Homomorfismos de grafos y semigrupos sobre redes de relaciones*

Douglas R. White**
y Karl P. Reitz

(Traducción: Reyes Herrero)

1. Redes de relaciones simples

1.1. Los grafos y sus imágenes

Definición 1. Un *grafo* es un par ordenado $G = \langle P, R\rangle$ donde P es un conjunto finito de puntos (puntos, objetos, actores) y R es una relación (un tipo de vínculo) definida sobre P, esto es, un subconjunto de pares ordenados de puntos perteneciente a $P \times P$.

Definición 2. Una *función* f: $P \rightarrow P'$ es una aplicación de cada elemento a perteneciente al conjunto P en un elemento imagen $f(a)$ perteneciente al conjunto P'. Una función suprayectiva es una aplicación en la que todos los elementos de P' son imágenes de elementos de P.

Definición 3. Una *equivalencia* $\equiv$ definida sobre P es una relación tal que para cualesquiera a, b y c pertenecientes a P, se cumple que

$a \equiv a$
si $a \equiv b$ entonces $b \equiv a$
si $a \equiv b$ y $b \equiv c$ entonces $a \equiv c$

Estas son las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Lema 1. Toda función f: $P \rightarrow P'$ produce una relación de equivalencia $\equiv_f$ sobre P, esto es, que para cualesquiera $a, b \in P$,

$$a \equiv_f b \text{ si y solo si } f(a) = f(b).$$

Definición 4. Sea $G = \langle P, R\rangle$ un grafo y f: $P \rightarrow P'$ una aplicación suprayectiva. Sea R' una relación definida en P' tal que $R' = \{\langle f(a), f(b)\rangle: a, b \in R\}$ Decimos que R' es la relación de *P' producida por R y f.*

1.2. Homomorfismos de grafos e imágenes de modelos de bloques («blockmodels»)

Los homomorfismos son aplicaciones que preservan la estructura. El homomorfismo mínimo de un grafo es una función que transforma los puntos de un grafo en puntos en una imagen del grafo y preserva las aristas o cone-

Douglas R. White y Karl P. Reitz. University of California at Irvine.
Política y Sociedad, 33 (2000), Madrid (pp. 149-165)

xiones como aristas o conexiones imagen. Expresado en forma de diagrama:

Grafo:	Imagen:
Todas las aristas ——f——→	Arista
	(Homomorfismo)

Hay diferentes tipos de homomorfismos que preservan rasgos adicionales de la estructura de un grafo. La estructura que se preserva puede definirse de acuerdo con las propiedades de f en términos de su aplicación inversa f^{-1} desde la imagen a la preimagen a través de diferentes tipos de homomorfismos.

Más abajo se ofrecen las definiciones formales de los tipos de homomorfismos que resultan más útiles en el análisis reticular de las estructuras de roles. Comenzaremos con el homomorfismo completo en el que cada arista de la imagen está producida por alguna arista en la preimagen. Dado que no hay en la imagen aristas que vengan de fuera, este y todos los homomorfismos que vienen a continuación generan el modelo estructural de una red.

Los homomorfismos regulares y estructurales son modelos de especial importancia en el estudio de los sistemas de roles. En el caso de un homomorfismo regular, los puntos que tienen la misma imagen necesariamente ocupan la misma posición abstracta o «rol» en la red total o grafo. Dos puntos tienen la misma imagen (rol) en un homomorfismo regular si y solo si, cuando uno tiene una relación con un segundo conjunto imagen (o rol), el otro tiene una relación idéntica con un homólogo en ese conjunto. Este es el principio de los paralelos de rol. Dos puntos tienen la misma imagen en un homomorfismo estructural si y solo si están relacionado de manera idéntica a todos los demás puntos.

Definición 5. Sean $G = \langle P, R \rangle$ y $G' = \langle P', R' \rangle$ dos grafos, $f\, G \rightarrow G'$ es un *homormorfismo del grafo completo* si y solo si f: $P \rightarrow P'$ es una aplicación suprayectiva tal que para cualesquiera a, $b \in P$ y x, $y \in P'$, aRb implica que $f(a)\, R' f(b)$, y $xR'y$ implica que existen c, $d \in P$ tales que cRd, $f(c) = x$, y $f(d) = y$.

A la imagen homomórfica completa de un grafo, Boorman, Arabie y Leavitt (1978: 31-32) la han denominado *blockmodel.*

Proposición A. Sean $G = \langle P, R \rangle$ un grafo y f: $P \rightarrow P'$ una aplicación suprayectiva en un conjunto P'. Si R' es la relación definida sobre P' que ha sido inducida por f y R, y $G' = \langle P', R' \rangle$, entonces la aplicación $f\ G \rightarrow G'$ es un *homormorfismo completo del grafo.*

Los homomorfismos completos resultan útiles en las comparaciones estructurales de redes o grafos. Un ejemplo de las etapas de este proceso arranca del trabajo de Laumann y Pappi (1976) sobre las relaciones entre los miembros de la elite de dos ciudades, «Altneustadt» en Alemania y «Towertown» en los Estados Unidos (ambos nombre son seudónimos). Breiger y Pattison (1978) modelaron bloques de actores estructuralmente equivalentes (ver Definiciones 10 y 25) para obtener grafos resumen de las estructuras de roles en ambas comunidades sobre tres tipos de relaciones: negocios (B), discusiones sobre asuntos comunitarios (C) y contactos sociales (S), tal como se muestra en la Figura 1. Bonacich (1981) comparó estos dos conjuntos de grafos usando el homomorfismo completo de los grafos de cada ciudad en grafos de «estructuras comunes», que también aparecen en la Figura 1. Estos grafos muestran los aspectos comunes de la estructura de liderazgo en las ciudades. El ejemplo es una prueba de cómo pueden usarse homomorfismos más fuertes en una primera etapa del análisis para poner de manifiesto las características concretas de las redes sociales, mientras que los homomorfismos más débiles se emplean en una etapa posterior para revelar características más generales. La ventaja de tener una familia de herramientas para modelar homomorfismos, de los más fuertes a los más débiles, es obvia desde el punto de vista de los diferentes niveles de generalidad en el análisis.

El homomorfismo completo es útil para el análisis de estructuras comunes (Bonacich, 1981), pero es demasiado general para identificar posiciones de rol más concretas. Por ejemplo, dos grafos no vacíos cualesquiera tienen la misma imagen homomórfica completa de un único punto conectado a través de su imagen consigo mismo. Tanto los puntos no conectados como los conectados de todo grafo se corresponden con el mismo punto en la imagen. Sin embargo, está claro que esto no equivale a que los puntos se correspondan con las mismas posiciones o roles en la red.

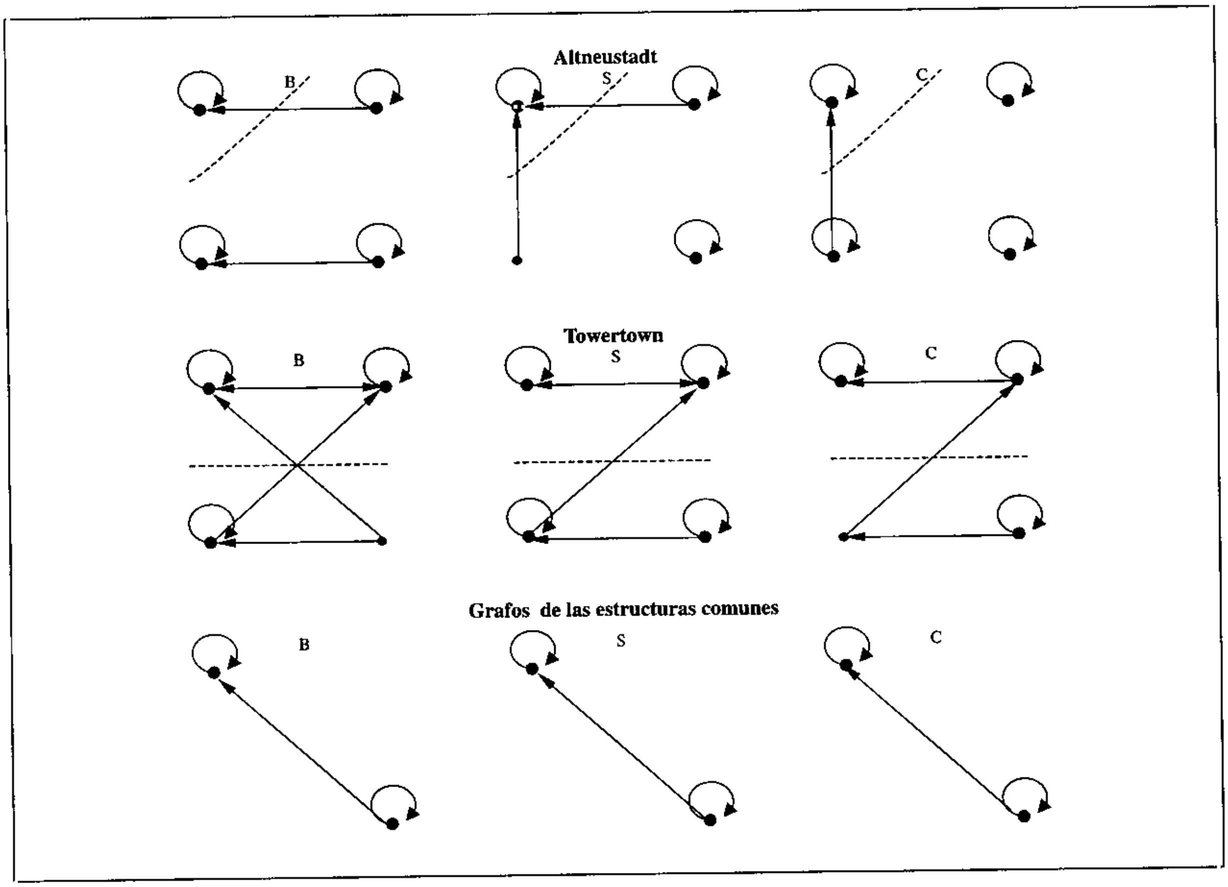
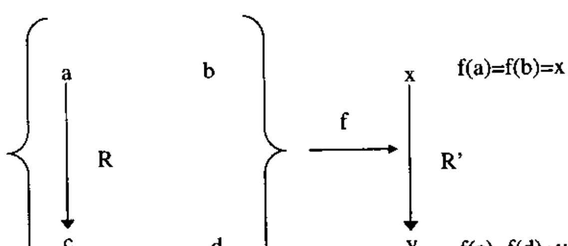


Figura 1. Grafos ilustrativos extraídos del trabajo de Breiger y Pattison (1978). Fuente: Bonacich (1981).

