

Una introducción de carácter intuitivo a la modelización en bloques (*blockmodeling*)

Patrick D. Doreian*

(Traducción: Reyes Herrero)

La modelización en bloques puede contemplarse por una parte, como un marco coherente para el análisis de la estructura social y, por otra, como un conjunto de procedimientos para hacer particiones en las redes. Está basado en algunas ideas bastante simples y, aunque el aparato matemático de la modelización en bloques puede llegar a ser formidable, sus intuiciones básicas no lo son. Comenzaremos con los fundamentos intuitivos de la modelización en bloques y daremos algunos ejemplos de redes sociales. Después, usando esos ejemplos, se perfilarán distintos modos de modelar bloques, se examinarán los modelos de bloques «ajustados» y se darán interpretaciones sobre ellos. Finalizaremos con una valoración parcial del modelado en bloques y con algunas sugerencias sobre aspectos que merecerían una mayor atención.

1. Roles, relaciones y equivalencia

La modelización en bloques fue introducida en 1971 (en un artículo prohibitivo por su carácter técnico) por Lorrain y White en *The Journal of Mathematical Sociology*, y se articuló en torno a la representación de roles y relaciones. Una idea central en el artículo de Lorrain y White es la de «*equivalencia estructural*», tal vez el concepto más ampliamente usado de esta obra seminal.

Abordaremos este concepto a través de algunos ejemplos y empezaremos en los diagramas superiores de la Figura 1. Comenzando por la izquierda, hay un diagrama que representa a un padre, p_1 , y dos hijos, c_1 y c_2 . También se representan dos vínculos, $p_1 \rightarrow c_1$ y $p_1 \rightarrow c_2$. La relación podría interpretarse como «*padre de*» o «*tiene autoridad sobre*» y su estructura está clara. En el ejemplo siguiente aparece un padre, p_2 , con tres hijos, c_3 , c_4 y c_5 . Aunque son claramente diferentes, ambos diagramas tienen la misma estructura esencial, que está recogida en el diagrama superior derecho de la Figura 1. Este último diagrama es un modelo de cada uno de los otros dos. En ambos casos, la «*posición*» Padres1 está ocu-

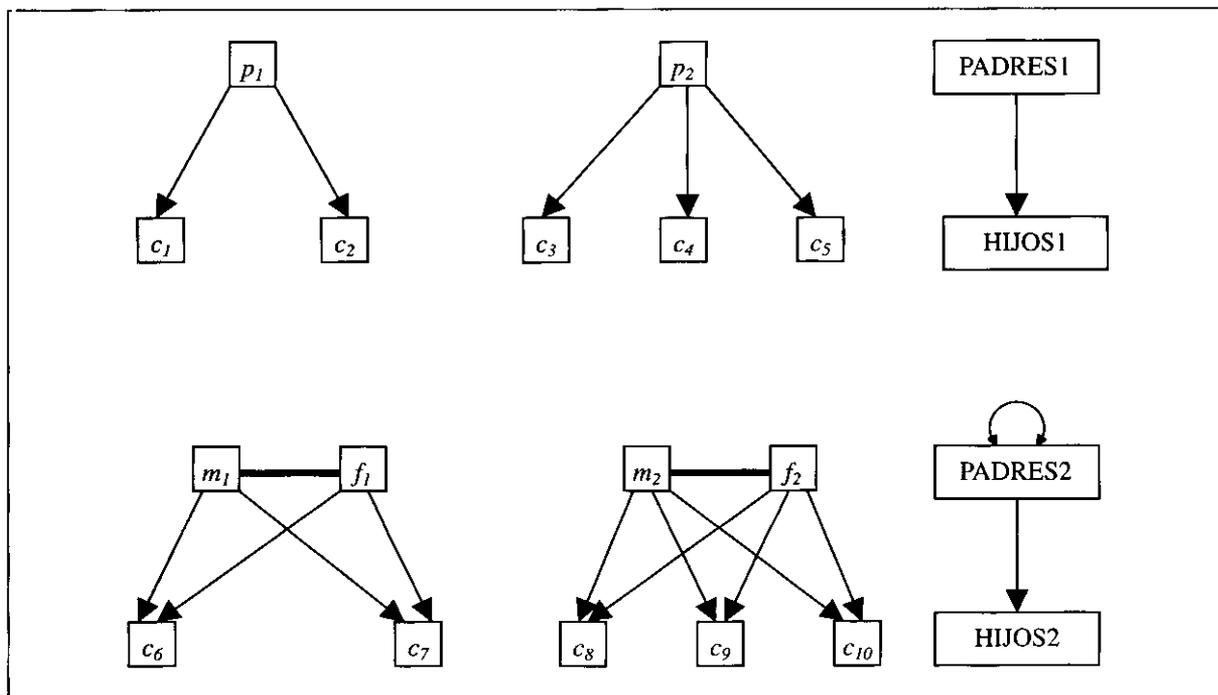


Figura 1. Redes de relaciones padres-hijos.

pada por un actor social, mientras que la posición Hijos1 está ocupada por más de un actor. En el primer ejemplo la ocupan dos hijos, mientras que en el segundo la ocupan tres. El agrupamiento de $\{p_2\}$ y $\{c_3, c_4, c_5\}$ es una partición de los actores y el diagrama Padres1 \rightarrow Hijos1 es un modelo de bloques de la red de cuatro actores. Véase también el diagrama de la izquierda en la Figura 3. En un análisis sustantivo podríamos hablar de posiciones que son ocupadas por actores sociales. Estas posiciones muy probablemente tendrán roles con expectativas asociadas a ellos.

Dos actores son *estructuralmente equivalentes* si están conectados de la misma manera al resto de la red. Tanto la presencia como la ausencia de vínculos tiene que ser la misma. En la Figura 1, en la fila superior, c_1 y c_2 son estructuralmente equivalentes en la red, mientras que c_3 , c_4 y c_5 son estructuralmente equivalentes en el segundo ejemplo. Cada posición de hijo en el modelo está ocupada por actores estructuralmente equivalentes y los actores que ocupan diferentes posiciones no son estructuralmente equivalentes, de la misma manera que los hijos no son equivalentes a sus padres.

Los diagramas inferiores de la Figura 1 se diferencian de los anteriores en que distinguen, entre los padres, los roles tradicionales de padre y madre¹. Además de la relación padre-hijo se muestra un segundo tipo de relación. En cada caso, existe un vínculo, por ejemplo «casado con», entre m_1 y f_1 y entre m_2 y f_2 . De nuevo, los dos conjuntos de hijos son (por separado) estructuralmente equivalentes y cada pareja de padres contiene actores sociales estructuralmente equivalentes. El modelo de la derecha es un modelo de bloques en el cual se han agrupado actores estructuralmente equivalentes —respecto a dos relaciones diferentes esta vez—. Hay un bucle en la posición «padres» que representa el vínculo entre el padre y la madre.

