

¿Qué puede decir el sociólogo del conocimiento de $2 + 2 = 4$?

David Bloor

(Traducción: J. Rubén Blanco)

Zweifle an allem wenigstens einmal, und wäre es auch der Satz: zweimal zwei ist vier. [Duda de todo al menos una vez, incluso de la proposición «dos más dos son cuatro».]

(G.C. Lichtenberg)

1. A los sociólogos les interesan profesionalmente los aspectos *convencionales* del conocimiento. Por tanto, intentaré identificar los componentes convencionales de los conceptos «2» y «4» y «suma». Las convenciones son formas compartidas de actuar que, en principio, podrían ser de otra manera. Son acuerdos contingentes, no necesarios. Así, es convencional que conduzcamos por el lado de la carretera por el que lo hacemos, y (si hiciera falta probarlo) podríamos señalar a los que conducen por el otro lado. Incluso si, de hecho, todos condujéramos por el mismo lado, podríamos imaginar fácilmente la alternativa. Por lo tanto, demostrar la *convencionalidad* supone *demostrar posibilidades* alternativas. Aunque afirmar esta condición necesaria es fácil, no siempre lo es tanto satisfacerla en la práctica. De un lado, nuestra imaginación es limitada.¹ De otro lado, las candidatas alternativas suelen dar con objeciones: razones para soslayarlas, trivializarlas o reinterpretarlas de manera que su carácter de alternativas se desdibuje.

Dado que éste será un rasgo importante de la siguiente discusión, permítanme extenderme unas líneas sobre él. Supongamos que un antropólogo quisiera demostrar el carácter convencional de la moralidad. Esto podría hacerse mostrando modelos alternativos de conducta aceptada —por ejemplo, sociedades donde la poligamia es lo normal—. Yo lo consideraría una demostración acertada. Sin embargo, siempre podría oponerse que no se trata de una *moralidad* alternativa, sino de absoluta *inmoralidad*. Así se soslaya el candidato propuesto. Dudo que haya algo que el antropólogo pudiera decir para replicar al absolutismo y al esencialismo de este tipo. Así que es mejor reconocerlo por adelantado.

Afortunadamente, no todas las estrategias esencialistas son tan intratables como el dogmatismo moral. Supongamos que se dice que el juego del ajedrez es una estructura convencional. Esto se podría justificar observando que las reglas podrían haber sido diferentes. No sería co-

recto negarlo sobre la base de que entonces la variante del juego simplemente no sería el ajedrez. Tal réplica al convencionalista sería correctamente rechazada como pedante. Sin embargo, debemos estar alertas al hecho de que los movimientos superficiales de este tipo pueden realizarse y resultar plausibles.

Sólo un preliminar más. A menudo se dice que $2+2=4$ es un «universal cultural», esto es, algo que todo el mundo parece creer. Conviene que adelante algo sobre los universales culturales. Un ejemplo simple ayudará a orientarnos. La *comida* es un universal cultural porque todas las personas han de comer para sobrevivir. ¿Excluye esto que un sociólogo tenga cosas significativas que decir sobre la comida? Claramente no, porque todavía existe la cuestión de *cómo* come la gente, *quién* come *qué* y *cuándo*, y con *quién*. Podríamos decir que mientras la «nutrición» es una categoría biológica, «el alimento» es una categoría social. Y *no* comer es también una respuesta a las demandas del mundo natural. El «ayuno» coexiste con el «banquete» como una categoría cultural. Ambas son instituciones desarrolladas en el terreno de la necesidad biológica. Debemos ver si pueden aplicarse ideas y distinciones análogas en el caso de $2+2=4$. ¿Pueden dividirse los números de acuerdo con sus aspectos sociales, físicos y biológicos al modo como podemos hacerlo con la comida?

2. Entremos en materia. He aquí un argumento breve y sencillo que, si fuera correcto, establecería el carácter sociológico de $2+2=4$. Puede mantenerse que la aritmética es un juego que se juega con símbolos. En este juego, los símbolos se manipulan de acuerdo con ciertas reglas. Estas reglas son convencionales y fueron seleccionadas por alguna forma de elección colectiva. Son creadas y sustentadas socialmente, de modo que la aritmética es por completo un fenómeno social. Q.E.D.

Esto es una versión simple de lo que podría denominarse «formalismo». Reduce la aritmética al nivel del juego del ajedrez. Puede argumentarse en favor de esta posición, por ejemplo, que es consistente con el hecho importante de que hay aritméticas *alternativas*. Conocemos juegos alternativos que se pueden jugar con los símbolos aritméticos. Por ejemplo, en algunos sistemas aritméticos finitos, $2+2$ *no* es igual a 4. En base 4, $2+2=0$, mientras que en base 3, $2+2=1$. Esto es justo lo que el sencillo argumento predeciría.²

Sin embargo, este argumento tiene defectos. Aquí se plantean tres de ellos:

- i) No ofrece explicación alguna de por qué hay o puede haber aritmética *de algo*, mientras que el ajedrez *no es* sobre nada. Esto convierte en un enigma el hecho de que la aritmética puede ser *aplicada*.
- ii) No dice nada del rol de la *prueba* en aritmética. Seguramente podemos *probar* que $2+2=4$ —¿no lo hicieron Russell y Whitehead?— y esto parece añadir al argumento un elemento de *necesidad* que es extraño a su sentido básico.
- iii) ¿No sobrevalora este argumento la posibilidad de alternativas, por ejemplo, de los sistemas en los cuales $2+2=4$? La aritmética normal, donde $2+2=4$, parece *universal*, lo que sugiere que debe estar basada en algo más que en una convención social arbitraria.