El homomorfismo regular, por el contrario, puede considerarse como una aplicación de los puntos de un grafo en distintos roles o posiciones, con la particularidad de que si dos roles están conectados a través de su imagen, entonces uno de los roles tiene necesariamente que estar conectado a algún otro que esté en correspondencia con el otro rol. Esto puede formalizarse como sigue.

Definición 6. El homomorfismo completo de un grafo f: $G \rightarrow G'$ es *regular* si y solo si para todo $a, b \in P, f(a)R'f(b)$ implica que existen $c, d \in P$ tales que cRb, aRd, $f(c) = f(a)$, $f(d) = f(b)$.

No todo homomorfismo completo de un grafo es un homomorfismo regular como puede verse en el siguiente ejemplo. Aquí $\{a, b, c, d\}$ son puntos del grafo origen que establecen una correspondencia a través de la función f con el conjunto $\{x, y\}$ transfiriendo cualquiera de las conexiones entre puntos al grafo imagen.



Ejemplo 1.

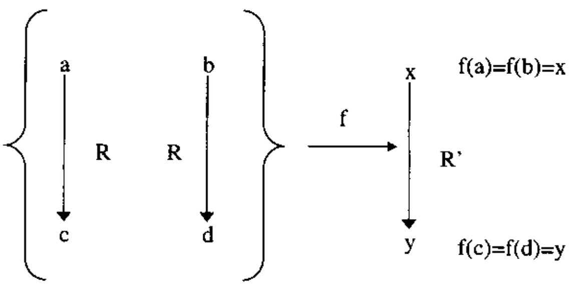
Nótese que $f(b)R'f(d)$ pero que bRx no es cierto para x.

Los homomorfismos regulares tienen como requisito que los ocupantes de un rol estén conectados de idéntica manera a algunos de los ocupantes de un rol «homólogo». En los sistemas de roles, no es de esperar que todos los ocupantes de un rol estén idénticamente conectados a los ocupantes de un rol «homólogo». Este requisito más restrictivo es la base del análisis de sistemas de roles de Harrison White y sus discípulos. Hay algunas circunstancias o algunos tipos de roles para los cuales es de esperar que todos los ocupantes de un rol estén conectados de idéntica manera a los ocupantes de los roles homólogos. Esto puede definirse formalmente como se muestra a continuación de acuerdo con la noción de homomorfismo estructural que resulta tan familiar para la teoría de grafos (Hedetniemi, 1966; Lorrain, 1974; Arabie, Boorman y Leavitt, 1978).

Definición 7. Un homomorfismo completo de un grafo f: $G \rightarrow G'$ es *estructural* si y solo si para todo a y b de P, dado que $a \neq b$,

$$f(a)R'f(b) \text{ implica que } aRb.$$

No todo homomorfismo regular de un grafo es un homomorfismo estructural, tal como se muestra en la Ejemplo 2.



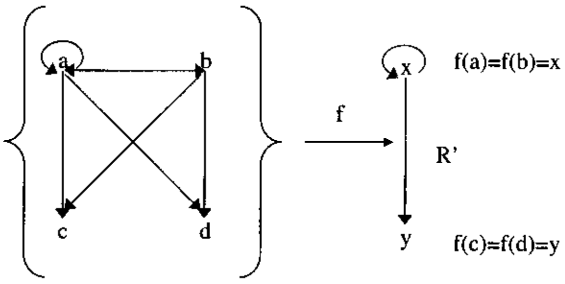
Ejemplo 2.

Nótese que $f(b)R'f(d)$, pero que aRb no se cumple.

En el caso de los homomorfismos estructurales, el hecho de que la imagen de un punto esté conectada mediante su imagen a sí misma no implica que su preimagen esté conectada a sí misma también. El más fuerte de los homomorfismos de un grafo sirve para generalizar el concepto de equivalencia estructural hasta el punto de incluir la reflexividad. Si la conexión de un punto consigo mismo es significativa, la conexión de un punto mediante su imagen implica que ese punto está conectado consigo mismo en la preimagen. Esto puede formalizarse como sigue.

Definición 8. El homomorfismo completo de un grafo f: $G \rightarrow G'$ será *fuerte* si y solo si para todo a y b de P, $f(a)R'f(b)$ implica que aRb.

No todo homomorfismo estructural de un grafo es fuerte, tal como queda ilustrado en el Ejemplo 3.



Ejemplo 3.

Nótese que $f(b)R'f(b)$, pero que bRb es falso.

Los homomorfismos fuertes son la base de ciertos modelos de espacios multidimensionales para grafos o redes. Guttman (1977) demuestra como los grafos simétricos pueden representarse en un espacio multidimensional en el que dos puntos se corresponden con la misma imagen en el espacio si y solo si ambos puntos tienen idénticas conexiones con los otros puntos, entre ellos y consigo mismos (la distancia desde un punto hasta el mismo, en este espacio, es igual a cero). Guttman también pone de manifiesto cómo estas representaciones espaciales pueden generalizarse a los grafos asimétricos. Estas ideas están desarrolladas con más detalle en Freeman (1983).

Los cuatro homomorfismos de un grafo de las Definiciones 5 a 8 tienen una fuerza creciente en el sentido de que el más fuerte incluye al más débil, tal como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 1. Si f: $G \rightarrow G'$, entonces

(i) el que f sea un homorfismo fuerte de un grafo implica que f sea un homomorfismo estructural.
(ii) el que f sea un homomorfismo estructural implica que f es un homomorfismo regular.

Grätzer (1979:81) define los homomorfismos completos y fuertes mediante algebras parciales. Los homomorfismos regulares y estructurales, tal como se han definido aquí, se usan para el análisis de aspectos específicos de la estructura de roles.

1.3. Equivalencias

Recordemos que todo homomorfismo de un grafo produce una relación de equivalencia en el conjunto origen (de acuerdo con el Lema 1). Los siguientes teoremas demuestran como para cada tipo de homomorfismo se produce una particular relación de equivalencia y, a la inversa, que cada tipo particular de equivalencia deriva de un tipo particular de homorfismo.

Definición 9. Si $G = \langle P, R \rangle$ y $\equiv$ es una relación de equivalencia definida sobre P, $\equiv$ es una *equivalencia fuerte* si y solo si para todo a, b y $c \in P$, $a \equiv b$ implica que

(i) aRb si y solo si bRa
(ii) aRc si y solo si bRc, y
(iii) cRa si y solo si cRb.

Los puntos fuertemente equivalentes están relacionados de manera idéntica consigo mismos, entre ellos, y con los demás.

Definición 10. Si $G = \langle P, R \rangle$ y $\equiv$ es una relación de equivalencia definida sobre P, $\equiv$ es una *equivalencia estructural* si y solo si para todo a, b y $c \in P$, tales que $a \neq c \neq b$, $a \equiv b$ implica que

(i) aRb si y solo si bRa
(ii) aRc si y solo si bRc
(iii) cRa si y solo si cRb, y
(iv) aRa implica que aRb.

Los puntos estructuralmente equivalentes están relacionados de manera idéntica entre ellos y con todos los demás.

Definición 11. Si $G = \langle P, R \rangle$ y $\equiv$ es una relación de equivalencia definida sobre P, $\equiv$ es una *equivalencia regular* si y solo si para todo a, b y $c \in P$, $a \equiv b$ implica que

(i) aRc implica que existe $d \in P$ tal que bRd y $d \equiv c$, y
(ii) cRa implica que existe $d \in P$ tal que dRb y $d \equiv c$.

Los puntos regularmente equivalentes están conectados de la misma manera a sus homólogos correspondientes.

Teorema 2A. La equivalencia inducida por un homomorfismo fuerte es una equivalencia fuerte y, al contrario, toda equivalencia fuerte está inducida por un homomorfismo fuerte.

Teorema 2B. La equivalencia inducida por el homomorfismo estructural de un grafo será una relación de equivalencia estructural y, a la inversa, toda equivalencia estructural está inducida por algún homomorfismo estructural.

Teorema 2C. La equivalencia inducida por el homomorfismo regular de un grafo es una relación de equivalencia regular y, a la inversa, toda equivalencia regular está inducida por algún homomorfismo regular.

Puede pensarse en las relaciones de equivalencia de un conjunto P como subconjuntos de $P \times P$. Como tales, estas relaciones están parcialmente ordenadas mediante su inclusión en el conjunto. Un conjunto de equivalencias tiene un elemento máximo si existe una relación de equivalencia dentro de esa colección que abarca a todo el resto.