En cada uno de estos ejemplos se puede realizar un análisis en términos de equivalencia estructural y, en cada caso, la resultante es un modelo de bloques. Cada una de las redes había sido considerada por separado. En su lugar, supongamos que la red contiene a todos los actores siguientes $\{f_1, m_1, f_2, m_2, c_3, c_4, c_5\}$. La equivalencia estructural no puede llevarnos más lejos. Está claro que c_1 y c_2 no son estructuralmente equivalentes a c_3 , c_4 y c_5 . Sin em-

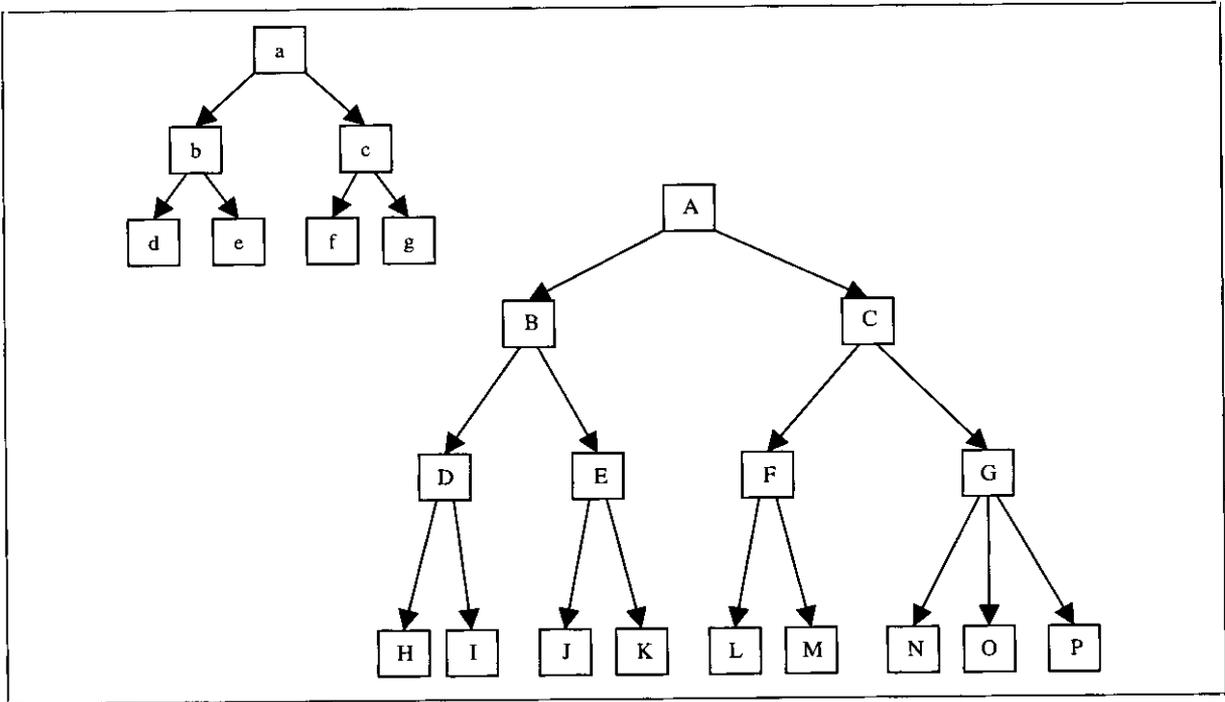


Figura 2.

bargo, en un sentido profundo todos los hijos son iguales. Esto puede representarse a través de la idea de *equivalencia regular* (White & Reitz, 1983). Dos actores sociales son *regularmente equivalentes* si están conectados de manera equivalente a actores equivalentes. En este ejemplo, los dos conjuntos de padres están conectados de manera equivalente a los dos correspondientes (y equivalentes) conjuntos de hijos. Los padres $\{f_1, m_1, f_2, m_2\}$ ocupan conjuntamente la posición Padres2 mientras que los hijos $\{c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}\}$ ocupan conjuntamente la segunda posición Hijos2. Los modelos de la derecha en la Figura 1 no son, utilizando el concepto de equivalencia regular, modelos separados para cada una de las configuraciones sino un modelo para las dos al tiempo (y para todas las relaciones padres-hijos). En un nivel conceptual, la equivalencia regular puede ser más útil que la equivalencia estructural a la hora de representar roles y estructuras de roles.

La diferencia entre equivalencia estructural y equivalencia regular aparece más claramente en las estructuras que se muestran en la Figura 2. Cada una es una representación de una (bastante simple, por cierto) jerarquía burocrá-

tica. Una de ellas tiene tres niveles y la otra tiene cuatro. Centrando la atención en la de tres niveles y tomando en consideración la equivalencia estructural, todo lo que puede decirse es que $\{d, e\}$ son equivalentes y que $\{f, g\}$ también lo son. Está claro que b y c no pueden ser equivalentes porque no están ligados al resto de la red de la misma manera; tienen un mismo jefe, pero distintos subordinados. En la jerarquía de cuatro niveles esta situación se agudiza, ya que existen solo cuatro conjuntos de actores estructuralmente equivalentes: $\{H, I\}$, $\{J, K\}$, $\{L, M\}$ y $\{N, O, P\}$.

Sin embargo, está claro que hay otros actores «*equivalentes*». En la jerarquía más pequeña, b y c están conectados de modo equivalente a actores equivalentes: están conectados de manera equivalente a jefes y subordinados. En otras palabras, son regularmente equivalentes. El modelo de bloques es Consejo de Administración1 \rightarrow Directivos \rightarrow Trabajadores1 en el que $\{a\}$, $\{b, c\}$, $\{d, e, f, g\}$ ocupan respectivamente las posiciones descritas. Véase el diagrama central de la Figura 3. El vínculo Consejo de Administración1 \rightarrow Directivos está construido² a partir de los vínculos que unen a con sus inmediatos subordinados b y c . El vín-

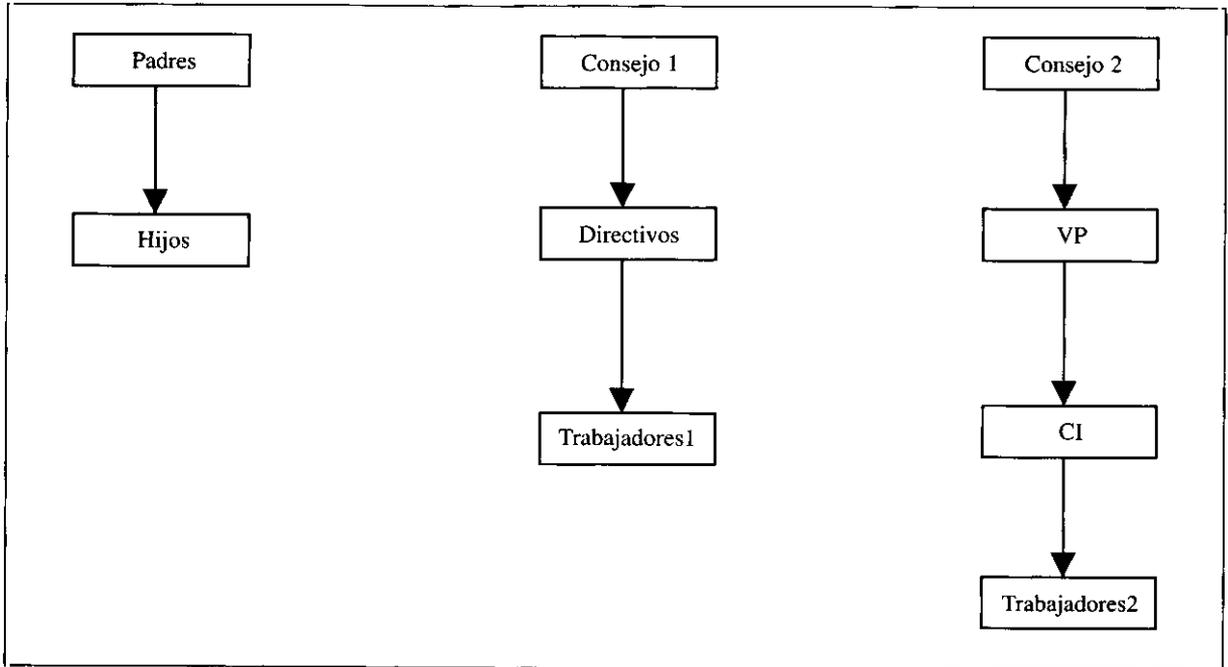


Figura 3.

culo Directivos \rightarrow Trabajadores1 está construido a partir de los vínculos que unen $\{b, c\}$ con los actores del conjunto $\{d, e, f, g\}$.

