Revista Complutense de Educación ISSN: 1130-2496
Vol. 13 Núm. 1 (2002) 281-302

Dificultades en la adquisición del significado en el uso de las letras en Álgebra. Propuesta para la interacción didáctica

FÉLIX E. GONZÁLEZ JIMÉNEZ
Universidad Complutense de Madrid

M.ª MERCEDES DIEZ BARRABÉS
Universidad de Zaragoza

RESUMEN

Este trabajo sobre el aprendizaje y la enseñanza del Álgebra comienza con la observación de dos momentos históricos de ruptura: 1. El paso de la Aritmética al Álgebra, y 2. El paso del Álgebra Clásica al Álgebra Moderna, es decir, del Álgebra como método al Álgebra como Objeto Matemático. Después estudia el uso de las letras entre los matemáticos y se analizan los usos que les dan los alumnos y las concepciones que forman en ellos estos usos. Como consecuencia se deduce que es necesario un aprendizaje sistemático del uso de las letras en Álgebra. Esta enseñanza sistemática se aplica a la adquisición del concepto de desigualdad en los tipos: $x \leq k$; $k' < x < k$; $y < x + k$, y a la identificación de las zonas del plano que representan. El método de enseñanza y aprendizaje que se emplea, consiste en la generación de situaciones didácticas en las que el alumno se ve inmerso en momentos de acción, de comunicación y de debate que van produciendo la evolución del lenguaje del plano gráfico hacia una expresión simbólica en «R^2». De este modo los alumnos llegan a entender los semiplanos en forma de expresiones simbólicas —desigualdades—.

ABSTRACT

This work, concerning teaching and learning Algebra, begins with a commentary about two historical moments of rupture: first, the transformation of Arithmetic into Algebra; second, the change of Classic Algebra into Modern Algebra, meaning the change form Algebra as a Method to Algebra as a Mathematical Object. Following this, the usage of letters by mathematicians is studies, and the way the are used by pupils is analyzed together with the conceptions wich are formed in them by this use. As a consequence, it is deduces that, in Algebra, it is necessary to learn the use of letters systematically. This is applied to the acquisition of the concept of inequality in the types: $x \leq k$; $k' < x < k$; $y < x + k$, and the areas of plane they represent. The method of teaching employed consists in the creation of a sucession of Didactic Situations in wich the pupil is immersed: Action Situation, Situation on Communication and Situation of Debate wich produce an evolution of the Graphic plane towards a symbolic expression in «R2». In this way the pupils determine half planes in the form of symbolic expressions —inequalities—.

1. Introducción

El empleo de las letras en el Álgebra siempre ha ofrecido a los alumnos más dificultades de las que, a priori, se hubieran considerado como normales en cualquier aprendizaje. Intentar hacer una simplificación o un cálculo con letras significaba la práctica de actividades que producían un alto grado de fracaso escolar. Mucho más alto que cuando se debían realizar simplificaciones o cálculos con números en forma directa. Sin embargo, y junto con esto, también se dan experiencias muy positivas en el empleo de las letras.

Durante el primer curso del anterior Bachillerato los alumnos de 14-15 años en España, debían estudiar Combinatoria: Variaciones, Permutaciones y Combinaciones según el programa oficial y aunque el empleo de las fórmulas pertinentes no parecía presentar muchos inconvenientes en cuanto a la mecánica de aplicación, sin embargo los alumnos encontraban dificultades en cuanto a la elección de la fórmula adecuada a cada problema, de modo que llegaba un momento en el que era necesario decidir un cambio en la forma de presentación del tema para que los alumnos fueran descubriendo estas fórmulas mediante la generalización progresiva de casos particulares. De este modo las fórmulas eran obtenidas por ellos mismos, eran sus fórmulas. Pues al ser encontradas por la propia búsqueda del alumno, éste las conocía y sabía cuál era su dominio de aplicación. Las letras tenían ahora un significado claro para ellos, y su empleo se revelaba como una ayuda para expresar la regla en lugar de constituir una dificultad.

Esto lleva a pensar que ciertas formas de introducir las letras podían ayudar a la mejor comprensión y manejo de ellas y conduce a una reflexión e insistencia en el análisis de los fenómenos didácticos que producen al introducirlas. Lo que realmente se cuestiona es el trabajo del profesor. ¿Cuál era la mejor manera de que los alumnos se familiarizaran con las letras, con su comprensión y su utilización? ¿En qué momento comenzaban las dificultades de los alumnos en el uso de las letras? ¿Cómo se hacían patentes estas dificultades? ¿Por errores en el cálculo? ¿Por el rechazo consciente o, a veces, inconsciente de ellas? (Booth, 1984).Por otra parte las letras forman parte substancial de las ecuaciones, inecuaciones y funciones, de modo que las deficiencias en su manejo repercuten claramente en la inadecuada adquisición de muchos conceptos relacionados con ellas (Scheneider, 1979).

El uso de las letras se encuentra fuertemente ligado al Álgebra elemental y a los razonamientos de tipo algebraico. De este modo el encuentro con la necesidad de investigar, específica y permanente en la actividad de los docentes (González, 2001), se hace patente y no sólo los fenómenos didácticos producidos por el uso de las letras, sino aquellos otros ligados al Álgebra, e incluso es necesario cuestionarse qué es aquello que se llama Álgebra.

Así conviene estudiar el concepto de Álgebra desde tres puntos de vista:

a) Socio-cultural.
b) De los profesores del nivel de Educación Secundaria en España.
c) Históricamente.

Se hace referencia ahora sólo al tercer punto por ser interesante para la exposición siguiente. Históricamente se puede apreciar alguna *ruptura*:

⇒ Una primera en el siglo IX y siguientes (Chevallard, 1985), en la que se pasa de la Aritmética al Álgebra.

El Álgebra aparece en una sucesión generatriz en la que es, primero, Álgebra Retórica y, después, Álgebra Simbólica (Malet y Paradis, 1984). Pero, ¿aparecen los conceptos de incógnita o parámetro de forma simultánea al uso de la letra «x»? No, pues puede verse a través de unos breves ejemplos, cómo, históricamente, algunos conceptos relacionados actualmente con el uso de la letra «x», aparecen antes que la propia escritura explícita de la letra «x» (Cardano, 1968).