Teorema 3A. El conjunto de todas las relaciones de equivalencia fuertes definidas sobre un grafo tiene un elemento máximo.

Teorema 3B. El conjunto de todas las relaciones estructurales definidas sobre un grafo tiene un elemento máximo.

Teorema 3C. El conjunto de todas las relaciones regulares definidas sobre un grafo tiene un elemento máximo.

1.4. El semigrupo de relaciones compuestas

Sea R una relación y la notación con la que se define la composición de relaciones, es decir, si aRb y bRc entonces $a(R \circ R)c$, de modo que

$R \circ R = \{\langle a, c \rangle$ de modo que existe $b \in P$ tal que $\langle a, b \rangle$ y $\langle b, c \rangle \in R\}$

La operación cumple la propiedad asociativa para el conjunto S de todas las relaciones definidas sobre P que pueda generar R. En otras palabras $\langle S, \circ \rangle$ es un semigrupo. Nótese que los elementos R^n y R^m de S son iguales si contienen el mismo conjunto de pares ordenados de $P \times P$.

Sea f: $G \rightarrow G'$ el homomorfismo completo de un grafo de $\langle P, R \rangle$ en $\langle P', R' \rangle$, y sea, para todo $Q \in S$, Q' la relación de correspondencia definida sobre P' e inducida por f y Q. Sea tenemos, $S' = \{Q': Q \in S\}$, y $\hat{f}$: S $\rightarrow$ S$'$ tales que $\hat{f}$(Q) = Q$'$.

Teorema 4. Si f: $G \to G'$ es el homomorfismo regular, estructural o fuerte de un grafo (con respecto a R), f será regular, estructural o fuerte respectivamente para toda relación definida en S. Esto es, f: $\langle P, R\rangle \to \langle P', R'\rangle$ será regular, estructural o fuerte respectivamente para todo $Q \in S$.

Teorema 5. Si f: $G \to G'$ es un homomorfismo regular de un grafo, entonces $\hat{f}$: $S \to S'$ es el homomorfismo de un semigrupo. Es decir,

$$\hat{f}(Q_1 \circ Q_2) = \hat{f}(Q_1) \circ \hat{f}(Q_2) = Q_1' \circ Q_2'$$

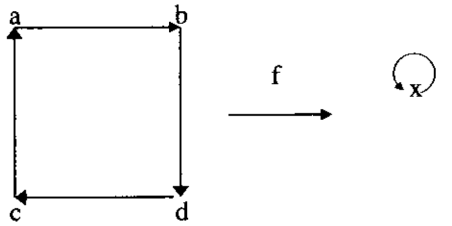
Teorema 6. Si f: $G \to G'$ es un homomorfismo fuerte de un grafo, entonces $\hat{f}$: $S \to S'$ es el isomorfismo de un semigrupo.

El teorema anterior no se cumpliría si f fuera solamente un homomorfismo estructural. Esta afirmación puede verificarse en el Ejemplo 3 (*supra*). Nótese que para puntos $r \neq s$, $f(r)R'f(s)$ implica que rRs. Sin embargo, $f(b)R'f(b)$ pero no implica que bRb, de manera que f es estructural, pero no fuerte. Nótese también que $\langle b, b\rangle \notin R$, pero que $\langle b, b\rangle \in R^2$, de modo que $R \neq R^2$. Sin embargo, $R' = (R')^2$, de manera que f: $S \to S'$ no es un isomorfismo.

Definición 12. Un grafo G es *acíclico* si y solo si se cumple que $\langle a, a\rangle \notin R^n$ para todo $a \in P$ y todo $n \in Z^+$.

Teorema 7. Si f: $G \to G'$ es un homomorfismo estructural de un grafo y G es un grafo acíclico, entonces $\hat{f}$: $S \to S'$ es el isomorfismo de un semigrupo.

Los homomorfismos fuertes preservan la estructura exacta del semigrupo de relaciones generado por la relación definida en el grafo. Los homomorfismos estructurales preservan esta estructura solo cuando todas las relaciones son irreflexivas. Sin embargo, los homomorfismos regulares no preservan necesariamente la estructura exacta del semigrupo como puede verse en el siguiente ejemplo.



Ejemplo 4.

Tabla de Composición del Semigrupo:

o	R	RR	RRR	I
R	RR	RRR	I	R
RR	RRR	I	R	RR
RRR	I	R	RR	RRR
I	R	RR	RRR	I

$\xrightarrow{\hat{f}}$

o	I
I	I

2. Redes con atributos y relaciones múltiples

Para generalizar completamente el uso de estas definiciones, necesitamos definir las redes como multigrafos (con múltiples relaciones), en los que los nodos de la red tienen también atributos. A partir de aquí, podemos definir un álgebra de redes sobre la cual operen nuestros homomorfismos y equivalencias.

2.1. Los atributos de los nodos: equivalencias e identidades de clase

Definición 13. Una *equivalencia de atributos* definida sobre un grafo G es la relación $\equiv A$ inducida por un subconjunto A de P que tenga un atributo determinado, donde

$$\equiv A = \{\langle i, j\rangle: i, j \in A, i, j \notin A\}$$

Lema 2. Si $G = \langle P, \equiv A\rangle$ es el grafo de una relación de equivalencia de atributos $\equiv A$, $\equiv A$ es también equivalencia inducida por el mayor de los homomorfismos regulares (estructurales o fuertes) del grafo.

Definición 14. Una *identidad de clase* definida sobre G es un subconjunto I_A de la relación de identidad $I = \{\langle i, i\rangle: i \in P\}$ para un conjunto A de nodos de P que tengan un atributo de clase determinado, de modo que

$$I_A = \{\langle i, i\rangle: i \in A \subseteq P\}.$$

Lema 3. Si $G = \langle P, I_A\rangle$ es el grafo de la identidad de clase I_A definida por el atributo de clase A, entonces la equivalencia de atributo $\equiv A$ es también la equivalencia inducida por el más grande de los homomorfismos regulares del grafo.

2.2. Redes y relaciones múltiples

Definición 15. Una *red* es un par ordenado $N = \langle P, \Re \rangle$ en el que P es un conjunto de puntos y $\Re$ un conjunto de relaciones definidas sobre P.

A veces a la red se la denomina multigrafo (orientado) e incluye relaciones definidas sobre P que pueden ser equivalencias de atributos o identidades de clase. También pueden definirse homomorfismos sobre las redes, como en el caso de los grafos definidos por una sola relación. El homomorfismo de una red implica la existencia de dos funciones. El número de variaciones posibles para definir la función más fuerte se incrementa notablemente.

Definición 16a. Sean $N = \langle P, \Re \rangle$ y $N' = \langle P', \Re' \rangle$ dos redes, un *homomorfismo completo débil de una red* f: $N \to N'$ es un par ordenado de funciones $f = \langle f_1, f_2 \rangle$ tales que f_1: $P \to P'$ y f_2: $\Re \to \Re'$ están definidas de manera que, para cada $a, b \in P$ y $R \in \Re$, aRb implica $f_1(a)f_2(R)f_1(b)$, y para todo $x, y \in P'$ y $R \in \Re'$, implica que existen $c, d \in P$ y $R \in \Re$ tales que $f_1(c) = x$, $f_1(d) = y$, $f_2(R) = R'$ y cRd.

Definición 16b. Sean $N = \langle P, \Re \rangle$ y $N' = \langle P', \Re' \rangle$ dos redes, el *homomorfismo completo de una red* f: $N \to N'$ es un par ordenado de funciones $f = \langle f_1, f_2 \rangle$ tales que f_1: $P \to P'$ y f_2: $\Re \to \Re'$ están definidas de manera que, para cada $a, b \in P$ y $R \in \Re$, aRb implica $f_1(a)f_2(R)f_1(b)$, y para todo $x, y \in P'$ y $R \in \Re$, $xf_2(R)$ implica que existen $c, d \in P$ tales que $f_1(c) = x$, $f_1(d) = y$, cRd.

Nótese que para cada relación $R \in \Re$, el homomorfismo completo de la red f: $N \to N'$ induce un homomorfismo completo de un grafo definido de $\langle P, R \rangle$ en $\langle P', f_2(R) \rangle$. A continuación se ofrecen ejemplos de dos formas de homomorfismos regulares.

Definición 17a. Un homomorfismo completo débil f: $N \to N'$ es un *homomorfismo completo débil regular* si para todo $R' \in \Re'$, $f_1(a)R'f_1(b)$ implica que existen $c, d \in P$ y $R, Q \in \Re$ tales que $f_1(a) = f_1(c)$, $f_1(c) = f_1(d)$, $f_2(Q) = f_2(R)$, $f_2(R) = R'$, cRb y aQd para todo $a, b \in P$.

Definición 17b. Un homomorfismo completo de red f: $N \to N'$ es un *homomorfismo completo regular* si para todo $R \in \Re$, $f_1(a)f_2(R)f_1(b)$ implica que existen $c, d \in P$ tales que $f_1(a) = f_1(c)$, $f_1(b) = f_1(d)$, cRb y aRd para todo $a, b \in P$.

Estos dos pares de definiciones tratan de diferente modo el caso en el que f_2 no es uno por uno. Si dos o más relaciones tienen la misma imagen, la primera de cada uno de los pares de definiciones tiene como requisito que el homomorfismo sea completo o regular para su unión. La segunda definición tiene como requisito que el homomorfismo sea completo o regular para cada una de las relaciones de $\Re$. Se pueden hacer variaciones similares a propósito de los homomorfismos de redes correspondientes a homorfismos estructurales y homomorfismos fuertes de grafos. Si centramos nuestra atención sólo en la versión fuerte de cada una de estas definiciones, pueden definirse simplemente a través del requisito de que los homomorfismos de grafos inducidos cumplan la propiedad de ser estructurales o fuertes. Los teoremas tanto para homomorfismos como para equivalencias definidas en grafos se generalizarán también a sus correspondientes teoremas referidos a redes, incluyendo los que afectan a la composición de relaciones y sus semigrupos.