Junto con la partición de actores se produce la correspondiente partición de relaciones. En la jerarquía de cuatro niveles hay cuatro posiciones en las que $\{A\}$, $\{B, C\}$, $\{D, E, F, G\}$ y $\{H, I, J, K, L, M, N, O, P\}$ ocupan las posiciones que podrían denominarse Consejo de Administración², Vice-Presidentes (VP), Cuadros Intermedios (CI) y Trabajadores². De nuevo, hay un modelo de bloques en el que los actores regularmente equivalentes se agrupan en torno a posiciones y, para cada par de posiciones, los vínculos entre posiciones se construyen a partir de los vínculos entre los actores que las ocupan. El modelo de bloques resultante es una *estructura simplificada que da forma a la red más grande a partir de la cual se ha construido el modelo*. Es la imagen de la estructura que modela. En esta secuencia, los diagramas de la Figura 3 son imágenes de las estructuras contenidas en las Figuras 1 y 2.

Hasta ahora, hemos considerado roles y estructuras de roles. En una jerarquía, cada una de las posiciones representadas lleva aparejada una serie de expectativas. Dado un modelo de bloques, es posible examinar la distribu-

ción de expectativas sobre la estructura relacional y estudiar su conformidad (o no) con dichas expectativas. Se pueden representar estructuras de parentesco y analizar las distintas maneras en las que se solapan y se institucionalizan. En estos ejemplos se ha puesto el énfasis en las estructuras y en la sustancia, y se han escogido para que tuvieran una forma en particular. Los casos reales, como los de las Figuras 4 y 5 tienden a ser más grandes y no pueden describirse tan fácilmente.

Con la idea de modelo de bloques en mente podemos ahora volver nuestra atención a la idea de red social, una idea que ha permanecido implícita en nuestro discurso hasta ahora.

2. Redes sociales

La definición convencional de red como un conjunto de actores sociales y una o más relaciones sociales definidas sobre ellos, es un punto de partida bastante útil. La Tabla 1 contiene una red así, en la que los actores son políticos de una ciudad del medio oeste y el condado circundante. El

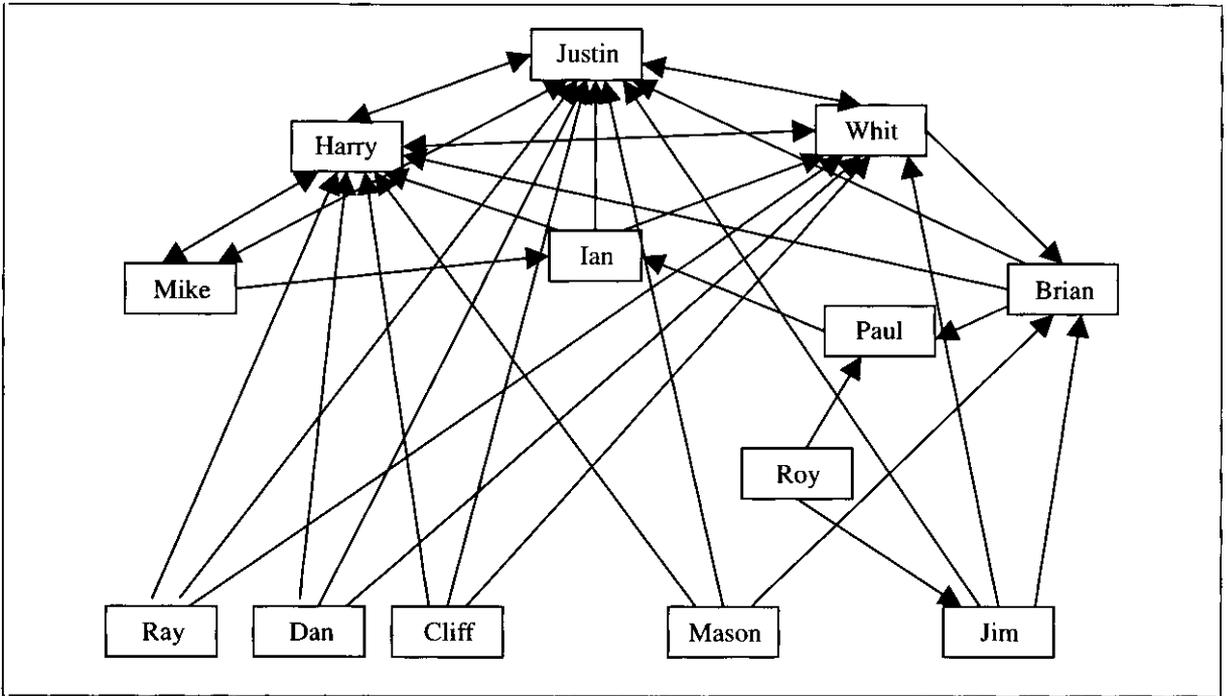


Figura 5.

arcos) como no dirigidos (llamados *aristas*). Una red de este tipo puede tener la siguiente notación $N = (V, A, E)$, donde A es el conjunto de arcos y E es el conjunto de aristas. En el ámbito de una caracterización general de la modelización en bloques esta distinción no es

muy importante (aunque pueden serlo en muchas de sus aplicaciones). Mientras que es posible –y, según muchos, más deseable– considerar redes en las que existe más de una relación, consideraremos en primer lugar redes con una sola relación.

Tabla 1

Actor político		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
Administrador	A	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
Interventor	B	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0
Sheriff	C	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
Consejero1	D	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
Consejero2	E	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Consejero3	F	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
Consejero4	G	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Presidente	H	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
Consejero5	I	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
Consejero6	J	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
Anterior Consejero	K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Anterior Presidente	L	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
Alcalde	M	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0
Fiscal	N	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 2

Chico		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Justin	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Harry	2	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Whit	3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Brian	4	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Paul	5	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Ian	6	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Mike	7	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Jim	8	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Dan	9	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ray	10	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Cliff	11	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Mason	12	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Roy	13	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0

3. Modelización de bloques

Las ideas de «*modelo de bloques*» y «*red social*» pueden asociarse. Dada una red N , se buscan particiones tanto de los actores sociales, V , como de los vínculos, L , para crear un modelo —un blockmodel— de la red. En este *modelo* hay posiciones, cada una ocupada por elementos que proceden de V , con relaciones entre ellas construidas³ a partir de los vínculos de L .