Es evidente que el argumento breve necesita suplementarse. Si queremos permanecer dentro de un marco naturalista hay sólo una manera de hacer justicia a la *referencia* de los términos aritméticos, a la *aplicabilidad* de la aritmética y a su *amplia aceptación*. Debemos introducir el *mundo empírico*, algo común a todos. Veamos, pues, la teoría empírica de la aritmética, saltando de la «tesis» del formalismo a la «antítesis» del empirismo. Esta forma de expresarnos indica que el argumento no acabará aquí: habremos de producir una «síntesis» —a la cual podemos aproximarnos mediante el empirismo—.

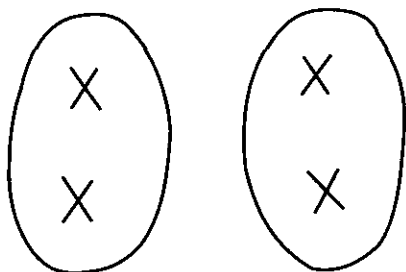
3. Una teoría empirista de la aritmética tiene mucho de encomiable. Quizá es el más subestimado de los enfoques clásicos.³ Ciertamente, se adapta al hecho de que si preguntamos a la gente *por qué* cree que $2+2=4$, a menudo obtendremos una versión del empirismo. La gente no suele decir: «es un juego arbitrario que me gusta jugar con símbolos». Más bien, dirá: «mira, aquí hay dos manzanas, «una», «dos». Entonces cogen otras dos y dicen «una, dos». Luego reúnen ambos pares y concluyen contándolas: «una, dos, tres, cuatro».

La mayoría de la gente aceptaría esto como una explicación adecuada de *por qué* creen que $2+2=4$, de *qué* es lo que creen, y como una prueba adecuada de la *verdad* de esa creencia. Las personas sofisticadas, sin embargo, no suelen aceptar esta prueba. Creen que puede exigirse y

lograrse más. Todo lo que la prueba *naive* ofrece es una verdad sobre cuatro manzanas; no establece una necesidad atemporal sobre el número 4. Se basa, dicen, en una confusión de procedimientos simplemente inductivos con los verdaderamente matemáticos. Aquí, por tanto, existe un pequeño pero significativo hecho sociológico por derecho propio: existe una distribución social de la creencia sobre lo que pasa como una prueba adecuada de $2+2=4$. De quién está en lo cierto en este caso —el ingenuo o el sofisticado— me ocuparé en breve. Por el momento, veamos lo que el sociólogo del conocimiento podría decir sobre el intento general para fundamentar una aritmética simplemente en nuestra percepción y conocimiento de los objetos materiales.

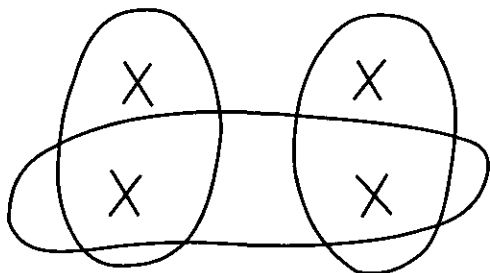
4. Aquí tenemos lo que dijo un famoso, aunque idiosincrásico, sociólogo del conocimiento. Me refiero a Ludwig Wittgenstein. En sus *Remarks on the Foundations of Mathematics*⁴ imagina a alguien que dice:

«Sólo tienes que mirar esta figura



para ver que $2+2=4$ », Wittgenstein replica:

Entonces me basta con mirar la figura



para ver que $2+2+2$ son 4 (RFM, I, 38)

¿A dónde quiere llegar Wittgenstein? Detecto dos cuestiones. *Primera*, nos está diciendo que

simplemente confrontar dos objetos no es lo mismo que tener el concepto de «dos», confrontar cuatro objetos no es lo mismo que tener el concepto de «cuatro», y percibir dos grupos de dos objetos yuxtapuestos no es lo mismo que tener el concepto de «suma». *Segunda*, nos dice que para extraer el significado aritmético de la figura tenemos que analizarla y responder a ella de cierto modo. Por ejemplo, hemos de dibujar las líneas en torno a las cruces precisamente de esa forma, no de esa otra. Empleando la terminología preferida de Wittgenstein, debemos responder a la figura utilizando una «técnica» específica. Debemos dominar una técnica, y quienes lo han logrado ven la figura de una forma que les lleva a escribir « $2+2$ », y no « $2+2+2$ ».⁵

¿Está Wittgenstein en lo cierto? Podría objetarse que literalmente *podemos* ver que hay dos conjuntos de dos cruces en la página, que el carácter numérico de la figura nos es inmediatamente evidente. El argumento se basa, creo, en lo que llamaremos *posesión de conceptos*, y Wittgenstein es muy claro sobre esto. Sus asertos sobre los números son exactamente iguales a los que hace sobre el color. No debemos pensar, dice, que tenemos el concepto «rojo» sólo porque veamos un objeto rojo. Su idea es que ver un objeto rojo —y que se nos diga que es «rojo»— no establece, por sí mismo, cómo vamos a emplear la palabra subsecuentemente. Es el paso a casos nuevos, y el uso subsecuente de la etiqueta, lo que constituye su significado; y éste es el criterio de que poseemos el concepto. En breve, Wittgenstein extiende a los conceptos numéricos todas las consideraciones que aplica a la definición ostensiva y a su uso. Es decir, nos invita a apreciar el carácter problemático del paso de un caso a otro. Lo que pasa como la aplicación *correcta* de «dos», al igual que con la aplicación *correcta* de «rojo», deriva de su rol en un juego de lenguaje compartido, y esto nos lleva más allá de la aprehensión inmediata de las cruces en una página frente a nosotros.