2.3. Conectividad

Definición 18. Podemos decir que el homomorfismo completo de una red *preservará la conectividad* si y solo si para cualquier secuencia de puntos $x_1, \ldots, x_{n+1} \in P$ y de relaciones $R_1, \ldots, R_n$ tales que $f_1(x_1)f_2(R_1)f_1(x_2)\ldots$, $f_1(x_n)f_2(R_n)f_1(x_{n+1})$, existen puntos $y_2, \ldots, y_{n+1}$ tales que $f_1(x_2) = f_1(y_2), \ldots, f_1(x_{n+1}) = f_1(y_{n+1})$ y $x_1R_1y_2R_2\ldots R_ny_{n+1}$, y también existen puntos $z_1, \ldots, z_n$ tales que $f_1(x_1) = f_1(z_1), \ldots, f_1(x_n) = f_1(z_n)$ y $z_1R_1z_2R_2\ldots z_nR_nx_{n+1}$.

Una secuencia de puntos relacionados es un camino. La definición anterior establece que un camino en el grafo imagen se corresponde con caminos concretos en la preimagen dado que a cada punto del origen le corresponde un punto en el camino imagen.

Teorema 8. Si f es el homomorfismo regular de una red, entonces f preservará la conectividad.

Definición 19. Podemos decir que el homomorfismo completo de una red *preservará fuertemente la conectividad* si y solo si para cada secuencia de puntos $x_1, \ldots, x_{n+1}$ (donde

$x_i \neq x_j$ si $i \neq j$) y de relaciones $R_1, \ldots, R_n$, $f_1(x_1)f_2(R_1)f_1(x_2) \ldots f_1(x_n)f_2(R_n)f_1(x_{n+1})$, implica que $x_1R_1x_2R_2 \ldots R_nx_{n+1}$.

Teorema 9. Si f es el homomorfismo estructural de una red, entonces f preservará fuertemente la conectividad.

2.4. Grafos múltiples y equivalencia de LOS «haces» [1]

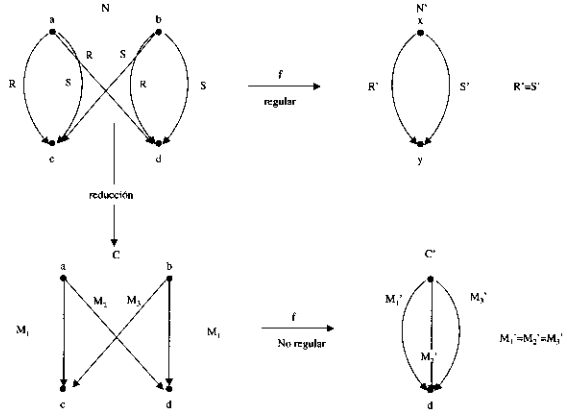
En una red, un par ordenado de puntos puede formar parte de mas de una relación. Llamaremos al conjunto de todas las relaciones que contengan el par de puntos $\langle a, b\rangle$ el *haz* de relaciones de ese par, es decir, $B_{ab} = \{R \in \mathfrak{R}: aRb\}$. Un segundo par ordenado de puntos $\langle c, d\rangle$ podría compartir el mismo haz de relaciones, de modo que $B_{ab} = B_{cd}$. Puede ocurrir también que el par $\langle a, b\rangle$ no esté relacionado por ninguno de los miembros de $\mathfrak{R}$, de manera que $B_{ab} = \varnothing$. Llamaremos B^* al conjunto de todos los haces no vacíos. Estamos ahora en condiciones de definir nuevas relaciones en P considerando los pares de puntos que comparten haces de relaciones. Estas relaciones múltiples son de gran interés para la teoría social.

Definición 20. Sea $B \in B^*$, diremos que la relación $M_B = \{\langle a, b\rangle: B_{ab} = B\}$ es una relación *múltiple inducida* por la red $N = \langle P, \mathfrak{R}\rangle$.

Para cada par ordenado $\langle a, b\rangle$ hay un único haz asociado a él. Este haz puede estar, bien vacío, bien pertenecer a B^*, lo que implica que $\langle a, b\rangle$, o no es miembro de M_B o tiene solamente una de esas relaciones múltiples. El conjunto M de todas esas relaciones inducidas sobre una red dada definen un tipo especial de grafo.

Definición 21. Un *grafo múltiple* es una red $C = \langle P, \mathscr{M}\rangle$ tal que para cada par de relaciones $M_1, M_2 \in \mathscr{M}$, $M_1 \cap M_2 = \varnothing$.

El grafo formado por los puntos de una red determinada y las relaciones múltiples inducidas en esa red es un grafo múltiple. El procedimiento para ir de una red a los grafos múltiples inducidos por ella da siempre un único resultado. Sin embargo, como se muestra en el siguiente ejemplo, las propiedades de los homomorfismos de la red no se trasladan a los homomorfismos definidos sobre una red múltiple. En el Ejemplo 5 tenemos $N = \langle P, \mathfrak{R}\rangle$, donde $P = \{a, b, c, d\}$ y $\mathfrak{R} = \{R, S\}$, y $N' = \langle P', \mathfrak{R}'\rangle$, donde $P' = \{x, y\}$ y $\mathfrak{R}' = \{R'\}$. Nótese que f es regular como homomorfismo de N en N'. El grafo múltiple es $C = \langle P, \mathscr{M}\rangle$, donde $\mathscr{M} = \{M_1, M_2, M_3\}$. La aplicación $f_1: P \to P'$, junto con el requisito de que f sea al menos el homomorfismo completo de una red , dan como resultado un conjunto inducido de relaciones definidas sobre P', es decir, $\mathscr{M}' = \{M'_1\}$. Para remarcar que la aplicación de C en $C' = \langle P', \mathscr{M}'\rangle$ es un homomorfismo de red diferente lo hemos denominado f_M. Incluso aunque f sea regular, f_M no lo es. Sin embargo, la regularidad sí que se preserva en el sentido contrario.



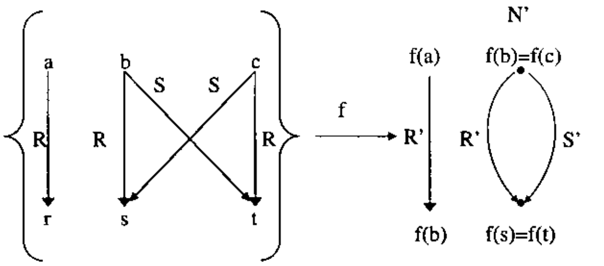
Ejemplo 5.

Teorema 10. Si $N = \langle P, \mathfrak{R}\rangle$ es una red, $C = \langle P, \mathscr{M}\rangle$ es el grafo múltiple que se deriva de ella y f: $C \to C' = \langle P, \mathscr{M}\rangle$ el homomorfismo completo de la red, entonces f define un homomorfismo completo sobre N y

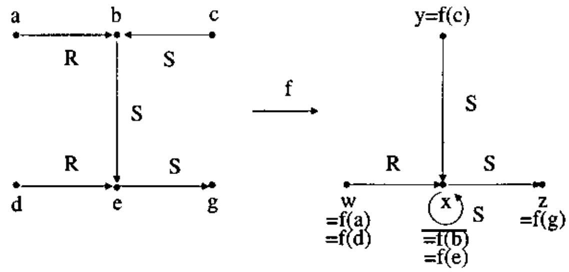
(i) si f es regular el homomorfismo definido será regular
(ii) si f es fuerte el homomorfismo definido será fuerte.

La imagen de un grafo múltiple a través del homomorfismo regular de la red no es necesariamente un grafo múltiple tal como se muestra en el Ejemplo 6, donde un par de puntos imagen están conectados por más de una relación imagen, y las relaciones R' y S' son distintas en los pares ordenados de $P \times P'$.

Los grafos múltiples ofrecen una representación única de los haces de relaciones y de los atributos compartidos entre individuos que se usan para definir los roles. Mandel y Winship (1979) sugieren que la ocupación del mismo



Ejemplo 6.



Ejemplo 7.

rol puede captarse parcialmente a través de la equivalencia de los puntos de una red en términos de este tipo de haces. Usando nuestra definición de grafo múltiple podemos retomar su definición de equivalencia local de roles de la manera siguiente:

Definición 22. Si $C = \langle P, \mathcal{M} \rangle$ es un grafo múltiple y $\equiv$ una equivalencia definida sobre P, entonces $\equiv$ será una *equivalencia de los haces* si y solo si para todo a, b, $c \in P$ y $M \in \mathcal{M}$, implica que

(i) aMc si y solo si existe un d tal que bMd;
(ii) cMa si y solo si existe un d tal que dMb.

El *homomorfismo de un haz* es el homomorfismo completo de una red que identifica los puntos de las clases de equivalencia definidas por el haz de equivalencias y en el que la aplicación de las relaciones es la identidad. Este tipo de reducción de grafos a partir de la equivalencia de los haces no da como resultado necesariamente un homomorfismo regular, tal como se muestra más abajo. Aquí, f es el homomorfismo de un haz pero no es regular. Los homomorfismos regulares, estructurales y fuertes de una red no son necesariamente homomorfismos de un haz porque los primeros permiten subsumir relaciones, mientras que el segundo no. Sin embargo, un homomorfismo fuerte de una red o el grafo múltiple en el que las relaciones no se subsumen unas en otras, es el homomorfismo de un haz.