3.1. Usos inductivos de la modelización en bloques

La afirmación hecha en la sección 1 de que un modelo de bloques «... es una estructura simplificada que da forma a la red más grande» ha sido muy seductora para los analistas de redes. La *modelización en bloques* venía a contemplarse como un conjunto de procedimientos útiles para descubrir la «*estructura fundamental*» de una red dada y, como tal, se utiliza como una herramienta de carácter inductivo. Sobre una red dada, en la que exis-

ten una relación o más de una, se hace una partición, de la partición surge un modelo y este modelo se interpreta de alguna manera. Es una idea atrayente. Sin embargo, en tanto que la mayoría de las redes reales no pueden describirse de manera eficiente con modelos de bloques que se expresen exactamente en términos de equivalencia regular, hace falta tener algoritmos que sean, por un lado, fieles a estos conceptos fundamentales y, por otro, suficientemente flexibles como para producir modelos de bloques que sean significativos como aproximaciones.

Tanto si se usan como un procedimiento estrictamente inductivo o como una representación de estructuras de roles⁴, hay dos grandes aproximaciones a la modelización en bloques. Ferligoj *et al.* (1994) contrastan una aproximación «*indirecta*» con una «*directa*». En la primera, la partición se trata como un problema clásico de análisis de conglomerados. Se usa alguna medida de similitud, por ejemplo la correlación producto-momento, o de disimilitud, por ejemplo la distancia euclídea, para crear una matriz de similitud o disimilitud en la que se opera un agrupamiento a través de algún algoritmo para agrupar. El programa de Burt (1976), STRUCTURE⁵, ejemplifica perfectamente este enfoque. El otro de los procedimientos más citados es CONCOR (Breiger *et al.*, 1975), en el que se usan correlaciones⁶.

Uno de los aspectos problemáticos del uso del método indirecto es que se ha prestado poca atención al grado de ajuste entre el modelo de bloques y los datos de carácter empírico de donde surge. La partición simplemente se realiza y se interpreta. Una excepción parcial puede encontrarse en STRUCTURE, donde un modelo de medida, en el sentido de un modelo de ecuación estructural, puede resultar adecuado para ver si los actores colocados en una posición pueden ser tomados como indicadores apropiados para la posición⁷. Lo más usual, sin embargo, ha sido que los conglomerados se recuenten y que este procedimiento de prueba se use para establecer que una partición es «suficientemente buena». Ha habido pocos intentos de buscar un modelo de *mejor ajuste*, en gran medida porque no había una medida de ajuste aceptada.

Por el contrario, el método directo trabaja con los datos de la red y usa una medida específica de ajuste. En Doreian *et al.* (1994) se demuestra que para muchas de las redes publicadas, el método directo proporciona modelos de bloques que se ajustan a la red mejor que las particiones establecidas a través de métodos indirectos, en especial CONCOR y STRUCTURE. Mientras que hay algunas redes en las que el ajuste es igualmente bueno, no hay ejemplos conocidos de particiones establecidas por métodos indirectos que se ajusten mejor que las establecidas directamente. En adelante, nos centraremos exclusivamente en el método directo⁸.

3.2. El método directo para ajustar *modelos de bloques*

El «método directo» supone, tanto una toma de posición acerca de la filosofía que subyace al método, como un conjunto de procedimientos, y se aplica a *cualquier* concepto de equivalencia. Ya se han considerado los dos conceptos de equivalencia en un epígrafe previo.

3.2.1. *Equivalencia estructural*

Consideremos las dos redes padres hijos anteriores como formando una única red. Aplicando la modelización en bloques vía equivalencia estructural, el modelo de bloques para

Tabla 3

Una partición estructuralmente equivalente

	p_1	p_2	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
p_1	0	0	1	1	0	0	0
p_2	0	0	0	0	1	1	1
c_1	1	0	0	0	0	0	0
c_2	1	0	0	0	0	0	0
c_3	0	1	0	0	0	0	0
c_4	0	1	0	0	0	0	0
c_5	0	1	0	0	0	0	0

esta red, basado en la equivalencia estructural, es el que se muestra en la Tabla 3.

Hay un claro patrón en estos bloques, que no ha aparecido por casualidad. Hay cuatro posiciones (conglomerados) y entre las líneas verticales y horizontales hay 16 *bloques* (de ahí el término *modelo de bloques*). La Tabla 3 es una versión reformada de la red original, en la que las filas y columnas de la matriz de adyacencia se han permutado para que los miembros de cada conglomerado estén juntos. La *matriz imagen* se ha construido a partir de la matriz de adyacencia reformada. Los bloques contienen o bien todo 0 o bien todo 1, ya que este modelo de bloques es un ejemplo de una equivalencia estructural estricta. En la matriz imagen cada bloque está representado por un solo elemento y su «construcción» es muy simple: un bloque de 0 se representa como 0 y un bloque de 1 se representa como 1. La matriz imagen es, entonces:

0	0	1	0
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0

Puede hacerse a partir de aquí un enunciado algo más general. Dado un bloque no diagonal, éste puede adoptar sólo dos formas que sean consistentes con el concepto de equivalencia estructural:

0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

Cada bloque tiene o solo 0 (bloque nulo) o solo 1 (bloque lleno). Si se quiere una estricta equivalencia estructural no hay excepciones posibles. Para bloques diagonales hay cuatro formas posibles aunque, en esencia, sólo hay realmente dos modelos:

```

0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1
0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 1
0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1
0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0

```

Los dos modelos adicionales vienen de la necesidad de tomar en consideración los bloques y los elementos diagonales en la matriz de adyacencia. Es posible que en un bloque diagonal nulo haya unos en la diagonal. Esta distribución⁹ de los vínculos en los bloques es consistente con la equivalencia estructural. En la relación original —es decir, en la red para la que buscamos un modelo de bloques («block-model») — los vínculos de la diagonal tienden a ser ambiguos en el sentido siguiente. Si, por ejemplo, la relación es «amistad» las convenciones en la recolección de los datos de la red dan como resultado una representación donde los elementos de la diagonal son ceros. La cuestión de si un actor es amigo de sí mismo se deja a un lado (o se contesta negativamente) y los elementos correspondientes en la matriz de adyacencia son ceros. En este sentido, un bloque diagonal lleno con ceros en la diagonal principal es consistente con una equivalencia estructural exacta. En la práctica, los bloques consistentes con una equivalencia estructural exacta que se encuentran más frecuentemente son, o bien bloques nulos o bloques llenos fuera de la diagonal, o bien bloques diagonales llenos con ceros en la diagonal (al tiempo que bloques nulos o llenos puros).

Hay un teorema bastante simple en el que se establecen las reglas anteriores y aquellas otras consistentes con la equivalencia estructural. En la práctica, desde luego, apenas podemos hallar modelos de bloques reales que sean perfectos, exactos y a la vez no triviales¹⁰. La importancia de estos patrones ideales es que proporcionan una base para medir el grado de ajuste de un modelo de bloques. Consideremos los bloques ideales fuera de la diagonal anterior (el bloque nulo y lleno) e imaginemos que el siguiente patrón hipotético de vínculos se encontrará (encuentra) realmente en dos bloques:

```

0 1 0 0 0 1 1 1 0 1
0 0 1 0 0 1 1 1 1 1
1 0 0 0 0 1 0 1 1 1
0 0 0 0 0 1 1 1 1 1

```

A la izquierda hay un bloque nulo que contiene tres unos. El bloque nulo puro es el bloque ideal más próximo, y aparecen tres «errores» o discrepancias cuando este hipotético bloque real se compara con su ideal más próximo. En la práctica, se le considera como un bloque nulo (esto es, representado por un 0), pero con errores. La regla de construcción es simple: si la mayoría de los elementos son ceros, entonces es un bloque nulo. A la derecha, hay un bloque lleno que contiene dos ceros. El bloque ideal más próximo es un bloque lleno, y cuando el bloque del ejemplo se compara con él, aparecen dos errores. De nuevo, la regla de construcción es simple: si la mayoría de los elementos son unos, entonces se trata de un bloque lleno, representado por un 1.