El aprendizaje ostensivo de los conceptos de los números, por supuesto, no consiste solamente en que a uno le señalen ejemplos de dos, tres o cuatro cosas. Consiste también en adiestrar en la técnica de contar y de sumar. Se nos *instruye* en estas técnicas, dice Wittgenstein, hasta que adquieren un carácter obvio o rutinario. De hecho, nuestro sentido de la inexorabilidad de las matemáticas es un producto de la inexorabilidad de este aprendizaje.⁶ De nuevo, experimenta-

mos con las propiedades numéricas de los grupos de objetos, o nos las muestran. Por ejemplo, vemos cuatro ejemplos divididos en dos grupos de dos, que primero se separan y luego se combinan. Estas operaciones nos impresionan la *fi-sionomía* del número.⁷ Retenemos ciertos patrones memorables. Lo que empieza como un experimento llega luego a tener un rol diferente como una imagen o criterio de suma correcta.⁸

Dos cuestiones merecen ser enfatizadas en esta exposición. *Primera*, nada en ella critica implícitamente la prueba ingenua de $2+2=4$ que usa manzanas. Esa actuación es precisamente la exhibición de una técnica que puede ser aplicada y re-aplicada: a guijarros, a marcas sobre papel, a lo que sea. En otras palabras, la prueba ingenua exhibía un *paradigma* de $2+2=4$.⁹ Y esto, para Wittgenstein, es inapelable. *Segundo*, debemos recordar el rasgo más importante de la descripción de Wittgenstein del aprendizaje ostensivo. El aprendiz debe ir de los casos usados en la instrucción a casos nuevos. El profesor sólo puede ofrecer un número finito de ejemplos. ¿Cómo se da el paso siguiente? De acuerdo con Wittgenstein, no porque captemos alguna esencia o porque el uso subsecuente está *ya presente* de alguna manera misteriosa que ha de aprehenderse por alguna forma de ultra-percepción.¹⁰

La idea es que debemos resolver por nosotros mismos cada caso percibiéndolos como similares a casos previos. Wittgenstein usa aquí los términos «analogía» y «paradigma». Por fortuna, en muchos casos procedemos automáticamente, incluso ciegamente. No experimentamos ningún problema, pero no porque el camino correcto ya esté trazado de antemano. Ni debemos suponer erróneamente que la aplicación automática de una técnica, o el seguimiento ciego de la regla de un individuo, constituye por sí mismo un criterio del proceso *correcto*. Un estándar, insiste Wittgenstein, debe ser algo externo, esto es, externo al individuo.¹¹ Si no fuera así, la noción del seguimiento correcto de la regla o de la aplicación correcta de conceptos estaría a merced del juicio individual, con toda su idiosincrasia y variación. Por esta razón, Wittgenstein insiste en el carácter colectivo y convencional de las reglas y los conceptos; acentúa «el uso y la costumbre»,¹² y afirma que las «matemáticas forman una red de normas».¹³

Demos un nombre al análisis de Wittgenstein. Dado que su punto esencial es que el aprendiza-

je debe proceder sobre la base de un rango finito de ejemplos —vgr., un número finito de casos de una regla— podría denominarse FINITISMO. Sin duda la palabra tiene otras connotaciones, pero adopto su uso en este contexto de Mary Hesse.¹⁴

5. Ahora tenemos todos los elementos de la «síntesis» que anuncié al principio. El enfoque excesivamente formalista (el argumento breve con el que empecé) se ha mezclado con algunas consideraciones prácticas extraídas de un enfoque empirista de la aritmética. El ejemplo de Wittgenstein y su descripción finitista del significado nos muestra cómo mantener ambas cosas a la vista. Ahora tenemos la base de un análisis sociológico, esto es, convencionalista, de $2+2=4$. Pero para avanzar en este sentido debemos superar dos obstáculos. Aquí tenemos el primero.

Incluso si aceptamos que bajo la definición de ideas aritméticas subyacen técnicas convencionalizadas para manipular objetos, aún podría parecer que la utilización subsecuente de esas ideas no puede ser un asunto de convención. ¿No seguimos sus *implicaciones lógicas*? La experiencia y la convención podrían servir para introducir lo que debe contar como «2» y «4» y «más» e «igual», pero una vez que las ideas han recibido su significado, seguramente la mente debe seguir ese significado. En este punto transcendemos el mundo y la sociedad y entramos en un nuevo ámbito, el ámbito de la lógica y de la verdad matemática como tal. Esta es una imagen persuasiva, quizá incluso natural. No puedo *probar* que sea falsa, pero puede hacerse justicia a los hechos con la alternativa, con la imagen finitista que acabo de bosquejar.

Asumamos que acabamos de aprender a contar y reflexionemos sobre nuestra condición desde una perspectiva finitista. Confiamos en nuestra nueva habilidad, así que zarpamos con ella hacia el complicado mundo empírico que nos circunda. Contamos toda clase de cosas. Su distribución espacial y temporal, incluso la naturaleza de los objetos, nos importa poco. Podemos contar sucesos, ideas, sentimientos y también manzanas y guijarros. Aplicamos nuestra técnica en toda suerte de nuevas circunstancias. Hasta podemos contar las mismas cosas que usamos para contar, por ejemplo, diciendo «hay tantos números pares entre 1 y 10 como números impares». Nadie tiene porqué habernos advertido que podemos o debemos hacer esto: tan sólo aplicamos nuestras técnicas por nosotros mis-

mos y sacamos nuestras propias conclusiones, y casi siempre los demás están de acuerdo.