Mientras que la estructura local de los roles sociales puede captarse a través del homomorfismo de una red agrupando puntos que sigan las mismas pautas en cuanto a las flechas que llegan y salen de ellos, la estructura global o relacional no puede captarse así. En la imagen del grafo de más arriba, en el Ejemplo 7, $f(b)$ está conectado a $f(g)$ mediante S. No obstante, en la preimagen podemos comprobar que b no está conectado mediante S a ningún punto equivalente a g.

Para captar la estructura global de los roles en las relaciones sociales múltiples se requiere un homomorfismo más fuerte, uno que reúna las propiedades de los homomorfismos de un haz y de los homomorfismos regulares. El homomorfismo fuerte de una red cumple ambas propiedades, pero es demasiado restrictivo. Más abajo se define un homomorfismo más débil que también las cumple.

Definición 23. Sea f: $N \rightarrow N'$ el homomorfismo regular de una red, f será un *homomorfismo de unión*[2] de la red si y solo si para todo a, b, c, d de P, $f_1(a) = f_1(c)$ y $f_1(b) = f_1(d)$ implica que $B_{ab} = B_{cd}$, $B_{ab} = \varnothing$ o $B_{cd} = \varnothing$.

Nótese que esto implica también que $B_{ab} = B_{cb} = B_{cd} = B_{ad}$, o que algunos están vacíos. Esta condición de carácter restrictivo garantiza que para esta forma especial de homomorfismo regular existe, si es que existe, una única relación múltiple entre cada par.

Teorema 11a. Todo homomorfismo fuerte de una red es un homomorfismo de unión de la red.

Teorema 11b. Sea $f = \langle f_1, f_2 \rangle$ un homomorfismo de unión, entonces $f^* = \langle f_1, f_3 \rangle$, donde f_3 es la relación de identidad, es el homomorfismo de un haz.

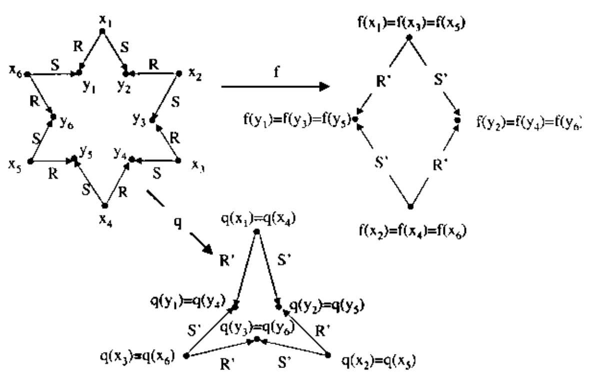
Más abajo, en el Ejemplo 8, se muestran dos homomorfismos de unión que no son fuertes. El Ejemplo 7 muestra el homomorfismo de un haz que no es de unión aunque la correspondencia entre relaciones sea la identidad. Para una red en la que el conjunto de relaciones consiste en una sola relación, todo homomorfismo regular es obviamente un homomorfismo de unión. Por otra parte, el homomorfismo f: $N \rightarrow N'$ del Ejemplo 6 es regular, pero no de unión.

La próxima serie de teoremas demuestran que los homomorfismos de unión tienen valiosas propiedades referidas a la preservación de la multiplicidad y del subgrupo de relaciones sin las restricciones de los homomorfismos fuertes.

Teorema 12. Sea f: $N \rightarrow N'$ el homomorfismo de unión de una red, donde $N = \langle P, \mathfrak{R} \rangle$, $N' = \langle P', \mathfrak{R}' \rangle$ y $f = \langle f_1, f_2 \rangle$, si o es una relación de composición y $\langle \mathfrak{R}, \mathrm{o} \rangle$ un semigrupo, entonces f_2: $\langle \mathfrak{R}, \mathrm{o} \rangle \rightarrow \langle \mathfrak{R}', \mathrm{o} \rangle$ es un isomorfismo.

Los homorfismos de unión son algo intermedio, por tanto, entre los homomorfismos regulares y los fuertes. Preservan las propiedades que son necesarias para la descripción de los roles: la multiplicidad y la composición. En los homomorfismos de unión, al contrario que en los homomorfismos regulares y fuertes, no se maximiza la equivalencia entre los miembros, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

En el Ejemplo 8 se muestra que no existe una simple y única representación de la estructura de roles. Las tres redes son grafos múltiples y tanto f como q son homomorfismos de unión, pero no fuertes. Ninguna de las redes imagen puede seguir reduciéndose y preservar al mismo tiempo la distinción entre relaciones.



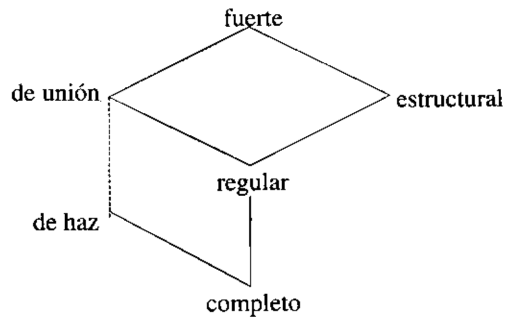
Ejemplo 8.

Las implicaciones de los homomorfismos de unión para el análisis de la estructura de roles ponen de manifiesto un dilema fundamental. Si requerimos que las relaciones entre roles no tengan un contenido ambiguo, entonces las reducciones más simples no están determinadas necesariamente de un único modo. Esta afirmación es consistente con la aproximación que Heil y White (1976) hicieron al estudio de la estructura de roles mediante homomorfismos, y también con la lógica más teórica de Nadel en su estudio de la multiplicidad de la estructura social.

Las equivalencias de una unión pueden definirse como sigue:

Definición 24. Sea $\equiv$ la equivalencia regular de una red, $\equiv$ será una *equivalencia de unión de una red* si para todo a, b, c, $d \in N$, $a \equiv c$ y $c \equiv d$ implica que $B_{ac} = B_{bd}$, $B_{ac} = \varnothing$, o $B_{bd} = \varnothing$.

Podemos definir ahora un orden parcial de los homomorfismos y sus equivalencias respecto a las redes.



La Tabla 1 hace un resumen de estos homomorfismos y de sus propiedades. Tres de esos homomorfismos (el homomorfismo fuerte, el estructural y el regular) maximizan la equivalencia entre sus miembros. Los homomorfismos de unión, aunque carecen de esta propiedad, poseen importantes propiedades referentes a la preservación de las estructuras de semigrupo y la multiplicidad.

2.5. Modelos de bloque en redes y roles superpuestos [3]

Las aproximaciones previas a los métodos empíricos de modelado de bloques están basadas en diversas generalizaciones hechas a partir del homomorfismo completo utilizando el criterio de la densidad (Arabie, Boorman y Leavitt, 1978: 32) o aproximándose al homomorfismo estructural.

La densidad de un homomorfismo puede definirse de la siguiente manera. Sea N la red $\langle P, \mathfrak{R} \rangle$ y f_1: $P \rightarrow P'$ una aplicación suprayectiva. Sea, para los puntos $a, b \in P'$, $f_1^{-1}(a) = \{x_1, \ldots, x_{n_a}\}$ y $f_1^{-1}(b) = \{y_1, \ldots, y_{n_b}\}$. Entonces, para cada par

Tabla 1
Cinco homomorfismo de grafo y sus propiedades

Homomorfismo	Imagen	Homomorfismo de Semigrupo Inducido	Equivalencia Máxima	Preserva la Conectividad
Fuerte	Modelo de bloques fuerte	Isomorfismo	Sí	Fuerte
Estructural	Modelo de bloques estructural	Isomórfico para grafo irreflexivo	Sí	Fuerte
De unión	Modelo de bloques de unión	Isomorfismo	No	Débil
Regular	Modelo de bloques regular	Homomorfismo	Sí	Débil
Completo	Modelo de bloques	No necesariamente un homomorfismo	Sí	No

$\langle a, b\rangle \in P' \times P'$ y $R \in \mathfrak{R}$ podemos definir el número

$$r_{ab}^{R} = \frac{\sum_{i}^{n_a}\sum_{j}^{n_b}[x_i R y_i]}{n_a \times n_b} \quad \text{donde } [x_i R y_i] = \begin{cases} 1 \text{ si } \langle x_i, y_i\rangle \in R \\ 0 \text{ si } \langle x_i, y_i\rangle \notin R \end{cases}$$

Definición 25. Sea $N = \langle P, \mathfrak{R}\rangle$ una red y f_1: $P \rightarrow P'$ una aplicación suprayectiva. Sea R', para todo $R \in \mathfrak{R}$, una relación tal que para todo a, b de P', $a\not{R}'b$ (es decir, que a no está relacionado con b mediante R') si $r_{ab}^{R} \leq \alpha$, y $aR'b$ si $r_{ab}^{R} > \beta$.

La aplicación $f = \langle f_1, f_2\rangle$ es un *homomorfismo de densidad* con un parámetro de impureza $\alpha \geq 0$ para el «bloque de ceros» y un parámetro de impureza $\beta < 1$ para el «bloque de unos», si y solo si no existen ningún a, b $\in$ P' tales que $\alpha < r_{ab}^{R} \leq \beta$. Usamos la notación $\beta \rightarrow 1$ para indicar que β está lo suficientemente cerca del valor 1 como para cumplir con los requisitos de un perfecto bloque de unos.