El error total de ambos bloques es 5. Si cada bloque en un modelo de bloques se compara con su bloque ideal más próximo, entonces la suma de los errores en todos los bloques es una medida intuitiva bastante razonable del ajuste (o la falta de ajuste) del modelo de bloques. Cuantos más errores, menor ajuste.

3.2.2. *Equivalencia regular*

Si reconsideramos la red padre-hijo con dos padres y cinco hijos teniendo en cuenta el concepto de equivalencia regular, tenemos la partición que se muestra en la Tabla 4, con dos conglomerados (posiciones): los padres y los hijos. Este es también un patrón distintivo. Cada bloque es, o bien un bloque nulo, o bien con al menos un 1 en cada fila y columna. También esto está establecido en un teorema (véase Batagelj *et al.*, 1992b). Si una fila (o una columna) contiene un 1 se la denomina fila (o columna) que incluye un 1 y el teorema establece que los bloques consistentes con la equivalencia regular son, o bien bloques nulos o bloques en los que todas las filas y columnas incluyen un 1. Si se considera la red padre-hijo, está claro que cada bloque se ajusta a uno de estos dos patrones.

Tabla 4
Una partición de acuerdo
con la equivalencia regular

	p_1	p_2	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
p_1	0	0	1	1	0	0	0
p_2	0	0	0	0	1	1	1
c_1	1	0	0	0	0	0	0
c_2	1	0	0	0	0	0	0
c_3	0	1	0	0	0	0	0
c_4	0	1	0	0	0	0	0
c_5	0	1	0	0	0	0	0

Para la equivalencia regular, la regla de construcción de bloques nulos es la misma que para la equivalencia estructural. Podemos usar el término 1-cubierto para un bloque para indicar que tanto filas como columnas están 1-cubiertas. La regla de construcción de bloques 1-cubiertos es sencilla: se representa mediante un 1. Nótese que el 1 tiene un significado diferente en una partición realizada según los criterios de la equivalencia regular. Cuando un bloque no está 1-cubierto, es que al menos una fila o una columna no lo son. Cualquiera de estas filas o columnas es una fuente de error, ya que su presencia es inconsistente con la equivalencia regular. Tenemos varias posibilidades que considerar respecto a la magnitud del error. Podría ser la totalidad de las filas y las columnas que no estuvieran 1-cubiertas. Otra medida, mucho menos conservadora, es el número total de ceros en las filas y columnas que no están 1-cubiertos.

La idea de equivalencia regular es una generalización de la de equivalencia estructural. Cualquier equivalencia estructural exacta es también una equivalencia regular exacta. Consideremos los cuatro bloques siguientes:

```

0 0 1 0   1 0 0 0   1 0 1 1   1 1 1 1
0 1 0 0   0 1 1 0   1 1 0 1   1 1 1 1
0 0 0 1   1 0 1 0   1 0 1 1   1 1 1 1
1 0 0 0   0 0 0 1   1 1 1 1   1 1 1 1

```

Estos bloques son todos ellos consistentes con la equivalencia regular; cada fila y columna están 1-cubiertos. Estos patrones revelan

tanto la potencia como la debilidad de la equivalencia regular. Cuando se localiza un bloque de unos, en el caso de la equivalencia estructural su estructura puede saberse exactamente. Sin embargo, en el caso de la equivalencia regular no. Podría ser cualquier cosa entre el patrón disperso de la izquierda y el completo de la derecha. Su generalidad pudiera ser también su lastre. Nótese que el bloque de unos completo (consistente con la equivalencia estructural) debe estar 1-cubierto y, por ello, consistente con la equivalencia regular.

3.3. El ajuste de los modelos de bloques

Como se ha dicho antes, en el enfoque indirecto se trata de operar y hacer clusters sobre una matriz de (di)similitud. Desde el punto de vista del cálculo, el proceso es simple y los resultados inmediatos. Sin embargo, existen tres fuentes de ambigüedad. Primero está la elección de una medida de disimilaridad (entre muchas medidas posibles), y esto tiene mucha importancia¹¹. La segunda fuente es la elección de un procedimiento para hacer los clusters. Hay muchas opciones, y los resultados de la partición pueden depender del algoritmo empleado (incluso en STRUCTURE, se pasó de usar los algoritmos de Johnson (1967) a usar una función criterio desarrollada por Ward (1963) para hacer clusters). Por último, cuando se registra el diagrama de un cluster o dendograma, quedan aún elementos de juicio referentes a los detalles de la pertenencia al cluster. Diferentes analistas pueden generar particiones muy diferentes a partir del mismo dendograma o diagrama de cluster.

Usando el método directo, las exigencias de cálculo son mucho más grandes. El núcleo de los procedimientos es la comparación entre un modelo de bloques real y el modelo de bloques ideal más cercano a él. Para cada tipo de equivalencia hay un pequeño conjunto de bloques que pueden considerarse ideales (véanse las dos secciones anteriores). Para cada bloque en una partición se define su correspondiente bloque ideal más próximo y la diferencia entre cada pareja de bloques en ambas particiones se mide de conformidad con una función criterio. La función criterio es simplemente el recuento del número total de errores y el procedimiento

Tabla 5
Ejemplo de movimiento de un vértice

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	0	1	1	0	0
<i>b</i>	1	0	0	0	0
<i>c</i>	1	1	0	0	0
<i>d</i>	0	0	0	0	0
<i>e</i>	0	0	0	0	0

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	0	1	1	0	0
<i>b</i>	1	0	0	0	0
<i>c</i>	1	1	0	0	0
<i>d</i>	0	0	0	0	0
<i>e</i>	0	0	0	0	0

de clusterización trabaja para minimizar esta función criterio. Lo hace a través de algún método concreto de optimización.

Supongamos que buscamos un modelo de bloques con k posiciones. El primer paso es hacer aleatoriamente una partición de los vértices (los elementos de V) en k clusters. Se opera con la función criterio. Una vez dados los bloques, hay dos maneras de cambiar la composición de los clusters. Una es mover un vértice de un cluster a otro, como queda ilustrado en la Tabla 5. A la izquierda hay un hipotético modelo de bloques con $k = 2$. Un cluster es $\{a, b\}$ y el otro es $\{c, d, e\}$. Los tres errores ($a \rightarrow c$, $c \rightarrow a$ y $c \rightarrow b$) están en negrita en la tabla. Supongamos ahora que movemos el vértice c desde el segundo cluster hasta el primero. El resultado aparece a la derecha de la Tabla 5. El resultado del movimiento de un vértice es un modelo de bloques con un error ($b \rightarrow c$).

