enseñanza y aprendizaje de la matemática en la era del ordenador. *Actas de las Jornadas sobre enseñanza experimental de la Matemática en la Universidad*, 10- 12 diciembre 1991, U.P. Madrid, pp. 201-206.
- Salter, M. y Gilligan, L. (1991). *Linear Algebra Experiments using the DERIVE Program*. EE.UU.
- Sierspinska, A.; Dreyfus, T. y Hillel, J. (1999). Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra: the Case of Linear Transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19, n.º 1, pp. 41-76.
- Skemp, R. R. (1989). *Mathematics in the Primary School*. 1989, Londres.
- Truesdell, C. (1984). *The computer: ruin of science and threat to mankind. An Idiot's Fugitive Essays*, pp. 594-631.
- Watkins, A. J. P. (1992). Introducing calculus with DERIVE. (Joseph Bohm, Ed.), *Teaching Mathematics with DERIVE*, pp. 1-19.