Envalentonados, exploramos con más audacia. Construimos una rueda y pintamos unos números sobre el perímetro, digamos, 0, 1, 2, 3. Luego, giramos la rueda y contamos los números según pasan; la giramos un número tras otro y decimos «uno más». Pasamos al dos y decimos «1, 2». Conforme giramos la rueda en una dirección pensamos en nosotros mismos sumando, sumando 1 cuando pasamos de un número al siguiente, sumando 2 cuando pasamos dos números. Girando en el otro sentido, de 3 a 2, nos pensamos a nosotros mismos restando. Y sentimos al hacerlo la misma *naturalidad* que sentíamos antes cuando llevábamos nuestra técnica de contar de una circunstancia empírica a otra. Y hacemos bien: no hacemos sino aplicar a un nuevo caso lo que hemos aprendido. Nada en nuestra exposición previa a casos de dos, ni en cualquier empleo previo del numeral dos, entra en conflicto con lo que estamos haciendo. Lo mismo se aplica a sumar. Hemos ampliado con éxito el rango de operaciones concretas en que consiste sumar desde agrupar cosas físicas a verlas pasar ante nosotros, hasta hacerlo de memoria. ¿Por qué no ha de valer también? Entonces, por supuesto, hacemos el inevitable descubrimiento: ponemos la rueda en 2, y la giramos de forma que sumamos otro 2, y volvemos al cero. $2+2=0$.

Recordemos que aludí a esta ecuación en conexión con el «argumento breve». Dije que estaba en base 4, y la caractericé como un «juego» distinto que podíamos jugar con símbolos. Ahora la presento como un descubrimiento cuasi-empírico que se le podría ocurrir a alguien que entrase en el mundo equipado con un conjunto de técnicas convencionales. El cambio de énfasis es importante. Quiero librarme de la idea de que existe algún conjunto pre-existente de reglas para generar la ecuación $2+2=0$ —un juego o sistema pre-existente—. Quiero que pensemos en ello como una posible aplicación de conceptos *tal como han sido adquiridos y empleados previamente*. El finitismo nos invita a realizar el experimento de descartar una imagen de la aplicación de conceptos y reemplazarla por otra. No pensemos en el camino que hay ante el aprendiz como si ya estuviera cartografiado como una serie de aplicaciones correctas y equivocadas de lo que ha aprendido, o como este o ese sistema. Supongamos, en cambio, que los diversos usuarios de

conceptos proceden de cualquier manera que les parece natural. Una vez que se ha introducido un conjunto de términos, tales como «2» y «4» y «sumar», la mente del usuario no se ve arrastrada (en este modelo) a lo largo de unos etéreos raíles —esto es, raíles dispuestos por el «significado» del concepto (y que se prolongarían, como si dijéramos, hasta el infinito)—. Más bien contamos sólo con contingencias locales que cuentan para cada nuevo acto de aplicación. Nos movemos, como dijo J.S. Mill, de particular en particular. Sólo contamos con nuestros hábitos, disposiciones y propósitos, con nuestras aplicaciones previas y nuestro sentido de la similitud y la analogía con el caso presente. Y, por supuesto, con nuestras interacciones con los demás. ¿Qué harán otros con $2+2=0$? Estas son las contingencias finitas a partir de las cuales debemos construir colectivamente nuestro sentido de lo correcto o de lo equivocado del próximo caso.

Continuemos el argumento. En algunos casos $2+2=4$. ¿Qué hacer? Caben varias respuestas. El resultado anómalo podría ignorarse, verse como una rareza trivial y permitir que coexista al lado de $2+2=4$. Alternativamente, podría verse como una perversión abominable del verdadero y propio contar y erigir una barrera de definiciones defensivas para excluirlo. Podría, en principio, supongo, tratarse como una refutación de la ecuación estándar, un ejemplo falsador que intenta desacreditar todo el procedimiento. O podría juzgarse como un tipo de operación distinta del proceso normal de contar, un tipo diferente de aritmética que debe ser estudiada en sus propios términos. Y entonces surgiría la cuestión de definir la relación entre los diferentes tipos: ¿tienen el mismo estatus o uno tiene un rol derivado o parasitario y existe vicariamente?¹⁵

Para el finitismo, no hay una respuesta «correcta» implícita en lo anterior. No se trata de «descubrir» el estatus correcto que merece el descubrimiento de que $2+2$ puede sumar algo distinto de 4. Se trata de *decidir*. El estado actual de la cultura, el contexto en torno al nuevo resultado y los intereses que conforman nuestras prácticas, incidirán en la decisión. Se precisa un acto de discreción, no un descubrimiento. Esta decisión llegará a ser un nuevo elemento de convención en el argumento. Así pues, la descripción convencionalista ha vencido el primer obstáculo. No concierne sólo a las definiciones, sino que también ilumina la denominada «extracción» de sus implicaciones.

6. Veamos el segundo obstáculo, que atañe a la prueba. Si podemos *probar* que $2+2=4$, entonces seguramente todo lo que se ha hablado de «discreción» y de «ir de caso a caso», como si cada paso fuese creativo y problemático, *debe* estar equivocado. Así que veamos una prueba; no la prueba ingenua que consistía en contar manzanas o guijarros, sino una prueba rigurosa y lógica. Necesitamos saber si la prueba realmente socava la descripción sociológica finitista que está emergiendo.