La segunda manera en la se puede cambiar la pertenencia a los clusters es intercambiar

(trasponer) un par de vértices entre clusters, como se muestra en la Tabla 6, donde se ha intercambiado c y d entre los clusters $\{a, b, c\}$ y $\{d, e, f\}$. De nuevo, los errores se han puesto en negrita a ambos paneles de la Tabla 6. En el panel de la izquierda, hay 8 errores en total, y 2 en cada uno de los bloques. Cuando se intercambian c y d el número de errores desciende a 3. Antes del intercambio, 4 de los errores tienen que ver con d . Como la conexión de d con el resto de la red es muy similar a las de a y b , colocar a d en un bloque junto con a y b elimina esos errores. Por otro lado, uniendo a d con a y con b el doble vínculo entre a y b deja de aparecer como error.

Los procedimientos para mover un vértice de un cluster a otro y para intercambiar vértices entre clusters son el núcleo del procedimiento de optimización de Batagelj *et al.* (1992a). Tras una primera partición aleatoria, se procede a seleccionar aleatoriamente vértices que bien se mueven o se trasponen. Si el número de errores disminuye, se adopta la

Tabla 6
Ejemplo de intercambio de dos vértices

	<i>A</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>a</i>	0	1	0	1	0	0
<i>b</i>	1	0	0	1	0	0
<i>c</i>	0	0	0	0	0	1
<i>d</i>	1	1	0	0	0	0
<i>e</i>	0	0	0	0	0	1
<i>f</i>	0	0	1	0	0	0

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>a</i>	0	1	1	0	0	0
<i>b</i>	1	0	1	0	0	0
<i>d</i>	1	1	0	0	0	0
<i>c</i>	0	0	0	0	0	1
<i>e</i>	0	0	0	0	0	1
<i>f</i>	0	0	0	1	0	0

(nueva) partición. Desde luego, dado que el objetivo último es minimizar los errores, si el número de errores aumenta se descarta la nueva partición. Esta operación se repite hasta que ya no es posible efectuar ninguna mejora y la partición se registra junto con su función criterio (el número de errores).

Está claro que en este proceso podemos examinar solamente un pequeño número de particiones. El problema es que no podemos tener idea de si este «mínimo error» constituye el mejor resultado posible. El riesgo (muy probable) que corremos es que la operación quede atrapada en un mínimo local donde no haya procedimiento posible de mejora sobre la partición considerada. Dada una partición que tomemos como provisional, solo pueden considerarse las particiones que se puedan obtener a partir de ella moviendo un vértice de un cluster a otro o trasponiendo un par de vértices entre clusters. El modo de tratar este problema es repetir el proceso entero varios cientos de veces y registrar el conjunto de mejores particiones (es decir, las que contengan un menor número de errores). Por supuesto, aun así es posible que existan mejores particiones a las que no se llegó¹². Esta es la razón por la que es necesario hacer muchas repeticiones: proporciona seguridad frente a este problema.

En la siguiente sección hay algunos ejemplos de este método de realizar particiones. Reservaré la evaluación del método hasta después de haber visto estos ejemplos.

4. Dos aplicaciones

Los dos análisis empíricos (y reales) se basan en las redes que se muestran en las Figuras 4 y 5.

4.1. Un equipo de la liga infantil de baseball

Consideremos la red de la liga infantil que aparece en la Figura 5. En el relato que Fine (1987) hacía de este (bastante exitoso) equipo describía un grupo central, el verdadero corazón del equipo. El capitán del equipo era Justin y sus amigos más íntimos Harry y Whit. El

equipo tenía también una rica cultura que se difundía desde sus líderes al resto de los seguidores. ¿Refleja esta circunstancia el patrón que dibujan las elecciones sociométricas?

Consideremos el panel superior de la Tabla 7. Se ha establecido un modelo de bloques, teniendo en mente la equivalencia estructural, que tiene dos posiciones. Una (A) coincide con el grupo líder, mientras que la otra (B) agrupa a todos los demás miembros del equipo. Los elementos que aparecen en negrita en la tabla marcan los errores. El valor mínimo de la función criterio es 17. A la izquierda se muestra la matriz imagen del modelo, y a la derecha la correspondiente cuenta de errores. El patrón resultante define claramente centro y periferia.

1	0	0	3
1	0	7	7

Pero un modelo de bloques con solo dos posiciones es algo que, claramente, está aún poco refinado. Supongamos, pues, que buscamos una partición con 4 posiciones, de nuevo en términos de equivalencia estructural, como se muestra en la parte inferior de la Tabla 7. La matriz imagen y su correspondiente distribución de errores son:

1	0	0	0	0	3	0	0
1	0	0	0	3	2	1	0
1	0	0	0	2	2	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0

El grupo central (A) sigue conteniendo a Justin, Harry y Whit. La posición que hemos llamado (B) en la parte superior de la Tabla 7 se ha partido en tres posiciones más pequeñas. Roy es ahora el único ocupante de una posición (que llamamos D). Paul y Jim ocupan otra posición (C) y el resto de los chicos están en B. Cuatro de los chicos que están en B dijeron ser los mejores amigos de los tres chicos que están en A y los tres restantes dijeron ser amigos de los mismos dos chicos de A (Justin y Harry).

Paul y Jim (en la posición C) dijeron ser amigos de Justin y Whit, un patrón que difiere del de los chicos que están en B. Además, Roy responde a un patrón único, ya que eligió a Ian y Ray como sus mejores amigos. Este inusual (para este tipo de grupo) patrón de elecciones diferencia, aún más allá, a Paul

Tabla 7
Dos modelos de bloques a partir de la red de Sharpstone

Modelo de bloques con dos posiciones

			1	2	3	4	6	7	9	10	11	12	5	8	13
A	Justin	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	Harry	2	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	Whit	3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	Brian	4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	Ian	5	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Mike	6	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	Dan	7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Ray	8	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Cliff	9	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Mason	10	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Paul	11	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	Jim	12	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Roy	13	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0

Modelo de bloques con cuatro posiciones

			1	2	3	4	6	7	9	10	11	12	5	8	13
A	Justin	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	Harry	2	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	Whit	3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	Brian	4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	Ian	5	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Mike	6	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	Dan	7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Ray	8	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Cliff	9	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Mason	10	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	Paul	11	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	Jim	12	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	Roy	13	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0

y Mason de los chicos que están en C en términos de equivalencia estructural. Sería interesante, si fuera accesible otro tipo de material etnográfico, ver si hay otros patrones de comportamiento asociados a esta caracterización de la estructura fundamental de este equipo de la Liga. (Véase Doreian *et al.*, 1998) para un análisis de otro equipo en la misma liga.