— En cuanto al parámetro, existen trabajos de Stevin (1548-1620) en los que, para demostrar una propiedad de los números, este autor elige uno pero lo trata como elemento genérico del conjunto, no lo simboliza todavía con una letra, aunque el tratamiento es más algebraico que aritmético. No aparece pues la letra «x» pero el concepto de parámetro generalizador se encuentra implícito en el procedimiento. Esta generalización es altamente útil para la comprensión de los alumnos en su acercamiento al significado del símbolo.

— En cuanto a la incógnita, también el tratamiento de los problemas va cambiando de formas aritméticas a formas algebraicas antes de que se haya llegado a las expresiones con letras y concretamente con la letra «x». Los progresos en las transformaciones eliminan el proceso de comparación —al'mucabalah—. El procedimiento nuevo —al'jabra— es mucho más potente porque permite trabajar de la misma manera objetos matemáticos diferentes: números, magnitudes, etc. e incluso números negativos.

Conviene ampliar un poco esto del tratamiento aritmético y el tratamiento algebraico de los problemas. Así, el pensamiento aritmético se aplica en problemas particulares, es una forma de tratar los problemas individualmente. Por ejemplo, en el método llamado de *regula falsi*, se sabe que el calculador elige un valor falso y hace, con este valor, los cálculos numéricos que requieren las condiciones del problema. Al final se obtiene un resultado diferente del que se esperaba conseguir pero, comparando este resultado falso con el que se debía obtener, se deduce como una secuencia en conformidad la solución del problema (National Council, 1980).

Las características esenciales de este tipo de razonamiento consisten en el uso de las propiedades de los números y sobre todo de la *intuición* del calculador. Puede comprobarse cómo es la resolución de un problema por el método de la regula falsi comparado con su correspondiente resolución algebraica mediante ecuaciones. El problema planteado es el siguiente:

- *«Un comerciante compra vino a 50 pts/l. Vende un tercio de lo comprado a 65 pts/l. Después, un cuarto a 70 pts/l. Por último, vende el resto a 60 pts/l. Con todo ello obtiene una ganancia de 5.100 pts. ¿Cuántos litros de vino había comprado?»*

MÉTODO ARITMÉTICO REGULA FALSI	*MÉTODO ALGEBRAICO*
Se elige el número12 de litros porque es múltiplo de 3 y de 4.	Se elige el número x de litros.
La tercera parte: 4 l	Un tercio: x/3
4 l por 25 pts./l	Precio: 65 por x/3
La cuarta parte: 3 l	Un cuarto: x/4
3 l por 70pts./l = 210 pts.	Precio: 70 por x/4
El resto (12 l – 7 l = 5 l)	El resto: x – (x/3 + x/4)
5 l por 60 pts./l = 300 pts	Precio: 60 por [x – (x/3 – x/4)]
Total de la venta: 260 + 210 + 300 = 770 Total pagado en compra: 12 por 50 = 600	Total de la venta – total de la compra = ganancia
Ganancia falsa: 770 – 600 = 170 pts	65 por x/3 + 70 por x/4 + 60 por (x – x/3 – x/4) – 50 por x = 5100
Ganancia real: 5100 pts es treinta veces más	Ecuación más resolución Æ solución
Por tanto: 12 l por 30 = 360 l	x = 360 l

De análoga manera se pueden observar las siguientes características del pensamiento algebraico que se aplica para resolver tipos generales de problemas. Se llama «x» a la incógnita. A ella se le va haciendo cumplir las condiciones del problema, pero aquí está la gran diferencia: No se realizan realmente las operaciones, sino que se representan en forma de ecuación que ahora se presta a una manipulación diferente, que tiene sus propios signos y sus propias reglas. En un texto francés del siglo XIX (F.J. 1895), se habla del Álgebra Moderna de Viète (1540-1603) diciendo que «la potencia reside en estas combinaciones de los propios signos que suplen al razonamiento de intuición y conducen por una vía misteriosa al resultado deseado». Sólo que la vía no es misteriosa y conviene poner a los alumnos en el camino de comprobarlo por sí mismos.

Se trata, con éste método, de operaciones que podría decirse que se ejecutan a un segundo nivel. Por ejemplo, se debe multiplicar:

3	X	2 + x
(número)	por	(suma)

Para contestar es preciso utilizar propiedades de las operaciones (distributiva, asociativa, etc.) además de otras propiedades de los números (divisibilidad, paridad, etc.) y la aplicación de las reglas de resolución de las ecuaciones, todo lo cual se hace de forma predeterminada y precisa sin necesidad de intuiciones particulares. Pero sin olvidar que esto supone un mero uso mecanizado de algoritmos.

Por otra parte, el uso de la letra como incógnita obliga a ejercicios de abstracción:

— En primer lugar, las letras representan a algo a lo que se refieren, algo desconocido. Se deben realizar con ellas procesos de planteamiento que culminarán en una ecuación, que es la condición que debe cumplir (Chevallard, 1989) aquello a lo que las letras se refieren.
— Después, y actuando mediante reglas generales preestablecidas, se realizará un proceso automático de reversibilidad con el que se llega a aislar y, así, determinar la incógnita que es la concreción de lo referido.
— Al terminar el cálculo el proceso se cierra con una «des-simbolización».

Cuando se está en el primer paso, todavía aquel algo referido es preciso y tangible en cierta forma. En el segundo paso ya no importa lo que sea, solamente importa el proceso de cálculo. Es igual que la «x» represente un número abstracto, un número concreto (pesetas, melones o centímetros), un segmento u otra forma de magnitud. Precisamente debido a esa automatización del cálculo, que tanto facilitaba la resolución de ecuaciones, no parecía hacer falta la inteligencia y la habilidad del calculador, el álgebra para algunos de ellos empezó a ser considerada como de rango inferior al trabajo verdaderamente matemático. Pero el Álgebra era muy útil y siguió desarrollándose a pesar de todo. Esto permitió llegar al segundo momento importante en esta evolución.