Voy a reproducir la prueba de $2+2=4$ discutida por J.L. Mackie en un artículo titulado *Proof*.¹⁶ Lo que tengo que decir sobre esto es sólo un eco de los sagaces comentarios de Mackie en este agudo y provocador artículo. He aquí la prueba:

1. $(\exists r) (\exists s) [r \in K. s \in K, r \neq s. (w)$
 $\{w \in K \supset (w=r \vee w=s)\}]$.
 $(\exists t) (\exists u) [t \in L. u \in L, t \neq u. (x)$
 $\{x \in L \supset (x=t \vee x=u)\}]$.
 $(y) [y \in K \supset \sim y \in L]. (z)$
 $[z \in M \equiv (z \in K \vee z \in L)]$ - supuesto.
2. $a \in K. b \in K. a \neq b. (w) [w \in K \supset (w=a \vee w=b)]$
 -de 1, por simplificación y E.I.
3. $c \in L. d \in L. c \neq d. (x) [x \in L \supset (x=c \vee x=d)]$
 -de 1, por simplificación y E.I.
4. $a \in M. b \in M. c \in M. d \in M$ -de 1, 2 y 3,
 usando U.I. etc.
5. $a \neq c. a \neq d. b \neq c. b \neq d$ -de 1, 2 y 3,
 usando U.I., Id., etc.
6. $e \in M$ -supuesto.
7. $e \in K \vee e \in L$ -de 1 y 6.
8. $e=a \vee e=b \vee e=c \vee e=d$ -de 2, 3 y 7
9. $(x) [x \in M \supset (x=a \vee x=b \vee x=c \vee x=d)]$
 -de 6-8 por C.P. y U.G.
10. $a \in M. b \in M. c \in M. d \in M. a \neq b. a \neq c. a \neq d.$
 $b \neq c. b \neq d. c \neq d.$
 $(x) [x \in M \supset (x=a \vee x=b \vee x=c \vee x=d)]$
 -de 2, 3, 4, 5 y 9.
11. $(\exists r) (\exists s) (\exists t) (\exists u) [r \in M. s \in M. t \in M. u \in M.$
 $r \neq s. r \neq t. r \neq u. s \neq t. s \neq u. t \neq u.$
 $(x) \{x \in M \supset (x=r \vee x=s \vee x=t \vee x=u)\}]$
 -de 10 por E.G.
12. (K) (L) (M) [(1) \supset (11)] -de 1-11
 por C.P. y U.G.

La prueba emplea la definición de número que proviene de la tradición de Frege y Russell. El número dos es el conjunto de los conjuntos con dos elementos. El número cuatro es el conjunto de los conjuntos con cuatro elementos, etc. Hay objeciones a esta definición, pero no son centrales para nuestros problemas.¹⁷

Veamos las primeras líneas de la prueba. Si llamamos a un conjunto con dos elementos un «grupo-dos», y a un conjunto con cuatro elementos un «grupo-cuatro», entonces se afirma lo que sigue. La línea uno introduce un grupo-dos llamado K, la línea dos un grupo-dos llamado L. La tercera línea introduce un grupo llamado M formado por los elementos de K y L. Véase cómo preparan la escena de la prueba. Más en concreto, la línea uno dice: existe un r y existe un s, y r pertenece al conjunto K, y s pertenece al conjunto K, y r no es lo mismo que s; y para todo w, si w pertenece a K, o bien $w=r$ o $w=s$. La línea dos repite esto para los dos elementos t y u del conjunto L. En la tercera línea se lee: para todo y, si y pertenece a K entonces y no pertenece a L, y para todo z, si z pertenece a M, esto equivale a que z pertenece a K o z pertenece a L.

Los pasos 2 y 3 repiten esta información de una manera que elimina los cuantificadores existenciales. En vez de decir que existe al menos un objeto r, se hace referencia a un objeto particular, denominado aquí a. Y lo mismo para las letras s, t y u. Por medio de la denominada «instanciación existencial», podemos hablar ahora de los objetos a, b, c y d. Los pasos subsecuentes manejan a, b, c y d hasta que llegamos al paso 10, que nos dice que M es un grupo consistente en y sólo en objetos a, b, c, y d. El paso 11 reintroduce los cuantificadores, y el paso 12 dice que para todos los conjuntos K, L y M, si K pertenece al conjunto de los grupos-2 y L pertenece al conjunto de los grupos-2, y no tienen elementos comunes, y M se obtiene al unir los miembros de estos grupos, entonces M es un grupo-4. En el idioma de los *Principia Mathematica*, esto significaría que $2+2=4$.

Podríamos tener aún algunas dudas sobre si realmente esta prueba nos dice que $2+2=4$, puesto que $2+2=4$ es una *ecuación*, y la conclusión de la prueba es una *implicación*. Las implicaciones y las ecuaciones son, seguramente, diferentes. Esta fue una objeción que Frederick Waismann usó contra el trabajo de la escuela logicista.¹⁸ No me extenderé en ello porque Mackie tiene algunas observaciones críticas de interés más in-

mediato. Mackie afirma que, pese a su aparente rigor, la prueba formal depende exactamente de los mismos procesos de pensamiento que la prueba ingenua con manzanas. La conclusión de aquella, dice Mackie, tiene exactamente el mismo estatus que la que surge de la prueba con manzanas. Vale decir: se basa en un ejemplo de $2+2=4$. Usamos el resultado de $2+2=4$ para seleccionar, ordenar, aprehender y acordar los símbolos de la prueba. Mackie lo expresa como sigue:

Las técnicas lógicas empleadas aquí para formular «K es un grupo-2» y «L es un grupo-2» nos permite introducir «a» y «b» como nombres de los elementos de K, y «c» y «d» como nombres de los elementos de L; esto asegura que los nombres de los elementos de M serán «a», «b», «c» y «d»; y el hecho de que haya sólo cuatro nombres asegura que M será descrito por la expresión que es una formulación de «M es un grupo-4». La prueba funciona y produce los resultados deseados; pero esto es así precisamente porque el teorema que intentamos probar es verdadero para los grupos de símbolos que juegan un rol vital en la prueba. (Mackie, 1966, 34).