4.2. Una red de actores políticos

Esta red la proporcionaron Doreian y Albert (1986) en lo que resultó ser un análisis fallido. Se usaron STRUCTURE y CONCOR para llegar a la partición que se muestra en la Tabla 8 (panel superior) y en la Figura 4. El asunto tenía que ver con un conflicto

Tabla 8
Dos particiones de la red de actores políticos

Partición estructuralmente equivalente a partir del método indirecto

	Actores Políticos	A	C	D	E	F	G	N	B	H	I	J	M	K	L
A	Gerente	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
C	Sheriff	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
D	Consejero 1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
E	Consejero 2	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	Consejero 3	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
G	Consejero 4	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N	Fiscal	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	Interventor	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
H	Presidente	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1
I	Consejero 5	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
J	Consejero 6	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0
M	Alcalde	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
K	Consejero anterior	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
L	Presidente anterior	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0

Partición estructuralmente equivalente a partir del método directo

	Actores Políticos	A	C	D	F	G	B	H	I	J	L	M	E	K	N
A	Gerente	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C	Sheriff	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
D	Consejero 1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
F	Consejero 3	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
G	Consejero 4	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	Interventor	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
H	Presidente	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0
I	Consejero 5	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
J	Consejero 6	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0
L	Presidente anterior	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0
M	Alcalde	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
E	Consejero 2	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K	Consejero anterior	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
N	Fiscal	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

político entre dos subgrupos de políticos. Uno estaba liderado por el Gerente del Condado (A) y el otro por el Interventor del Condado (B). El análisis de Doreian y Albert demostraba que había, en efecto, dos alianzas lideradas por los dos protagonistas. Lo que es más, el foco específico del conflicto era una orden judicial para la construcción de una cárcel.

El patrón de voto en el Consejo (por parte de los Consejeros y del Presidente) reflejaba *exactamente* la ruptura entre las dos alianzas. Este modelo de bloques, que se dibuja en la Figura 6, mostraba una tercera posición ocupada por el anterior Presidente y uno de los anteriores miembros del Consejo. Esta tercera posición se interpretó como si fuera un grupo neutral que mediara en el conflicto entre los

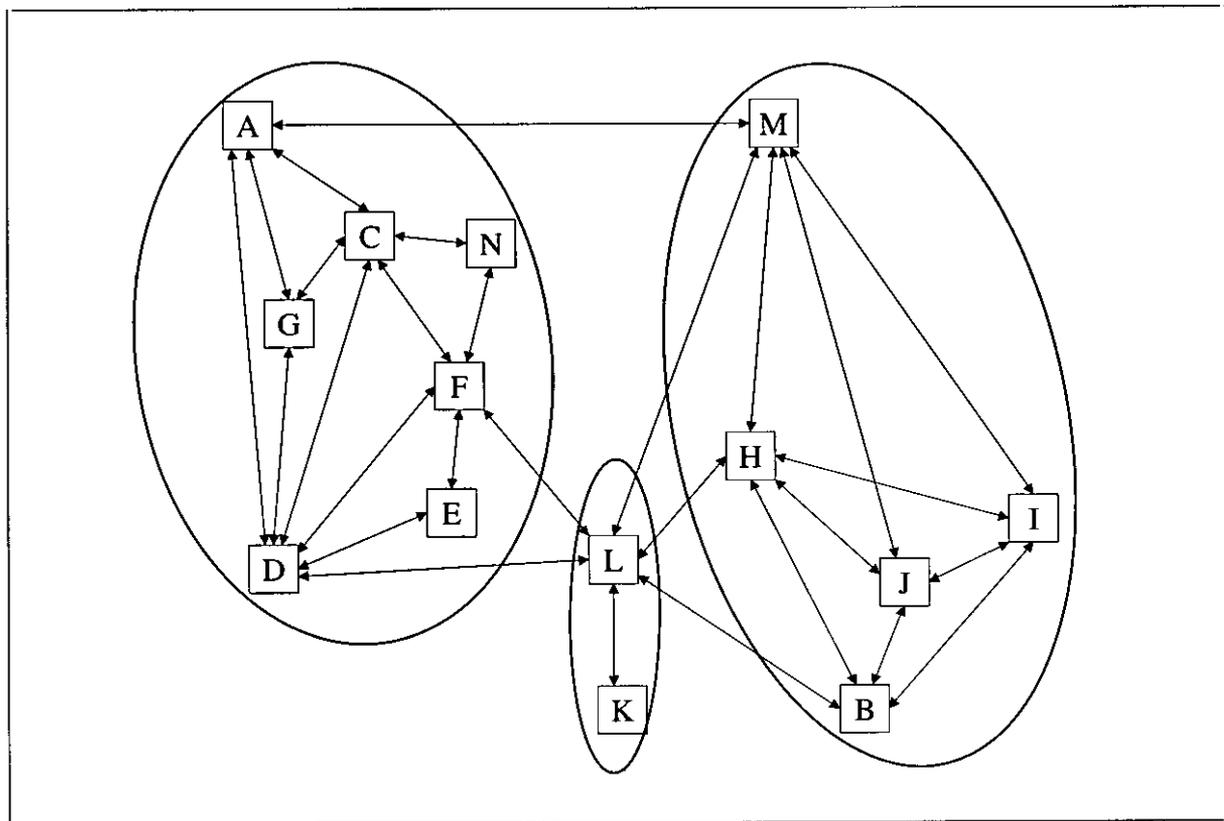


Figura 6.

otros dos. Esta interpretación era bastante plausible, sin embargo, como el análisis se estaba realizando siguiendo el método indirecto, no se usó ninguna medida de ajuste y cuando, subsiguientemente, la medida fue calculada, el número de errores era igual a 32.

Una partición de la misma red, también buscando la equivalencia estructural, pero usando un método directo tenía 26 errores. Esta partición se muestra en la parte inferior de la Tabla 8 y se representa en la Figura 7. Supone una mejora significativa y sugiere una interpretación alternativa. Las dos alianzas, una alrededor de A y la otra alrededor de B, aparecen aún claramente. Sin embargo, el anterior Presidente del Consejo (L) está en una de las alianzas, y la comunicación entre ambas pasa a través de L y M. Los miembros de la tercera posición son los actores verdaderamente periféricos (E, K, N). K está unido a la red sólo a través de su vinculación con L, mientras que E y N están en la periferia de una de las alianzas, al mismo tiempo que pertenecen a ella.

5. Conclusiones

La diferencia que aparece entre los modelos de bloques obtenidos a partir de la red de actores políticos no es algo inusual. Frecuentemente, el número de errores presente en los modelos de bloques obtenidos a través del método indirecto es más alto —e incluso mucho más alto— que el de aquellos que se obtienen a través del método directo. Drabek *et al.* (1981) presentaron algunas redes interorganizativas formadas durante misiones de Búsqueda y Rescate (Search and Rescue, SAR) junto con los modelos de bloques obtenidos con CONCOR. La Tabla 9 muestra una comparación de cuatro de estos modelos de bloques y el número de errores correspondiente al empleo de métodos directos e indirectos.