⇒ Y una segunda ruptura durante el siglo XIX, en cuyo transcurso se produjo el paso del Álgebra Clásica al Álgebra Moderna. Del Álgebra como Método al Álgebra como Objeto.

Este importante cambio, consustancial con el que se produce en las formas de vida, se puede preciar en los escritos de importantes matemáticos, así:

- George Peacock (1791, 1858) fue uno de los fundadores de la Analytical Society del Trinity College en Cambridge. Este matemático inicia la aplicación del pensamiento axiomático en la Aritmética y el Álgebra.
- Augustus de Morgan (1806, 1871) puede ser considerado uno de los más claros iniciadores del Álgebra Abstracta pues, al considerar las letras y otros símbolos sin significado concreto, preconiza la idea moderna de que el objeto del Álgebra versa más sobre las funciones proposicionales que sobre proposiciones en sí.
- Boole (1815-1864), escribe que la Matemática no se reduce a la ciencia del número y la magnitud continua. Según él, la característica esencial de la Matemática es su forma. Hasta el punto de que si un tema se presenta con reglas precisas y sujeto a una lógica interna eso es matemática. Esto da todavía más carta de validez al Álgebra. Además con ello comienza la Lógica Matemática. Russell (1967), aceptando estas consideraciones, dice que Boole descubre la Matemática Pura.
- Galois (1811-1832), al crear el concepto de «grupo» y hacer de este concepto abstracto la idea central de la teoría de ecuaciones algebraicas, da por terminada el Álgebra Clásica en la que para las ecuaciones se encontraban soluciones básicamente a través de los radicales. Después de él, más o menos hacia 1850, los libros comienzan a reflejar el estudio de las Estructuras. El Álgebra se convierte, en gran medida, en la Teoría de las Estructuras.

Llegados a este punto, en conveniente una advertencia para observar que esta génesis del Álgebra Moderna muestra que la introducción prematura de la enseñanza de las estructuras en Matemáticas supone una inversión con respecto a la situación histórica en el desarrollo del conocimiento en general, no sólo del matemático. Esta inversión en la secuencia histórica ha demostrado sobradamente su ineficacia y su equivocada ejecución en la enseñanza, aunque tampoco esto puede afirmarse de manera radical, pues en circunstancias determinadas de la secuencia del conocimiento esas inversiones pueden ser didácticamente convenientes.

2. Diferentes usos de las letras

El uso de las letras en Matemáticas ha ido evolucionando a lo largo de los siglos. En la obra «Elementos» de Euclides, los números se representan por segmentos rectilíneos, y éstos a su vez por parejas de letras. Las letras mayúsculas se usan como signos atribuidos a puntos y cada segmento se encuentra representado por las dos letras correspondientes a sus extremos. Ya en el mismo texto se encuentran algunos segmentos signados por una sola letra. Todavía más adelante llegan a aparecer letras representando directamente a los números que son partes alícuotas o fracciones de otros. Los términos signo y símbolo deben ser cuidadosamente utilizados teniendo en cuenta que todo signo adquiere plenitud de significado cuando lo habita el oportuno símbolo. En los casos considerados cada letra representa un sólo número.

Al-Khowarizmi, en su «Álgebra», también utiliza figuras con letras pero su empleo es más irregular y no se asemeja al que pusiera en uso Euclides. Por su parte Jordano Nemorario (siglo XIII) en su «Arithmetica» empieza a emplear, de forma sistemática, letras para los números, en algunas exposiciones de propiedades cuyo enunciado y demostración se conforman y constituyen así en verdaderos teoremas algebraicos generales.

En esta pequeña prospección histórica se presenta, con cierto pormenor, la diferenciación entre el sentido asignado a los parámetros y el que iban ganando los significados de las incógnitas, lo que es una de las primeras y más importantes diferenciaciones en el uso de las letras en álgebra. La introduce Viète en el siglo XVI, contribuyendo con ello, de forma importante, al avance en la simbolización. Este matemático propone una forma de distinguir las magnitudes que se suponen conocidas y constantes de las desconocidas o incógnitas que se deben calcular; asignando para los números, como constantes, las letras: m, p,... y las vocales: a, e,... para los números variables. La letra «x», como incógnita, tarda en aparecer, y es Descartes (1596-1650), en su obra La Geometría, quien la emplea ya con claridad y distinción perseverantes. En ese tratado sobre la Geometría (1981: 281 y ss.) se concreta el modo actual de escritura con el uso de las primeras letras del alfabeto a, b, c,... para parámetros y constantes, y las últimas letras x, y, z,... para incógnitas y variables.

Con este breve apunte se pone de manifiesto que el uso de las letras en Matemáticas no surge espontáneamente, ni tiene una evolución lineal, más bien es como un juego de aceptaciones y rechazos, de precisiones y ambigüedades, en el que las distintas necesidades de desarrollo del pensamiento matemático de cada momento ha permitido y propiciado ir buscando soluciones a través de formas de expresión en las que segmentos, puntos, números..., y letras han permitido llegar a un buen ajuste entre signos y símbolos en los usos algorítmicos para resolver problemas en los que se implica la singular lengua matemática. Consideraciones no subestimables, en su enseñanza y aprendizaje.

Las letras se han introducido para expresar relaciones generales entre números y propiedades y se han aceptado como útiles; pero esta aceptación de su utilidad no ha sido uniforme. Por otra parte, la utilización de las letras fue muy variada y no se las consideraba como elementos matemáticos. Donde realmente se las empezó a estimar como tales elementos matemáticos ha sido en el álgebra y en sucesivos momentos comienza su clarificación, en clasificación y uso generalizado, de lo cual se deriva que ya no son todas las letras equivalentes, empiezan a seleccionarse para diferentes usos concretos y su importancia comienza a hacerse evidente.

3. De las concepciones de los alumnos

En el uso que los alumnos deberían hacer de las letras aparecen unos comportamientos que se repiten con tanta frecuencia como para estimarlos derivados de sus propias concepciones y que merecen una atención diferenciada. Así:

— Al considerar las letras como objetos, los alumnos las interpretan como si representaran a dichos objetos como iniciales de su denominación, en lugar de tomarlas como representantes del número de esos objetos. En este caso la expresión 7 m se interpreta como 7 manzanas —por ejemplo—. O también 3y se lee como 3 yogures, en lugar de interpretar que los operadores 7 y 3 son números que multiplican a los que hubiere previamente de manzanas o yogures.