Mackie no está diciendo que la prueba sea circular, que afirma que $2+2=4$ en sus premisas. Dice que la prueba «descansa en la verdad de un ejemplo particular del teorema probado» (p. 35). Creo que eso significa que si la persona que hace la prueba, o la persona que la lee, no estuvieran ya en posición de aplicar la ecuación de que $2+2=4$ a los símbolos de la prueba, entonces no podrían generarla ni asimilarla. Así pues, en realidad, la prueba no nos deja en mejor posición que con las manzanas. Unimos «a» y «b» en la prueba rigurosa igual que unimos las dos primeras manzanas en la prueba ingenua; y juntamos «c» y «d» igual que juntamos el segundo conjunto de manzanas. Reunimos «a, b, c y d» igual que reunimos las manzanas, excepto que el acto físico de reunir las toma la forma de manipulación de símbolos.

La conclusión de Mackie es que el conocimiento derivado de la prueba ingenua y de la prueba rigurosa tiene el mismo carácter empírico. Si la aplicación con manzanas sólo nos da el conocimiento empírico, eso es lo que hará la aplicación con objetos simbólicos. Creo que la conclusión de Mackie es correcta pero, para

nuestros fines, podría expresarse más concretamente. Recuérdese que nuestro análisis de los procedimientos por los que las operaciones aritméticas se nos imponen sugería que no son única o puramente «empíricas». Tienen un carácter *cuasi-empírico* que comporta un componente normativo o convencional: una técnica socialmente aceptada. De hecho, el argumento de Mackie cierra el círculo. Muestra que la prueba rigurosa presupone esos mismos procesos o técnicas *convencionales*. Esta prueba no representa un principio del conocimiento ni un camino real hacia el conocimiento que sean superiores a los procesos convencionalizados de la aritmética, sino que los *presupone*. La prueba rigurosa, por tanto, no trasciende las consideraciones sociológicas ya avanzadas: las ejemplifica.

7. Resumamos. Empecé diciendo que para demostrar la convencionalidad convenía mostrar alternativas y lo he intentado refiriéndome a aritméticas alternativas donde $2+2=4$. He procurado mostrar cómo esos resultados pueden surgir naturalmente de la aplicación de los conceptos y de las técnicas mediante los cuales se nos instruye por primera vez en las ideas de número, contar y sumar. Por supuesto, ahora tratamos estos resultados como si pertenecieran a un sistema diferente de la aritmética ordinaria, que coexiste con ella. Si esto parece trivializar su significado, pienso que sólo es así cuando leemos la historia hacia atrás usando ideas esencialistas del significado y el alcance de los conceptos relevantes. Es para reducir el peso de este estilo de pensamiento que puse tanto énfasis en lo que denominé finitismo —esto es, ver la aplicación de conceptos yendo de caso en caso—. Las metáforas que debemos emplear son las de «construcción», no las de «desarrollar» o «descubrir»; hacemos el significado de nuestros conceptos sobre la marcha. Dado que tenemos que coordinar con los demás todos nuestros pasos constructivos individuales, el resultado es la construcción de las convenciones.

Sospecho que el estereotipo de una discusión sociológica de $2+2=4$ contendría un sociólogo citando una «tribu» exótica y afirmando que «¡entre los X; $2+2=4$!» Hay una buena razón para esta imagen. Para defender el caso hay que producir algo así. Mi argumento se ajusta a este estereotipo y cumple la condición necesaria. La única rareza es que *nosotros* somos la tribu exótica en cuestión. Somos nosotros los que algunas veces conducimos por el lado contrario de la ca-

rrera matemática y quienes decimos unas veces que $2+2$ son 4 y otras que no es así.

Por último, ¿qué decir del uso aparentemente universal de $2+2=4$? Recuérdese el caso de la biología de la nutrición y la sociología de la alimentación, y de la armoniosa división del trabajo que ha permitido entre biólogos y sociólogos. Ambos son precisos para contar la historia completa. ¿Cómo se ajusta este mapa al caso presente? La partición crucial se da entre «una cosa» y «el número uno», y «dos cosas» y «el número dos». Diríamos que las cosas *qua* cosas pertenecen a la «naturaleza», mientras los números nos pertenecen a nosotros, a la sociedad —pero no debemos olvidar que la sociedad es parte de la naturaleza—. Los números, como los alimentos, son *instituciones*; las cosas son como los nutrientes vaciados de su significado social. No niego que nuestra capacidad innata para percibir en algún sentido nos pone en contacto con la numeralidad de las cosas. Un pájaro puede detectar a simple vista la diferencia entre dos y tres huevos en el nido: nosotros también. Esas habilidades innatas son obviamente vitales para nuestras vidas individuales y colectivas —como lo es comer—. Es en torno a esas prácticas y tendencias instintivas que la sociedad teje siempre redes más o menos complejas de demandas y prohibiciones. Es aquí donde, en frase de Wittgenstein, hay una necesidad profunda de convenciones,¹⁹ tanto referidas a comer como a contar. Son demasiado importantes para dejárselas a los individuos. Recordamos las maneras problemáticas y divergentes como un individuo podría responder a la definición ostensiva de número.²⁰ Desde cierto punto de vista, no es sorprendente que existan grandes similitudes entre muchas de nuestras instituciones numéricas, aunque esa similitud casi ciertamente disminuirá conforme nos aproximamos a los detalles.²¹ Aún se ha estudiado muy poco sobre cómo comprende la gente sus conceptos de los números, o lo que ellos mismos toman como tales cuando los usan. Sin embargo, las dos pruebas de $2+2$ que hemos examinado sirven para probar que debe esperarse diversidad; muestran que puede haber pensamientos y justificaciones muy dispares en torno a $2+2=4$, incluso si a la postre todos sirven al mismo humilde propósito. De hecho, una forma de resumir el argumento de Mackie, que establece la conexión que hemos estado buscando, es decir que Russell sacó tajada de $2+2=4$.