Si $\alpha = \beta$ entonces, cualquier partición de puntos puede transformarse mediante el homomorfismo densidad en una imagen. En el caso de los homomorfismos *completos* de redes que estamos manejando $\alpha = \beta = 0$. Breiger, Boorman y Arabie (1965) se refieren al caso en el que $\alpha = \beta \approx 0$ como «ajuste estrecho». En la medida en la que los valores de α y β se alejan entre sí, pasando a considerar densidades de carácter intermedio, habrá menos particiones que satisfagan las condiciones de densidad del homomorfismo. En el caso de que $\alpha = 0$ y $\beta \rightarrow 1$ existe solo una partición máxima que satisfaga las condiciones del homomorfismo, y se corresponde con lo que hemos definido como homomorfismo *fuerte* de una red. La modificación del parámetro de densidad r_{ab}^{R} para excluir las relaciones reflexivas se corresponde con el caso de nuestro homomorfismo *estructural* de una red, donde, de nuevo, $\alpha = 0$ y $\beta \rightarrow 1$. Breiger, Boorman y Arabie se refieren al caso en el que $a \approx 0$ y $b \approx 0$ como «ajuste amplio». Nótese que no hay modo de definir homomorfismos regulares por medio de estos parámetros.

Resumiendo las deficiencias de trabajos anteriores sobre modelado de bloques podemos decir que:

1. La equivalencia estructural arroja agrupaciones de puntos que están relacionados entre ellos y con todos los demás de manera idéntica. El modelado de bloques en una red de acuerdo con este tipo de equivalencia preserva la estructura de semigrupo de relaciones de la red, pero es demasiado restrictivo para captar las bases más abstractas de las correspondencias entre roles. Esta restricción aumenta en el caso de la equivalencia fuerte, donde los pun-

tos considerados equivalentes están relacionados entre ellos, consigo mismos y con todos los demás de manera idéntica. Las restricciones que impone la equivalencia estructural se relajan hasta cierto punto cuando se usan aproximaciones que buscan un «ajuste amplio» (Breiger, Boorman y Arabie, 1975), que siguen no obstante sin poder captar la idea de correspondencia de roles, o estar relacionado de igual manera a homólogos equivalentes.

2. La equivalencia completa, incluso si se generaliza en términos de un «ajuste estrecho» de las excepciones permitidas en los bloques de ceros, es aun un tipo de equivalencia demasiado burdo como para captar la correspondencia entre roles. Si la densidad establecida está por debajo de la densidad del grafo entero, el máximo modelo de bloque completo se reduce a un único punto conectado consigo mismo. Las regularidades estructuradas de los roles en los patrones que siguen las conexiones en la red original deben captarse mediante el uso de criterios distintos.

3. La equivalencia de haces (Mandel y Winship, 1979) supone un avance, pero está aun lejos de poder captar la equivalencia de roles o de posiciones.

Los dos criterios que introducimos aquí para el modelado de bloques están basados en definiciones de los patrones abstractos que sigue la relación entre roles:

4. La equivalencia regular arroja agrupamientos de puntos en los cuales, para cada par de personas en posiciones equivalentes, *si una de ellas está relacionada con una persona en una segunda posición, la otra tiene una relación idéntica con su homólogo en ea posición.* Este tipo de equivalencia conlleva dos problemas relacionados. Uno es que en las redes con relaciones múltiples puede haber más de una relación múltiple característica entre posiciones. Por ello el homomorfismo regular no preserva necesariamente la estructura del semigrupo de relaciones definido sobre un multigrafo.

5. La equivalencia de unión es un tipo de equivalencia regular en la cual (a) no hay más de un grupo de relaciones características entre posiciones y (b) el semigrupo de relaciones definidas sobre el multigrafo es preservado isomórficamente en el modelo de bloques que es su imagen.

Las limitaciones de la equivalencia de unión están en que no es necesariamente una equivalencia máxima para una red dada. En consecuencia, si bien es verdad que la equivalencia de unión es la que más se aproxima al concepto abstracto de rol, podemos encontrarnos con que, para una red determinada, existe una multiplicidad de estructuras máximas de roles (modelos de bloques) que no son reducibles a un solo sistema de roles.

Esta limitación es simplemente el reconocimiento del hecho, obvio por otra parte, de que los roles pueden solaparse unos con otros de maneras tan complejas que es imposible asignar a cada actor una única posición de rol para después caracterizar las relaciones entre posiciones.

Este estudio de los homomorfismos nos impulsa, por tanto, hacia una solución formal de cómo delimitar en una red múltiple las distintas estructuras producidas por la superposición de los roles, aunque no examinaremos aquí esta cuestión.

White y Reitz (1982) ofrecen un algoritmo para encontrar la medida de hasta qué punto los nodos de una red son regularmente equivalentes. Se analizan diversos conjuntos de datos usando este algoritmo y se ofrece una estructura de roles reducida para cada uno de ellos.

3. Homomorfismos de semigrupos

Lorrain y White (1971), Pattison (1980) y Bonacich (1982) han explorado las relaciones existentes entre homomorfismos de grafos y homomorfismos de semigrupos. Hemos demostrado cómo, en condiciones de regularidad, los homomorfismos de redes inducen homomorfismos de semigrupos sobre el semigrupo de relaciones descrito en el grafo. En este epígrafe, indagaremos en la idea opuesta. No puede decirse que los homomorfismos de semigrupos induzcan aplicaciones sobre el grafo original de la misma manera que los homomorfismos de grafos inducen aplicaciones sobre las relaciones. Sin embargo podemos decir que los homomorfismos de semigrupos son «compatibles» con los homomorfismos de grafos en el sentido de que los homomorfismos de grupos pueden servir como la aplicación relacional en el par ordenado de aplicaciones que forman el homomorfismo de una red. Demostraremos cómo, en efecto, ciertos tipos de homomorfismos de semigrupos tienen esta propiedad.

Sea $\langle P, S\rangle$ una red en la que P es el conjunto de puntos y S el conjunto de relaciones definidas sobre P. Es más, supongamos que S es un semigrupo en el que está definida la operación de composición. Sea $f = \langle f_1, f_2\rangle$ un homomorfismo completo débil de la red. Entonces, $[R]f_2 = \{Q: f_2(Q) = f_2(R)\}$ es la clase de equivalencia de todas las relaciones identificadas en R por f_2. $\cup\ [R]f_2$ es la relación de aquellos pares que estén presentes en cualquiera de la relaciones de $[R]f_2$.

Un homomorfismo de una red en el que se subsumen sólo relaciones y no puntos es una unión de esas relaciones:

Teorema 14. Si $N = \langle P, S\rangle$ y $N' = \langle P', S'\rangle$ son redes, $f_1: P \to P$ es la identidad y $f_2: S \to S'$ una aplicación, entonces $f = \langle f_1, f_2\rangle$ es el homomorfismo completo débil de la red si y solo si $f_2(R) = \cup\ [R]f_2$.

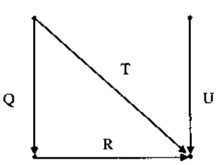
El Teorema 14 ofrece las condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales podemos considerar una aplicación f_2 como el homomorfismo de una red. También nos ofrece un procedimiento para construir un homomorfismo de una red en el que solo se subsuman las relaciones. Esto es, las relaciones se reducen simplemente formando su unión. Sin embargo, la aplicación así construida no conserva necesariamente la composición de relaciones.

Supongamos que S es un semigrupo de relaciones en una red. Bonacich (1982) pone sobre la mesa el problema de cómo considerar los homomorfismos de los semigrupos definidos sobre una red en términos de las uniones de relaciones que preserven la operación de composición. El problema puede plantearse como sigue. Dada una red $\langle P, S\rangle$ y un homomorfismo de un semigrupo $f: \langle S, \text{o}\rangle \to \langle S', \text{o}\rangle$, ¿bajo qué condiciones puede representarse f como la aplicación que relaciona la red $\langle P, S\rangle$ a la red $\langle P, S'\rangle$? Adviértase que cualquier solución al problema que plantea Bonacich debe primero probar bajo qué condiciones un semigrupo imagen cualquiera de un semigrupo de relaciones binarias puede representarse como otro semigrupo de relaciones binarias. Idealmente, algunas de esas condiciones pueden especificarse sin hacer más que una pequeña referencia a la red que sirve de base.

Dado $f = \langle f_1, f_2\rangle: \langle P, S\rangle \to \langle P, S'\rangle$, un homomorfismo de una red, trataremos de desarrollar condiciones necesarias y suficientes para f_2 y S de modo que $f_2: \langle S, \text{o}\rangle \to \langle S', \text{o}\rangle$ sea el homomorfismo de un semigrupo. Luego, si tenemos el semigrupo $\langle S, \text{o}\rangle$ y un homomorfismo del semigrupo $f_2: \langle S, \text{o}\rangle \to \langle S', *\rangle$, en el que $\langle S', *\rangle$ es cualquiera de los semigrupos imagen de $\langle S, \text{o}\rangle$, las condiciones necesarias que tendrán que cumplir S y f_2 serán que $\langle S', *\rangle$ sea isomórfico del semigrupo de relaciones binarias $\langle S, \text{o}\rangle$ definido sobre un conjunto P y que $\langle i, f_2\rangle$ sea el homomorfismo de una red en el que i sea la relación de identidad.

El siguiente ejemplo sirve para ilustrar el problema. Dada la red $N = \langle P, S\rangle$ tal como aparece abajo, podemos derivar la tabla de composición de $\langle S, \text{o}\rangle$ como sigue.