— La letra con valor adjudicado corresponde con un comportamiento que se observa cuando, al aparecer las letras, los alumnos las substituyen inmediatamente por un valor que es elegido de formas arbitrarias y heterogéneas. Por ejemplo ante una expresión literal como: $a + b = 12$, muchos alumnos deciden que la única solución es: $a = b = 6$. Al preguntar a los alumnos que lo deciden el porqué de esa adjudicación responden que es: «porque son dos letras». Puede colegirse que el ser letras las hace, para ellos, equivalentes entre sí; homogeneidad de los elementos de una clase que es poco frecuente por lo demás. También se puede observar que, ante expresiones como: $b + d + f = 12$, los alumnos recurren a asignaciones de valores del tipo: $b = 2$, $d = 4$, $f = 6$. Interrogados estos alumnos, razonan que esos valores son adjudicados así porque la letra «b» es la segunda letra del alfabeto, la «d» la cuarta y la «f» la sexta. Lo que parece corresponder, en este caso, con una respuesta concreta que se ajusta a una situación real, respuesta de cierto valor positivo como muestra de capacidad para relacionar.

— Las letras de acompañamiento sólo son consideradas como algo que se debe escribir aunque no tenga un sentido matemático. Se puede apreciar este comportamiento en ejercicios como: «Añade 3 a 5n», dando el alumno el resultado de 8n, es decir, la letra estaba y sigue estando sin que eso afecte para nada a las operaciones entre números. Este efecto de acompañamiento puede degenerar en comportamientos en los que la decisión es eliminar las letras.

— Las letra desaparecidas, casuística que acontece cuando, al plantear al alumno un ejercicio como el anterior «Añade 3 a 5n», el resultado que elige es el de proponer simplemente 8 como solución. Se trata de que el alumno no desea escribir una letra que no va a tener en cuenta y que por tanto es innecesaria para la operación que realiza. En su concepción, el cálculo sólo afecta a los números y elimina aquello que no es una cifra para él.

— La letra como conjunto de números, cuando se quiere hacer referencia a su uso en expresiones con desigualdades como, por ejemplo: $x < 5$, es una concepción tardía para los alumnos y así se pueden observar comportamientos como el siguiente: se plantea ahora el ejercicio «Qué puedes decir sobre \`n´ si sabes que $n + p = 20$ y $n < p$?». En muchas respuestas los alumnos dicen que $n = 9$. No dan como respuesta el conjunto de números menores que 9, ni tan siquiera se dan dos respuestas posibles. El alumno busca un valor de respuesta único.

Observando estas concepciones de los alumnos y analizando el modo y la frecuencia con que se presentan se pueden formular algunas conclusiones con el contraste de su repetición como aval.

- La primera concepción que aparece es la de la letra como valor único. Este valor, además, es considerado como provisional o circunstancial. El alumno trata de substituir la letra cuanto antes por lo que él considera su auténtico valor.
- Hay que esperar un tiempo para que los alumnos puedan encontrar la concepción subyacente al hecho de aceptar valores múltiples, que aparecen, inicialmente, como valores sucesivos. Este tipo de comportamientos se ve en el ejercicio siguiente tomado del cuestionario — adaptación de un trabajo previo de Chevalard (1986)— que sirve de apoyo a este trabajo:

  «¿Qué puedes decir de \`p´, si $p = 3q + 7$ y sabes que $q < 4$?». En esta pregunta, la expresión $q < 4$ se interpreta primero como $q = 3$ y la primera respuesta es p = 16, pero luego viene la segunda respuesta que es p = 13, lo que corresponde a q = 2, y luego, todavía, la tercera respuesta que es p = 10, y que corresponde a q = 1. Aparecen, por tanto, sucesivamente, los valores posibles, aunque cada uno da lugar a una respuesta independiente.

- Aparece también, en algunos casos, una concepción de valores simultáneos. Este comportamiento daría como respuesta al ejercicio anterior p = 25 que se justifica por parte del alumno diciendo que «q es igual a 3, 2 y 1» lo cual, expresado por el alumno, queda así: p = 3 (3,2,1) + 7 = 25. Se puede observar que los números del paréntesis han sido en realidad sumados para calcular el resultado final de 25. Con lo que, en la expresión simbólica $q < 4$, ha resultado ser q = 6 debido a esta interpretación simultánea de los valores posibles de q.
- La concepción de la letra como conjunto de números se va desarrollando con la edad, la enseñanza y el aprendizaje consiguiente. En las observaciones estadísticas derivadas del cuestionario preparado para este fin, se puede descubrir cómo se va adquiriendo más rápidamente esta idea de la letra como conjunto de números en los casos en los que la enseñanza ha insistido más en ejercicios específicos de comprensión e interpretación de las símbolos. Teniendo en cuenta que la edad de los alumnos que cumplimentaron el citado cuestionario estaba entre los 13 y 15 años, lo claramente colegible es que no habían recibido una enseñanza previa que orientara su razón en el sentido de una búsqueda de abstracciones como debe ocurrir en una actividad educativa, naturalmente ejercida sobre lo educable, que es esa razón (González 2002 a y b).

4. Necesidad de un aprendizaje sistemático del uso de las letras como símbolos algebraicos

De todo lo observado, analizado y contrastado se puede inferir la conclusión de que es necesario introducir las letras de forma que se produzca un aprendizaje sistemático del uso de las mismas. En esta misma dirección y sentido se han realizado algunos trabajos concretamente, el Shell Centre for Mathematical Education de la Universidad de Nottingham tiene unas lecciones con el título «Thinking with letters» en su libro de Álgebra; lecciones que concretan y previenen aspectos como los señalados antes. De análogo sentido es una ponencia del Sixth International Congress on Mathematical Education (ICME 6) en Hungría, el contenido de cuya exposición es un trabajo titulado «Writting to learn Álgebra» de la Universidad de Louisiana. De ambos se puede obtener la conclusión de que estos trabajos deberían ser continuados y que son muchas más, todavía, las posibilidades de mejorar la forma de introducir las letras en Álgebra.