RECONOCIMIENTOS

La prueba del artículo de J.L. Mackie se reproduce gracias al amable permiso de la *Aristotelian Society*. Debo agradecer a Barry Barnes, Celia Bloor y Martin Kusch sus valiosas críticas de un borrador inicial. El encabezamiento y la cita de Lichtenberg son de G.C. Lichtenberg, *Wie glücklich könnte man leben...*, Scherz Verlag, Bern, München, Wien, n.d., p. 17 y p. 76 respectivamente. También estoy agradecido a Herr y Frau R. Joachimsthaler, de Göttingen, por el regalo de este delicioso volumen.

NOTAS

¹ De nuevo Lichtenberg: «Wenn uns ein Engel einmal aus seiner Philosophie erzählte, ich glaube, es müssten wohl manche Sätze so klingen als wie 2 mal 2 ist 13». [Creo que si un ángel nos expusiese su filosofía algunas de sus proposiciones podrían sonar como $2+2=13$] La referencia de ésta cita y la inicial se da en los Agradecimientos.

² Estas son las tablas que representan la suma en estos casos:

+	0	1	2	3	+	0	1	2
0	0	1	2	3	0	0	1	2
1	1	2	3	0	1	1	2	0
2	2	3	0	1	2	2	0	1
3	3	0	1	2				
					$2+2=0$			$2+2=1$

Una buena introducción elemental es: W.W. Sawyer, *A Concrete Approach to Abstract Algebra*, San Francisco, Freeman, 1959.

³ Afortunadamente hay señales de que su interés está reviviendo. Véase, por ejemplo, P. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford, O.U.P., 1984, en especial el capítulo 5. Para mi defensa y extensión sociológica del empirismo de J.S. Mill, véase, D. Bloor, *Knowledge and Social Imagery*, Londres, R.K.P., 1976 (Segunda edición, Chicago, Chicago Univ. Press, 1991), Capítulo 5º.

⁴ Ludwig Wittgenstein, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, Oxford, Blackwell, 1978, (tercera edición). Las referencias, donde corresponda, se harán por partes y por los números de las secciones.

⁵ Otros han señalado la misma cuestión, por ejemplo, el pragmatista John Dewey: «La estructura completa de las cosas, por así decirlo, parece abundar en dosis. Pero no debe suponerse que esta experiencia común le haya dado el número dos como expresión de orden o de relación para medir unidades». J. McLellan and J. Dewey, *The Psychology of Number*, Nueva York, Appleton, 1903, p. 174.

⁶ *Remarks on the Foundations of Mathematics*, I,4. Cf. también I,118; VII,67.

⁷ *Remarks on the Foundations of Mathematics*, I,78.

⁸ *Remarks on the Foundations of Mathematics*, I,80.

⁹ *Remarks on the Foundations of Mathematics*, I,8.

¹⁰ *Remarks on the Foundations of Mathematics*, I,122-126.

¹¹ «Sin embargo, la justificación consiste en apelar a algo independiente», *Philosophical Investigations*, I,265.

¹² *Remarks on the Foundations of Mathematics*, I,63. Compárese con I,9.

¹³ *Remarks on the Foundations of Mathematics*, VII,67.

¹⁴ M. Hesse, *The Structure of Scientific Inference*, Londres, Macmillan, 1974 (especialmente capítulo 8). La exposición más desarrollada de una teoría finitista del significado desde una perspectiva sociológica se encuentra en B. Barnes, *T.S. Kuhn and Social Science*, Londres, Macmillan, 1982, Capítulo 2.

¹⁵ La segunda de las estrategias expuestas se podría denominar «prohibición-de-monstruos». En este caso los axiomas de Peano prohíben el «monstruo» porque excluyen que haya sistemas donde el 0 sea un sucesor, y en la rueda el 0 sigue al 3 (base 4). La lista de estrategias como la prohibición-de-monstruos procede de I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge, C.U.P., 1976. Para una «lectura» sociológica véase D. Bloor, «Polyhedra and the Abominations of Leviticus», *British Journal for the History of Science*, 11, 1978, 245-272.

¹⁶ J.L. Mackie, «Proof», *Proceedings of the Aristotelian Society*, (supp. vol.), XL, 1966, 23-38.

¹⁷ Véase P. Benacerraf, «What Numbers Could Not Be», *Philosophical Review*, vol. 74, 1965, 47-73.

¹⁸ F. Waismann, *Lectures on the Philosophy of Mathematics*, (ed. W. Grassl), Amsterdam, Rodopi, 1982, especialmente las páginas 63-71.

¹⁹ *Remarks on the Foundations of Mathematics*, I,74.