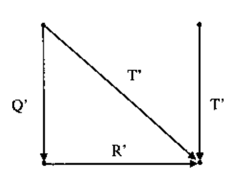
o	$\varnothing$	Q	R	T	U
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
Q	$\varnothing$	$\varnothing$	T	$\varnothing$	$\varnothing$
R	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
T	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
U	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$



Ejemplo 9.

Nótese que puede formarse una imagen homomórfica de $\langle S, \text{o}\rangle$ identificando T y U. Este nuevo semigrupo $\langle S, *\rangle$ tiene la siguiente tabla de composición:

El Teorema 14 nos dice que si T y U tienen que identificarse como parte del homomorfismo completo débil de una red, la imagen T' de T y U debe ser la unión de T y de U que da la siguiente imagen de N:



Nótese que, sin embargo, en este caso $Q'\text{o}R'$ no es igual a T' sino solo un subconjunto de T'. Dicho de otro modo, $[Q]f_2 \text{ o } [R]f_2 \subset \cup\ [Q \text{ o } R]f_2$. Para que f_2 sea el homomorfismo de un semigrupo la igualdad debe mantenerse. De aquí se sigue el siguiente teorema sobre las condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales una aplicación en un homomorfismo de una red es el homomorfismo de un semigrupo.

Teorema 15. Sea $f = \langle f_1, f_2 \rangle$: $\langle P, S \rangle \rightarrow \langle P, S' \rangle$ el homomorfismo completo débil de una red tal que f_1 es la relación de identidad, entonces f_2 preservará la operación de composición si y solo si $\cup\, [R_1]f_2 * \cup\, [R_2]f_2 = \cup\, [R_1 \circ R_2]f_2$.

Supongamos que S es un semigrupo de relaciones binarias en el que se ha definido la operación de composición. Bajo las condiciones establecidas en el Teorema 15, f_2 es el homomorfismo del semigrupo. Por la teoría de semigrupos sabemos que la composición de homomorfismos de semigrupos da como resultado el homomorfismo de un semigrupo.

El Teorema 15 refleja el problema general planteado por Bonacich. Simplemente establece que cada aplicación relacional inmersa incluida en el homomorfismo de una red, incluso si resulta ser un homomorfismo de un semigrupo de la tabla de composición del semigrupo, debe revisarse para asegurar que preserva la composición en la red de relaciones. Dado que los homomorfismos completos débiles de una red crean imágenes de las relaciones en términos de la unión de relaciones equivalentes, las condiciones necesarias y suficientes para asegurar que la composición se preserva pasan por comprobar la composición de esas uniones para asegurar, para todo R_1, R_2 del conjunto de relaciones S, que $f_2(R_1) \circ f_2(R_2) = f_2(R_1 \circ R_2)$.

El problema más específico planteado por Bonacich es si existen características de S y f_2 que, independientemente de la red de base, asegure que una aplicación en el homomorfismo de una red preservará la composición.

Nosotros estamos particularmente interesados en los homomorfismos de semigrupos que sean interpretables. Una de las razones para subsumir unas relaciones en otras en los semigrupos, por ejemplo, es que tengan los mismos productos, de manera análoga al modo en el que en el caso de la equivalencia estructural unos puntos del grafo se subsumen en otros cuando tienen idénticos vínculos. En el contexto de las relaciones, tener u mismo producto significa que dos relaciones generan caminos idénticos de longitud dos o más en la red. Empecemos, por tanto, definiendo una aplicación relacional fuerte y el tipo de equivalencia de produce.

Definición 26. Sea f: $S \rightarrow S'$ una aplicación de relaciones y $\langle S, \circ \rangle$ un semigrupo de relaciones en el que ha definido la operación de composición, f será *fuerte* si para todo T, R_1, $R_2 \in S$, $f(R_1) = f(R_2)$ si y solo si $R_1 \circ T = R_2 \circ T$ y $T \circ R_1 = T \circ R_2$.

Definición 27. Sean R_1 y R_2 elementos de S, R_1 y R_2 serán *fuertemente equivalentes* (y lo denotaremos como $R_1 \equiv R_2$) si para todo T de S, $R_1 \circ T = R_2 \circ T$ y $T \circ R_1 = T \circ R_2$.

Está claro a partir de esta definición que la equivalencia fuerte es una relación de equivalencia. En la medida en la que satisface una condición más exigente que la simple congruencia del semigrupo $\langle S, \circ \rangle$, esto es que el que $R_1 \equiv R_2$ y $Q_1 \equiv Q_2$ implica que $R_1 \circ Q_1 = R_2 \circ Q_2$, el semigrupo $S / \equiv$ no es necesariamente un semigrupo de relaciones binarias, como se vio en el Ejemplo 9.

La prueba del siguiente teorema se sigue directamente de estas definiciones.

Teorema 16. La equivalencia definida sobre S producida por una aplicación fuerte es una equivalencia fuerte y, al revés, toda equivalencia fuerte está producida por alguna aplicación fuerte.

Pero no se da el caso de que la composición de dos aplicaciones fuertes sea una aplicación fuerte también, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

$$
\begin{array}{c|ccc}
\circ & R & S & T \\ \hline
R & R & R & R \\
S & R & R & R \\
T & R & R & S
\end{array}
\xrightarrow{g_1}
\begin{array}{c|cc}
\circ & U & T \\ \hline
U & U & U \\
T & U & U
\end{array}
\xrightarrow{g_2}
\begin{array}{c|c}
\circ & V \\ \hline
V & V
\end{array}
$$

Ejemplo 10.

donde $g_1(R) = g_1(S) = U$, y $g_2(U) = g_2(T) = V$. Tanto g_1 como g_2 son fuertes, pero $g_2 \circ g_1$ no lo es. La siguiente definición es de gran utilidad debido a las posibilidades de interpretación que ofrecen las aplicaciones fuertes.

Definición 28. Una aplicación de relaciones que sea susceptible de entenderse como la composición de dos o más aplicaciones de relaciones fuertes, es una aplicación *cuasifuerte*.

Mientras no seamos capaces de demostrarlo en forma de teorema, tanto las aplicaciones de relaciones fuertes como las «cuasifuertes» en semigrupos serán homomorfismos de semigrupos (como en el Ejemplo 10), pero no con respecto a las uniones de relaciones y su composición. Es decir, las aplicaciones fuertes y «cuasifuertes» no tienen necesariamente que representar el mapa relacional en el homomorfismo de una red y preservar a la vez la composición. Mostraremos ahora bajo que condiciones sí la preservan.

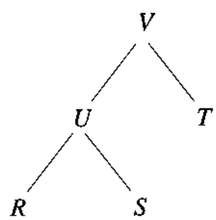
Ya hemos definido la aplicación de relaciones fuerte y su congruencia sin tomar como referencia las redes. El Lema 4 nos proporciona las condiciones necesarias y suficientes para que la parte relacional de una aplicación entre redes preserve la composición. Con la condición de que la aplicación de relaciones sea fuerte podemos demostrar un teorema más potente.

Teorema 17. Sea $f = \langle f_1, f_2\rangle : \langle P, S\rangle \to \langle P, S'\rangle$ el homomorfismo completo débil de una red, f_1 la relación de identidad, f_2 una aplicación fuerte y $\langle S, \circ\rangle$ un semigrupo, entonces f_2 será un homomorfismo del semigrupo si y solo si $f_2(T) = f_2(R_1 \circ R_2)$ implica que $T \subseteq R_1 \circ R_2$ para todo $T, R_1, R_2 \in S$.

Este teorema nos permite identificar aplicaciones de relaciones fuertes a partir de la tabla de composición del semigrupo y comprobar si las uniones de las relaciones preservan la composición sólo mirando el reticulado que forman los elementos de S incluidos, *sin* tener que tomar como referencia la red de base.

Se pueden encadenar otras reducciones de este tipo para producir más homomorfismos a partir de una red. En cada paso se computan los elementos relacionales que se van incluyendo en el reticulado tomando como punto de partida las uniones de relaciones en el paso anterior y comprobando cada nuevo par de relaciones para incluirlo en el conjunto. En una cadena de aplicaciones semejantes, la aplicación llega a ser cuasifuerte.

El homomorfismo cuasifuerte de una red permite la siguiente interpretación. Comenzando con el semigrupo original de relaciones definidas sobre una red, podemos equiparar todas las relaciones fuertemente equivalentes y considerarlas como «sustituibles» a la hora de generar en la red caminos idénticos de longitud dos o más. Las otras relaciones pueden compararse sobre estas bases en la red imagen. La más grande de las reducciones fuertes en cada paso es única, y la más grande de las reducciones cuasifuertes es única. Eso es lo que define la jerarquía de niveles en los que las relaciones se equiparan o se hacen «sustituibles». Si las aplicaciones relacionales fuertes del Ejemplo 10 preservaran la composición en el homomorfismo de una red, tendríamos una jerarquía de «sustituibilidad» de roles:



Las relaciones de abajo se equipararon en la primera aplicación relacional fuerte, y las del medio en la siguiente aplicación fuerte.

Hay una segunda condición referida al homomorfismo de relaciones de un semigrupo que está relacionada con la anterior y que ofrece un alto poder de interpretación. Como la anterior también hace uso de la inclusión de relaciones en un reticulado. Esta segunda condición tiene su origen más directamente en la idea de Boorman y White (1976) de equiparar relaciones vinculadas entre sí mediante una *inclusión*.

Definición 29. Sea $\langle S, \circ\rangle$ un semigrupo de relaciones binarias y f una aplicación definida sobre S, entonces f será una aplicación *inclusiva* si para todo $R_1, R_2 \in S$, $f(R_1) = f(R_2)$ implica que $R_1 \subseteq R_2$ o que $R_2 \subseteq R_1$.