Una de las dificultades con las que se encuentra el alumno en su aprendizaje es la falta de familiaridad con este lenguaje. Cuando el profesor y el alumno se encuentran en la situación de usar una letra como símbolo de algo, deben conocer ambos la función que la letra está desempeñando y tener constancia de ello. Esta utilización le es habitual al profesor pero no así al alumno. Este último debe llegar a familiarizarse con una forma de expresión que no ha sido normal para él. Con el lenguaje materno ha obtenido la reafirmación de lo cotidiano que se va haciendo próximo y habitual para el ser humano. El lenguaje literal en Álgebra no es, en modo alguno, espontáneo y además se reduce, normalmente, al ámbito y a la temporalidad de la época de escolarización. La familiaridad debe ser buscada de modo explícito por la enseñanza para compensar la falta de ser cotidiana (Laborde, 1982). Familiaridad dirigida básicamente al buen dominio y conocimiento de ese lenguaje. Solamente así, los alumnos llegarán a poderse expresar a través de las letras, y de entender las informaciones que reciben en este código de trabajo. Sólo a través de esta familiaridad, las letras prestarán toda su potencialidad al trabajo matemático y de investigación escolar que los alumnos pueden y deben desarrollar.

La fuerza del Álgebra reside en su no-ambigüedad. La precisión es una de las bases de la potencia del razonamiento matemático, de su indeformabilidad. Ya Barthes, en sus «Mythologies» escribe, a propósito del lenguaje matemático, sobre la constancia y dureza de éste, dándole el nombre de lenguaje indeformable, añadiendo que utiliza todas las precauciones posibles contra la interpretación evitando que ninguna significación parásita pueda afectarlo. El lenguaje matemático constituyó el viejo sueño de Leibniz quién con su Característica Universal quiso hacerlo, desde sus peculiaridades, un instrumento objetivo de razonamiento universal altamente imparcial. Estas características hacen deseables las conclusiones obtenidas a través de ese razonamiento. Se puede confiar en su uso y en la fiabilidad derivable. Es importante que los alumnos lo conozcan, lo entiendan y lo sepan utilizar. Pero se debe tener muy presente que, al emplearlo, es necesario tener un perfecto conocimiento de las reglas del juego y del significado preciso de cada uno de los elementos empleados en las distintas situaciones. El uso de las letras y demás símbolos debe cuidarse y precisarse y es importante trabajar en la didáctica específica para que el aprendizaje de este uso se haga de modo especial y explícito.

5. Condiciones del alumno para este aprendizaje

Según el cuestionario antes citado, preparado y aplicado con la finalidad de dilucidar aspectos sobre el significado y uso de los símbolos en Álgebra, cuando se pidió a los alumnos que empezaran a emplear las letras de modo espontáneo, aparecen unos usos e interpretaciones de las mismas en los que se puede apreciar el siguiente orden de prelación por su frecuencia:

— La asignación de valor único es el primer uso que el alumno acepta para las letras, es decir, que éstas representen a un valor. Ese valor, como se ha indicado, tiende a ser considerado fijo y solamente desconocido de modo provisional o circunstancial. El alumno acepta la letra como necesaria para marcar el lugar que deberá ocupar el número en el mismo momento en que se pueda conocer. Este momento deberá ser lo antes posible y, por eso, el alumno lo buscará con urgencia, incluso usando recursos paramatemáticos, como puede ser el orden alfabético, según lo ya indicado. En esta interpretación el alumno espera que cada letra represente su propio valor (Filloy y Rojano, 1985). Es una representación a modo de icono. Una concreta letra como dibujo de un determinado número (Booth, 1987); identidad natural y espontánea entre un signo y el símbolo único que lo habita en cada caso, con una notable reducción del significado de símbolo (González, 2000). El alumno cree que el ejercicio sólo consiste en averiguar qué entidad tiene aquello que se esconde detrás de la representación.

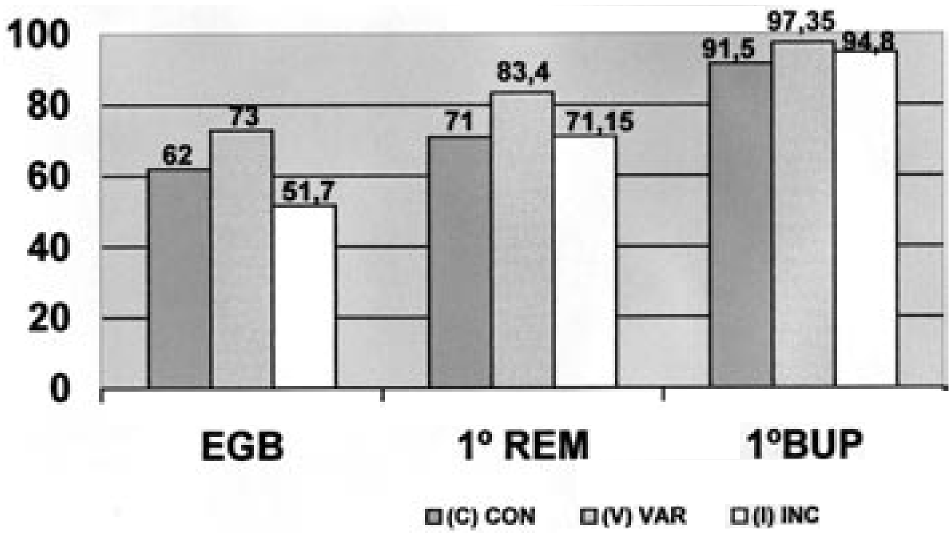
— La atribución de valores sucesivos, lo que sucede cuando el alumno comienza a aceptar la posibilidad de varios valores concebidos éstos como secuenciados. Lo que se aprecia, como ya se ha dicho, en el caso de ejercicios con desigualdades del tipo: $q < 4$, en las que «q» está implicada en los resultados posibles a los que se ajusta su variabilidad. El alumno interpreta la expresión simbólica comenzando generalmente por el valor $q = 3$ y admitiendo que también son posibles otros valores como $q = 1$ por ser éste menor que cuatro. Resistiéndose a interpretar la expresión como un conjunto de números.