²⁰ Una objeción naturalista y psicológica a mi argumento podría ser como sigue: no es correcto pensar que podríamos ir naturalmente de la exposición a casos de dos, tres y cuatro, y de adiestrarnos en la suma, a una aplicación del tipo de la «rueda» (esto es, una aritmética finita embrionaria). Ese paso sería muy *anti-natural*. El aparato psicológico in-

tacto de un ser humano, funcionando normalmente, nunca se desviaría así; seguiría el camino estricto y directo de la suma normal. Esta objeción es fuerte porque ignora evidencia psicológica decisiva alguna que apoye mi afirmación —aunque por supuesto, tampoco el objetor tiene evidencia negativa decisiva—. Nos limitamos a oponer nuestras intuiciones sobre una cuestión empírica. Pero puedo reformular mi argumento para que sirva incluso si mi crítico imaginario tienen razón sobre nuestras disposiciones naturales. Mi réplica depende del hecho de que las disposiciones no bastan para proporcionar normas, esto es, estándares de lo correcto y lo equivocado. Depende siempre de cada grupo social el decidir que las disposiciones psicológicas de sus miembros individuales deben ser superadas, sea en nombre de la verdad o de la moralidad. Para dramatizar este punto podríamos imaginar a un «escéptico» que asumiese la postura de que la «generalización» correcta del entrenamiento ostensivo da como resultado que $2+2=0$. ¿Cómo podrían mostrar aquellos cuyas disposiciones les llevan a evitar esto, y a afirmar que $2+2$ nunca puede ser sino 4, que su aserto es correcto? ¿Cómo podrían probar que responden *correctamente* al entrenamiento ostensivo? No podrían. Este argumento, por supuesto, es idéntico al invicto e invencible escéptico de la exposición que Kripke hace de Wittgenstein. Compárese S. Kripke, *Wittgenstein on Rules and Private Language*, Oxford, Blackwell, 1982.

²¹ Una dimensión que ha recibido cierto énfasis es la distinción entre los conceptos «abstractos» de número y las nociones relativamente «concretas», estrechamente unidas a la naturaleza de las cosas contadas. Es obvio que la cuestión de si una demostración ostensiva ha de tomarse abstracta o concretamente modificará lo que cuenta como su propia generalización a nuevos casos. Para una discusión inicial véase: M. Wertheimer, «Numbers and Numerical Concepts in Primitive Peoples» (1912), en W.D. Ellis (ed.), *A Source Book of Gestalt Psychology*, Nueva York, Humanities Press, 1950, sección 22.

REVISTA INTERNACIONAL DE

SOCIOLOGIA.

INSTITUTO DE ESTUDIOS SOCIALES AVANZADOS

TERCERA EPOCA - N.º 6 - SEPTIEMBRE-DICIEMBRE, 1993

EDITOR: Salvador Giner

DIRECTOR: Manuel Pérez Yruela

SECRETARIO: Eduardo Moyano

CONSEJO ASESOR DE LA REVISTA:

Alcántara Saez, Manuel; Castells, Manuel
Durán Heras, M.ª Angeles; Fernández Cordón, Juan A.
Fernández Vargas, Valentina; García Ferrando, Manuel
García, Soledad; Garrido, Luis
González de la Fé, Teresa; Homs i Ferret, Oriol
Iglesias Ussel, Julio; Lamo de Espinosa, Emilio
Lemkow Zetterling, Luis; López Jiménez, Angela
Luque Baena, Enrique; Llera Ramo, Francisco J.
Mardones Martínez, José M.; Moyano Estrada, Eduardo
Navarro, Vicente; Ortí Benilloch, Alfonso
Paramio Rodrigo, Ludolfo; Pérez Díaz, Victor
Ramos Torre, Ramón; Reinares Nestares, Fernando
Rodríguez Cabrero, Gregorio; Rodríguez Villasante, Tomá
Toharia Cortés, Juan J.

CONSEJO DE REDACCION:

Beltrán, Miguel; Carabaña, Julio
Laporta, Francisco; Castillo, Juan J.
Maravall, José M.ª; Montero, José R.
Moreno, Luis; Sanz, Luis

PRECIOS 1994

Precio: 3 números/año: 4.000 pts.

Número suelto: 1.500 pts.

Price: 5.000 pts.

3 numbers/year: 2.000 pts.



Consejo Superior de Investigaciones Científicas

ESTUDIOS

ESTRUCTURA SOCIAL Y ESTRUCTURA MUSICAL

JESÚS JOSÉ LEVICES MALLO y ARACELI SERRANO PASCUAL

GÉNESIS Y DESARROLLO DEL ESTADO DEL BIENESTAR EN ESPAÑA

LUIS MORENO, SEBASTIÀ SARASA

ENTRE LA ELECCIÓN RACIONAL Y LA ECONOMÍA

DE LA LA SOLIDARIDAD

CARLOS GUERRA RODRÍGUEZ

NOTAS

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS SOBRE INVESTIGACIÓN

DE LA FAMILIA EN ESPAÑA

PEDRO SÁNCHEZ VERA

MODELO DE PROCREACIÓN, GÉNERO Y MATRIMONIO: UNA

PROPUESTA METODOLÓGICA BASADA EN ETNOGRAFÍA EUROPEA

Y MEDITERRÁNEA

JOAN FRIGOLÉ REIXACH

RESEÑAS BIBLIOGRÁFICAS

EL ENFOQUE ECONÓMICO EN SOCIOLOGÍA, (POR CARLOTA SOLÉ)

J. COLEMAN Y G. BECKER

REFLEXIONES EN TORNO A LAS SOCIEDADES COMPLEJAS,

(POR CARMEN RUIDÍAZ GARCÍA)

D. BELL