Al contrario que en el caso de la aplicación fuerte, no hay necesariamente una aplicación de inclusión máxima en el semigrupo de relaciones. Por ejemplo, puede haber dos inclusiones entre tres relaciones, donde $P \subseteq R$ y $Q \subseteq R$. Solo dos de las tres (bien P y R o Q y R) pueden equipararse, dado que las otras dos no están ligadas mediante una inclusión. Esto es debido a que todos los elementos equiparados están vinculados mediante la inclusión, que define una ordenación total de los elementos de cada conjunto de equivalencia. Por lo tanto, $f_2(R) = \max\,[R]f_2$.

El teorema siguiente enuncia las condiciones bajo las cuales una aplicación inclusiva es el homomorfismo de un semigrupo.

Teorema 18. Sea $f = \langle f_1, f_2 \rangle$: $\langle P, S\rangle \rightarrow \langle P, S'\rangle$ donde f_1 es la relación de identidad y f_2 es una aplicación inclusiva, entonces f_2 preservará la composición si y solo si:

(i) $f_2(R_1) = f_2(R_2)$ implica que $f_2(T \text{ o } R_1) = f_2(T \text{ o } R_2)$ y $f_2(R_1 \text{ o } T) = f_2(R_2 \text{ o } T)$; y
(ii) $f_2(T) = f_2(R_1 \text{ o } R_2)$ implica que $T \subseteq \max[R_1]f_2$ o $\max[R_2]f_2$, para todo T, R_1, R_2 de S.

Este es el mismo tipo de resultado con potencia interpretativa que el que habíamos obtenido comprobando si una aplicación entre relaciones fuertes servía como homomorfismo e un semigrupo definido sobre una red de relaciones. Aquí, podemos identificar aplicaciones inclusivas que preserven la composición a partir de las tablas de composición del semigrupo más las inclusiones en el semireticulado de relaciones.

Los homomorfismos del semigrupo de las relaciones de una red definidas por una aplicación inclusiva pueden, como las aplicaciones fuertes, estar compuestas o producir más homomorfismos del semigrupo. Sin embargo, dado que la inclusión es transitiva, la composición de dos aplicaciones inclusivas ea también una aplicación inclusiva y puede identificarse en un solo paso a partir de la tabla de composición de relaciones en la red del semigrupo original y del semireticulado de inclusiones.

Nuestras dos primeras aproximaciones están cerca de las intuiciones de Boorman y White (1976), que incluyen en su descripción de la «estructura de roles» de una red social tanto las tablas de composición de relaciones de los semigrupos como el semireticulado de inclusiones. Su concepto de la «estructura de roles» es, por consiguiente, suficiente para caracterizar los homomorfismos fuertes e inclusivos de semigrupos de redes sociales. Estos homomorfismos de semigrupos tienen una gran potencia interpretativa en términos de «sustituibilidad» de relaciones, y son análogos a los criterios que habíamos usado antes para definir la equivalencia de puntos en la red.

Los homomorfismos definidos sobre el semigrupo de todas las relaciones binarias de un conjunto que preservan la unión y la simetría, han sido descritos extensamente por Clifford y Miller (1970) y Magill (1966). Los homomorfismos inclusivos definidos sobre el semigrupo del conjunto de relaciones binarias de un conjunto N pueden aplicarse fácilmente por extensión al conjunto de todas las relaciones (a través de los semireticulados). Hay, sin embargo, relaciones de equivalencia en el semigrupo de todas las relaciones binarias de un conjunto que no son fuertes. La utilidad de los homomorfismos cuasifuertes está, por tanto, restringida a los semigrupos del conjunto de todas las relaciones binarias de un conjunto.

Las definiciones y teoremas de este último epígrafe del artículo proporcionan las herramientas básicas del análisis estructural de los homomorfismos de semigrupos de redes sociales. Una línea de investigación consiste en la reducción del semigrupo a través de una cadena de homomorfismos fuertes del semigrupo. Otra, consiste en la reducción a través de homomorfismos inclusivos. Una tercera consiste en alternar estos dos tipos de reducción de semigrupos. Las definiciones y teoremas de la primera parte del artículo proporcionan las herramientas básicas para las reducciones homomórficas de los puntos de una red que preserven la estructura del semigrupo y del grafo. Todos estos métodos juntos proporcionan una sólida base para ampliar el análisis de la estructura de roles de las redes sociales basado en los modelos de bloques.

La representación de los homomorfismos de redes que hemos escogido es sólida. Nos permite demostrar una serie de importantes teoremas relacionados con la estructura de roles de las redes sociales, arrojar algo de luz sobre una serie de intuiciones del lenguaje cotidiano acerca de los roles sociales, y penetrar más profundamente en el tipo de análisis de la estructura social desarrollado por Lorrain y White (1971), White, Boorman y Breiger (1976) y Boorman y White (1976). Nos permite integrar el análisis de los homomorfismos de grafos y el de los homomorfismos de semigrupos de relaciones binarias definidos por la operación de composición. Nuestros resultados abren las puertas al posterior estudio matemático de la relación entre los homomorfismos de grafos y de semigrupos definidos sobre redes. Para el analista de las redes sociales, nuestros teoremas representan un considerable avance en los métodos al uso para producir imágenes homomórficas de las redes sociales. Estos métodos proporcionan las bases formales para el análisis de redes en estructuras sociales complejas.

NOTAS

* Social Networks, 5 (1083) 193-234.

** Departamento de Antropología. 3151 Social Sciences Plaza, Universidad de California, Irvine, CA 92697, USA.

[1] *bundle equivalence* en el original.

[2] *juncture homomorphism* en el original.

[3] *cross-cutting* en el original.

BIBLIOGRAFÍA

ARABIE, P., Scott BOORMAN y Paul R. LEAVITT (1978): «Constructing blockmodels: how and why». *Journal of Mathematical Psychology* 17: 21-63.

BONACICH, P. (1981): «The Common Structure Graph: Common Features of a Set of Graphs.» Department of Sociology, UCLA.

— (1982): «What is a homomorphism?», en L. C. Freeman, D. R. White y A. K. Romney (eds.) *Research Methods in Social Network Analysis.*

BOORMAN, S. y Harrison C. WHITE (1976): «Social structure from multiple networks II. Role structures». *American Journal of Sociology* 81: 1384-1446.

BOYD, John C. (1980): «The universal semigroup of relations». *Social networks* 2: 1-27.

— (1982): «Social semigroups and green relations» en L. C. Freeman, D. R. White y A. K. Romney (eds.) *Research Methods in Social Network Analysis.*

BREIGER, R. y Philippa E. PATTISON (1978): «The joint role structure of two community elites». *Sociological Methods and Research* 7: 213-226.

BREIGER, R., Scott BOORMAN y Phipps ARABIE (1975): «An algorithm for clustering relational data with application to social network analysis and comparison to multidimensional scalling». *Journal of Mathematical Psychology* 12: 328-383.

CLIFFORD, A. H. y MILLER (1970): «Union and symmetry preserving endomorphisms of the semigroup of all binary relations on a set». *Czechoslovak Mathematical Journal 20,* n.° 5. Praha.

FREEMAN, L. C. (1983): «Spheres, cubes and boxes: graph dimensionality and network structure». *Social Networks* 5: 139-156.

GRÄTZER, G. (1979): *Universal Algebra.* Nueva York, Springer-Verlag.

GUTTMAN, L. (1977): «A definition of dimensionality and distance for graphs» an J.C. Lingoes (ed.) *Geometric Representation of Relational Data.* Ann Arbor, MI: Mathesis Press.

HEDETNIEMI, Stephen T. (1966): «Homomorphisms of graphs and Automata». Tesis doctoral. Universidad de Michigan.

HEIL, G. y Harrison WHITE (1976): «An algorithm for finding simultaneous homomorphic correspondences between graphs and their image graphs». *Behavioral Science* 21: 26-45.

LAUMANN, E. O. y F. PAPPI (1979): *Network of Collective Action.* Nueva York: Academic Press.

LORRAIN, F. (1974): «Social structure, social classification and the logic of analogy» en Paul A. Ballonoff (ed.) *Mathematical Models of Social and Cognitive Structures.* Urbana, University of Illinois Press.

LORRAIN, F. y Harrison WHITE (1971): «Structural equivalence of individuals in social networks». *Journal of Mathematical Sociology* 1: 49-80.

MAGILL, K. D. (1966): «Automorphisms of the semigroup of all relations on a set». *Canadian Mathematical Bulletin* 9, n.° 1.

MANDEL, M. y Christopher WINSHIP (1979): «Roles, positions and networks». Ponencia presentada en la reunión de la American Sociological Association en Boston, Massachusetts.

NADEL, S. F. (1957): *The Theory of Social Structure.* Londres, Cohen and West.

PATTISON, P. (1980): «An algebraic analysis of multiple social networks». Tesis doctoral. Universidad de Melburne.

SAILER, L. (1978): «Structural equivalence: meaning and definition, computation and application». *Social Networks* 1: 73-90.

WHITE, D. R. y Karl P. REITZ (1982): «Rethinking the role concept: homomorphisms and social networks» en L. C. Freeman, D. R. White y A. K. Romney (eds.) *Research Methods in Social Network Analysis.*

WHITE, Harrison, Scott BOORMAN y Ronald BREIGER (1976): «Social structure from multiple networks I. Blockmodels of roles and positions». *American Journal of Sociology* 81: 730-780.