— La consideración de valores simultáneos, tomados éstos como denominación de una manera de interpretar en la que la letra «q», de la desigualdad $q < 4$, es tomada por el alumno como la expresión de los valores naturales 1, 2 y 3, simultáneamente y así decide que «q» es igual a 6 que es la suma de uno más dos y más tres. A pesar del evidente e importante error que se produce, esta interpretación, constituye un avance respecto a las anteriores, pues acerca un poco más al alumno a la concepción de la letra como un conjunto de números, es decir, como símbolo.

Realizada una comparación, con los resultados estadísticos del cuestionario, para analizar cómo evolucionan en los alumnos las concepciones mantenidas sobre el concepto y uso de las letras en Álgebra como variables —VAR—, entre incógnitas —INC— y conjunto de números —CON—; dicha comparación se establece entre resultados de alumnos pertenecientes a la Enseñanza General Básica —EGB— con edad entre 13-14 años, alumnos de primero de Reforma de las Enseñanzas Medias —REM— comprendidos entre los 14-15 años y otros primero de Bachillerato Unificado Polivalente —BUP— también de 14 a 15 años. Este último grupo correspondía a la enseñanza impartida hasta ese momento en España a este nivel y que es la que fue substituida por la de la Reforma, que ahora también será cambiada, según toda previsión, ya realmente mandato legal. Toda la experiencia se realizó en un momento de gran interés por cuyo motivo es ahora retomada pues van a coexistir de nuevo situaciones en las que los alumnos tienen que transitar de los imperativos de una legislación a los de otra sin mediar una adecuada previsión. El grupo de 1.° REM es un grupo de Reforma, experimental, como otros muchos en España en aquellos momentos. Con todo, las cosas no han variado mucho, ni variarán ahora, en cuanto al problema aquí tratado; a cuestiones como éstas las leyes las dejan intocadas.

En el gráfico adjunto se puede ver la evolución positiva de las tres concepciones — secuenciadas en otro orden—. Esta evolución se puede considerar lógica tanto por el aumento de la edad de los alumnos como por la enseñanza recibida, pero se observa que la concepción en la que se logra menor proporción es la variación de lo estimado cuando las letras son tomadas como conjunto de números (91,5) a pesar de no ser la más baja (62 en EGB) inicialmente.

Comparación de concepciones



Otra observación interesante es que la concepción que más progresa es la de considerar a las letras como incógnitas tanto en REM como en BUP:

REM del 51,7% al 71,15% supone un progreso del 19,45%

BUP del 51,7% al 94,8% supone un progreso del 43,1%

Una explicación puede ser que este concepto es el que se trabaja con más insistencia en la enseñanza, concretamente a través del cálculo de ecuaciones. Otro aspecto importante, aunque no se hizo para ello ninguna previsión, es que se puede observar que el avance es más rápido en el caso de los alumnos de BUP que en los de REM para las tres concepciones. Esto planteó un fuerte interrogante respecto a la calidad de la enseñanza en lo referente a las consideraciones aquí estimadas sobre la reforma que se estaba preparando, lo que debía haber evidenciado la necesidad valorar las ventajas pero también los inconvenientes de aquel cambio. En cualquier caso conviene ser conscientes de las modificaciones que se pretendía implantar y de las consecuencias que de ellas se debían haber derivado. Pero eso es una inquietud universal ante toda novedad legislativa, cierto que inquietud conducente a escasos resultados prácticos.

6. Lecciones sobre desigualdades

Las cuestiones observadas y planteadas conducen, en buena lógica a crear unas lecciones nuevas sobre desigualdades algebraicas porque este es un objeto matemático cuya necesidad no se presenta realmente a los alumnos antes de los 14-15 años. Al tratarse de conceptos relativamente nuevos el alumno puede abordarlos sin ideas preconcebidas; lo que exige que las acciones didácticas se realicen de manera consecuente con la situación de partida del alumno. Es un cometido asignable a la preparación didáctica del profesor el que esa consecuencia sea bien atendida. A tal fin deberían construirse lecciones que fueran realmente eficaces en la enseñanza de las expresiones simbólicas con letras y su empleo, para lo cual es necesario analizar los ámbitos de trabajo en los que los alumnos se van a encontrar para aprovechar los que fueran más adecuados para estas iniciativas. Ámbitos de trabajo que, en el caso de aquellos en los que se desarrolla la actividad matemática son muy variados y, en cada uno de ellos, las características del trabajo matemático también son distintas.

En su investigación de tesis doctoral Douady (1984) descubre algo importante con respecto al tema, llegando a exponer las ventajas que, para el aprendizaje, supone ir cambiando de cuadros de referencia en la enseñanza. Así, los marcos de trabajo en los que los alumnos se encuentran con las desigualdades suelen ser: aritmético, algebraico, geométrico —gráfico—, lógico.

Las desigualdades en el marco aritmético no son una información interesante para el alumno; su interés por ellas ha sido completamente anecdótico. Que 15 es un número menor que 32 ($15 < 32$) es algo que el alumno sabe simplemente con leer 15 y 32 aunque no se escriban relacionados por el signo correspondiente de desigualdad. En el marco algebraico ya tiene interés una información como: $x < 15$ pues este dato es, o puede ser, importante en el esquema del ejercicio que se esté realizando. En el marco geométrico las desigualdades interesan para interpretar informaciones algebraicas. La interpretación de las gráficas ayuda a comprender problemas que, en la escritura algebraica, necesitan un esfuerzo de abstracción muy fuerte, aunque conviene no olvidar su también poderoso influjo educativo (González 1990 b). En el marco lógico aparecen expresiones en las que, a través de uniones e intersecciones, se expresan propiedades y teoremas (National Council 1989).

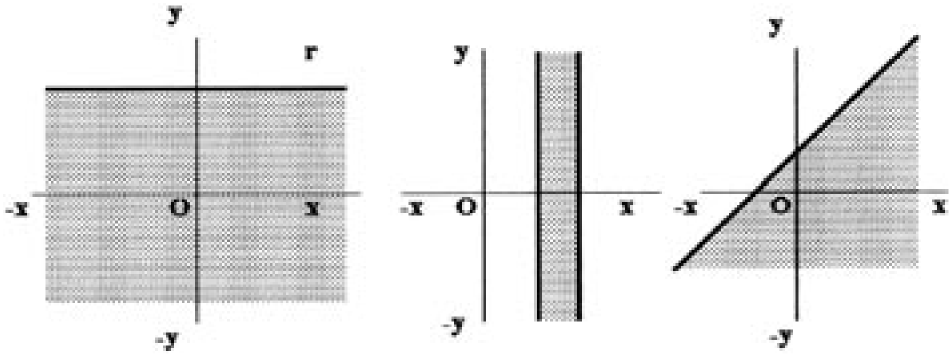
Ambas cosas las deja claras Dieudonné (1989: 228) cuando dice:

> *La sustitución del lenguaje algebraico por el lenguaje geométrico casi siempre aporta considerables simplificaciones y hace aparecer propiedades insospechadas escondidas bajo una montaña de cálculos.*
>
> *Así los modelos matemáticos de la Programación Lineal y la optimización se comprenden y se manejan mejor cuando se interpretan las desigualdades que contienen en términos de conjuntos convexos en un espacio de un número de dimensiones elevado.*

En las lecciones desarrolladas sobre el tema se ha buscado una forma de operar con los ámbitos geométrico y algebraico con el fin de producir estimulación en el ánimo del alumno para el desarrollo y comprensión del concepto de desigualdad. Las lecciones correspondientes se han preparado generando una situación «a-didáctica», como Brousseau (1989) la denomina, aunque se llama, entonces, a-didáctica a una situación que es la justa continuidad del aprendizaje, inevitable consecuencia de la actividad, trabajo didáctico que como tal se confirma. Con ella se trata de colocar al alumno en una postura en la que debe actuar sin que el profesor intervenga y ante la cual esa actuación del alumno va generando la información necesaria para que éste obtenga su propio conocimiento, es decir, una situación neta e intrínsecamente didáctica en sí y en cuanto a ella conduce, puesto que una forma esencial de comunicación continúa verificándose entre profesor y alumno, aunque la convencionalidad no sea normalmente percibida. Se trata, en este caso, de un juego de varias etapas entre dos contrincantes. El objetivo de la lección es la introducción de expresiones del tipo:

$$y < k \quad , \quad k' < x < k \quad , \quad y < x + k$$

Como representación algebraica de las zonas del plano correspondientes:



La primera etapa consiste en una situación de actividad en la que cada contrincante debe dibujar, en un plano de coordenadas cartesianas que mantiene oculto al contrario, una línea recta horizontal a la altura que desee. A continuación elige la zona de arriba o de abajo como su zona de pesca. Cada jugador tiene como objetivo adivinar la zona de pesca del contrario antes de que lo haga él. La localización se realiza mediante disparos efectuados por pares de coordenadas (a, b); un ilustrado juego de barcos en el que el puro juego puede eclipsar al aprendizaje matemático si el profesor no está oportunamente atento a los objetivos realmente pretendidos (González, 2000) —de aquí la necesaria continuidad de la acción didáctica—. Se les dice a los contrincantes: ganará el jugador que consiga averiguar exactamente cuál es la zona de pesca que ha dibujado el otro jugador y consiga expresarla de la forma más clara y breve posible. Es decir, el que consiga la codificación más eficaz. El juego se realiza varias veces, anotando los resultados, y variando las divisorias. Estas serán, luego, verticales, y después será una zona de pesca comprendida entre dos divisorias; primero horizontales y después verticales o en otras direcciones. Cada juego se considera terminado cuando los dos jugadores están de acuerdo en que uno de ellos conoce la zona de pesca del otro. En caso de duda, un jugador puede pedir al otro que le demuestre que conoce su zona de pesca haciendo dos aciertos dentro de ella.

La segunda etapa consiste en una situación de comunicación. Aquí se forman equipos y la mitad de cada uno de ellos debe elaborar un mensaje escrito con la información de una de las zonas de pesca reconocidas anteriormente. Ese mensaje debe ser descifrado por la otra mitad del equipo. Una vez expresadas las informaciones se puede introducir una situación de debate que suele ser muy interesante para el profesor pues pone al descubierto los procesos seguidos por los alumnos para la elaboración de las expresiones, así como algunas de las estrategias ideadas y la evolución de las mismas.

En el cuadro siguiente se observan algunas de las expresiones alcanzadas por alumnos de 1.° REM en una de las experiencias. El desarrollo del debate se grabó en vídeo.

EVOLUCIÓN DEL LENGUAJE

(17,1) ARRIBA Y ABAJO
VERTICAL DEL (16,1)

(6,0) IZQUIERDA
(1,1) NORTE

(–20,0) VERTICAL DERECHA

(3,5) (–3,5) NORTE

Y = 12 ARRIBA

Y > 12

Con el debate didáctico (Brousseau, 1990) y las votaciones se consigue ir depurando las expresiones a la vez que se busca la participación de todos los alumnos para que su implicación en las decisiones que se van tomando estimule su interés en lograr la mejor expresión matemática.

Otra de las virtudes del debate es que consigue reafirmar conocimientos anteriores que salen a relucir en la confrontación y ante la necesidad de argumentar y convencer al resto de los alumnos. También la verbalización de muchos conocimientos matemáticos anteriores supone un trabajo de clarificación y concreción de ideas. Un estudio sobre las condiciones de este debate didáctico y la forma de aplicarlo con éxito se realizó en la Universidad de París VII (Vergnaud y otros, 1986).

En la experiencia aquí citada (Díez Barrabés, 1995) se pudo observar claramente la aparición, en un momento dado, del conocimiento implícito. Se trataba de un semiplano horizontal cuya expresión debía ser: $y > 12$. Se había llegado a la expresión: $y = 12$ horizontal arriba.

Durante el debate hubo un alumno que dijo: La «y» tiene que ser mayor que 12. Sus compañeros le dieron la razón y a partir de ese comentario fue muy rápido llegar a la escritura de la expresión adecuada. A lo largo del debate se fue produciendo una evolución del lenguaje del plano gráfico «π» hacia un lenguaje simbólico en «R^2». Los alumnos llegaron a obtener las expresiones de los semiplanos en forma de desigualdades, como se había propuesto. En uno de los grupos de 1.° BUP incluso obtuvieron la escritura correspondiente a un semiplano en el que la recta que lo definía estaba inclinada 45.° con lo que la expresión a conseguir ($y < x + 5$) presentaba características muy diferentes a las de las primeras expresiones encontradas: la relación entre las dos coordenadas «x» e «y».

Como conclusión de la experiencia conviene decir que es posible mejorar los métodos para introducir el simbolismo matemático (González, 1990 a). Los alumnos son capaces de redescubrir con su propia experiencia el camino recorrido por un concepto o una técnica matemáticos hasta llegar a adquirirlo y poderlo manejar en su estado actual (Jiménez, 1990).

Los conceptos logrados entran a formar parte de sus conocimientos anteriores, perfectamente integrados con ellos, en fidelidad a los viejos principios retomados por el constructivismo (Ausubel y otros, 1987). El alumno que ha vivido la experiencia de la adquisición de un concepto matemático en formas semejantes a ésta, se siente propietario del conocimiento adquirido. Él estima que ha contribuido a descubrirlo. Lo siente como algo suyo. Además, ante una nueva experiencia, ante un nuevo ejercicio, no intentará simplemente recordar lo que había que hacer en casos parecidos; tampoco se sentirá impotente por no saber; por el contrario, se verá capaz de aplicar su propio conocimiento, no como mera repetición sino como una base de experiencia que le permitirá descubrir nuevos métodos y conocimientos: acción de conocer como resultado de reconocer la falibilidad e incompleción de lo conocido (González, 2002 b).

7. Referencias bibliográficas

Ausubel, D., y otros (1987). *Psicología Educativa*. México: Trillas.

Booth, L. (1984). *Erreurs et Incomprehensions en Algèbre Elementaire*. Petit X, n.° 5: 5-17.

Booth, L. (1987). Equations Revisited. Proceedings of the IX PME. *Psycology Mathematic. Education*: 282-288.

Brouseau, G. (1989). *Fundamentos de Didáctica de la Matemática*. Zaragoza: Publicaciones del Seminario Matemático «García Galdeano», Serie II.

— (1990). Le Contrat Didactique*:* Le Milieu. *Recherchers en Didactique des Mathématiques*. Vol. 9.3: 308-336.

Cardano, G. (1968). *Artis Magnar, Sive de Regulis Algebricis*. Cambrigde, Mass.: M.I.T.

Chevallard, Y. (1985). *Le Passage de L´Arithmétique Á L´Algébrique Dans L´Enseinement Des Mathématiques Au Collège (Première Partie): Lévolution de la Transposition Didactique.* Petit X: 51-94.

— 1989). *Le Passage de L´Aritmètique... (Deuxième Partir): Perspectives Curriculaires: La Notion de Modèlisaton*. Petit X, n.° 19: 43-75.

Descartes, R. (1981). *Discurso del Método. Dióptica, meteoros y geometría.* Madrid: Alfaguara.

Díez Barrabés, M.ª M. (1995). *Sobre la Simbolización en el Álgebra. Aplicación al Proceso de Aprendizaje de las Desigualdades en Educación Secundaria*. Tesis Doctoral. Madrid: U.C.M.

Filloy, E., y Rojano, M. (1985). Obstructions to the Adquisition of Elemental Algebric Concepts and Teaching Strategies. Proceedings of the IX PME. *Psycology Mathematic. Education:* 154-158.

Giménez, J. (1990). *Elementos de Álgebra Que se Conocen en la Escuela. Una Investigación en el Marco de la Formación del Profesorado*. Comunicación Presentada al primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Sevilla.

González, F. E. (1990a). Sobre la Situación y el Significado de la Didáctica. *Revista Complutense de Educación*. Vol. I (1): 31-54.

— (1990b). Sobre la Fundamentación y el Valor de la Didáctica. *Revista Complutense de Educación*. Vol. I (2): 241-266.

— (2000). Investigación y Actividad Educativa. Una Concreción a la Diversidad Social y Cultural. *Revista Profesorado*. Universidad de Granada. Vol. IV, n.° 1: 97-131.

— (2001). *Acerca de los fundamentos de la actividad educativa*. Madrid: Universitas (en preparación).

— (2002a). La Actividad Educativa en la Sociedad de la Globalización. *Arbor*, n.° 681, tomo CLXXIII, septiembre 2002: 19-38.

— (2002b). Generación del Conocimiento y Actividad Educativa. *Revista Complutense de Educación*. Vol. 13, N.° 1: 11-75.

Laborde, C (1982). *Langue Naturelle Et Ècriture Symbolique. Deus Codes en Interation*. Thèse de'Etát.

Malet y Paradís (1984). Els Origens Y Lénseyament de L´Álgebre Simbólica. (1478-1545). *I.C.E.*, vol. I. Universitat de Barcelona.

National Council of Teachers of Mathematics (1980). *A Source Book of Applicatons of School Mathematics*. Preparet by a Join Commiteed of Mathematical Association of America And The N.C.T.M.

— (1989). *Research Agenda For Mathematics Education.* Vol: 4. Reasearch Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Ed. Lawrence Erlbaum Associates & N.C.T.M.

Piaget, J., y García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: S. XXI.

Russel, B. (1967). *Los Principios de la Matemática*. Madrid: Espasa-Calpe.

Scheneider, O. (1979). *Le Passage Des Équations Numériques Aus Equations Paramétriques en Classe De Seconde.* Aix-Marseille: I.R.E.M.

Vergnaud, Cortés, Favre-Artigue (1986). *Introduction de L'Álgèbre de Débutants Faibles. Problèmes Épistemologiques Et Didactiques*. Actes IV École Dè'Té. París VII. Orleans: I.R.E.M.