Las diferencias son llamativas: en todos los casos el número de errores obtenido a partir de métodos directos es muy inferior al obtenido a

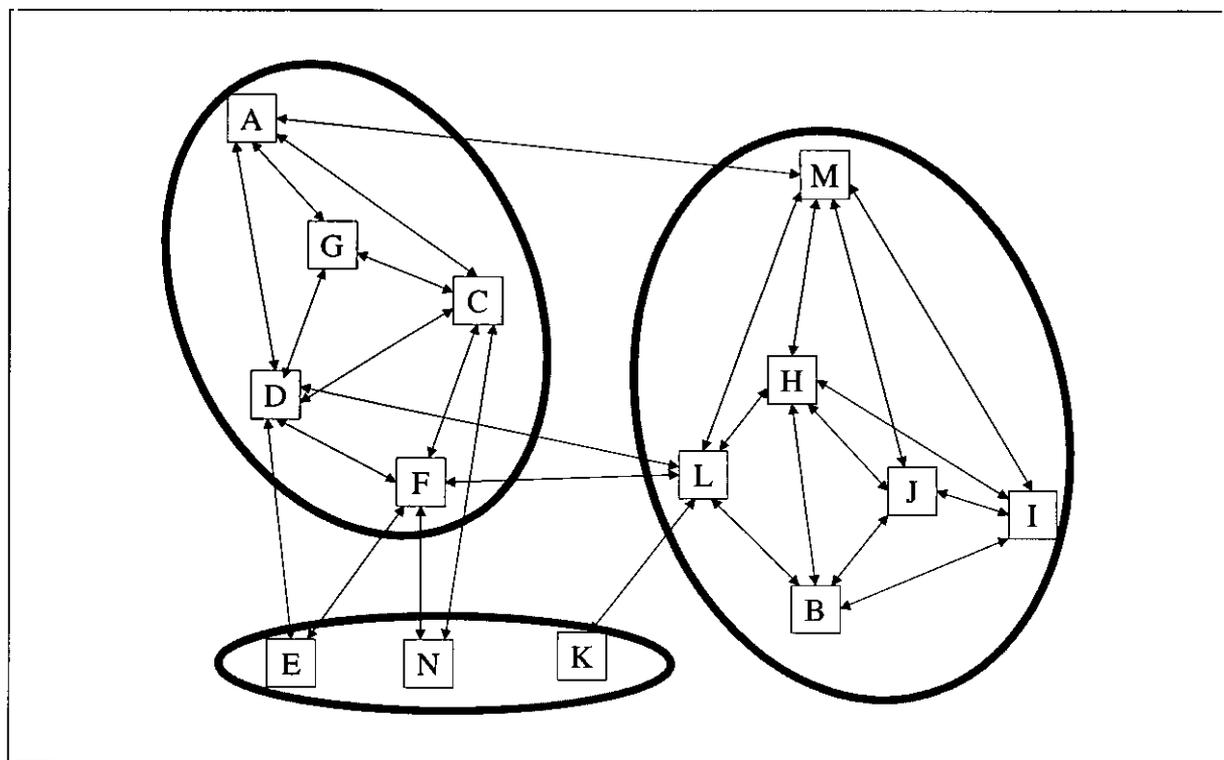


Figura 7.

partir de métodos indirectos. La disminución más pequeña en el número de errores es del 28%. Está claro que las particiones realizadas a partir de métodos directos proporcionan un ajuste mejor. Sobre la sola base de este criterio los métodos directos son, pues, preferibles. Sin embargo, aún quedan problemas sin resolver en relación con el método directo. El mayor de ellos se refiere a las exigencias de cálculo. Cuando se consideran redes grandes y con relaciones múltiples, el método directo puede ser muy, muy lento. En comparación, usando el método indirecto se obtienen particiones

mucho más fácilmente. En otras palabras, puede que la ingente tarea de cálculo que habría que realizar para obtener mejores particiones no compense.

El lector atento se habrá dado cuenta de que la función criterio (17) del modelo de bloques de dos posiciones del equipo de la Liga (panel superior de la Tabla 7) es mayor que el valor de la misma función (14) en el modelo de cuatro posiciones. Esta disminución no es indicativa de una mejor partición. La magnitud de la función criterio disminuye invariablemente a medida que aumenta el número de clusters. Esto, intuitivamente tiene sentido. En la mayoría de las redes sociales hay mas ceros que unos. Si hay un cluster (en un modelo de bloques de una sola posición) todos los unos serán errores, ya que no son consistentes con un bloque nulo¹³. Si cada vértice está en un cluster propio (en un modelo de n posiciones) no habrá errores pero, como ya se dijo más arriba, se trataría de una partición sin interés alguno. La mayoría de las particiones interesantes estarán entre esos dos extremos. Habíamos dicho que una de las desventajas del enfoque

Tabla 9

Número de errores en cuatro redes SAR

Misión SAR	Indirecto	Directo	Disminución de errores
Bandera	35	23	34%
Cheyenne	53	31	42%
Kansas	79	57	28%
Wichita	78	43	45%

indirecto es que diferentes analistas pueden construir diferentes particiones a partir del mismo diagrama de clusters. Este es también un problema del método directo, que deriva de la elección del número de particiones.

Cuando se opera sobre un diagrama de clusters a partir del enfoque indirecto y se elige el número de posiciones, se obtiene una única partición. Con el enfoque directo puede haber más de una partición que cumpla con el valor mínimo de la función criterio. La red de actores políticos es una de ellas, ya que hay otras dos particiones igualmente bien ajustadas para esta red. Esto puede verse como una desventaja (¿cuál escogemos?), o como una oportunidad para examinar más detalladamente los datos. El análisis puede hacerse más complicado, pero también más interesante.

El enfoque directo expuesto aquí puede generalizarse naturalmente. Con equivalencia estructural o regular, los patrones permitidos que deben seguir los bloques ideales son menores en número y todos los bloques se miden en términos de la diferencia respecto al pequeño grupo de bloques ideales. Esta generalización implica dejar que cada bloque tenga su propio bloque ideal más próximo y ampliar los patrones a los que se ajustan los bloques ideales. Además, hace posible especificar de antemano un modelo de bloques y su ajuste a una red real (véase Batagelj *et al.* 1997). Esto es un modo de usar los modelos de bloques en fase de prueba y, como tal, nos retrotrae a uno de los asuntos que centraron las primeras formulaciones en torno a los modelos de bloques. Entonces no existían herramientas que permitieran proceder desde los elementos sustantivos. Ahora sí las tenemos. El uso inductivo a partir de los datos de las técnicas de *blockmodel* puede emparejarse naturalmente con las preocupaciones sustantivas iniciales acerca de los roles, las características estructurales, la estructura social y el comportamiento social.

NOTAS

* Los materiales presentados aquí forman parte de una investigación conjunta con Vladimir Batagelj y Anuska Ferligoj (ambos Profesores de la Universidad de Lubjana, Eslovenia. El Profesor Batagelj es el autor del programa de análisis reticular PAJEK. (N.T.)).

¹ Aunque existen parejas del mismo sexo con hijos, son excepcionales respecto a las parejas tradicionales. Menos excepcionales son las familias con uno solo de

los padres (la mujer más frecuentemente) y la primera fila de la Figura 1 puede considerarse como una representación de esa situación.

² La naturaleza de esta «construcción» se considerará en la siguiente sección.

³ Esta afirmación se comentará con más detalle más abajo.

⁴ No son mutuamente excluyentes.

⁵ Este paquete informático se ha mantenido como sistema en sí mismo hasta recientemente. Algunos de sus procedimientos se implementan en UCINET (Everett *et al.* 1998).

⁶ Este no es un procedimiento totalmente indirecto en sentido estricto (Véase Batagelj *et al.*, 1992a) pero sí que usa las correlaciones que se construyen a partir de los datos de la red.

⁷ También se han propuesto algunas otras medidas *ad hoc*, pero ninguna ha encontrado una aceptación unánime. Además, es posible colocar a todos los actores que no entran en un conglomerado en un conglomerado «residual». Esto plantea problemas, ya que no existiría ningún modelo de medida conveniente para ese conglomerado.

⁸ Hay muchas discusiones acerca del método indirecto en la bibliografía sobre la materia.

⁹ Empíricamente, se trata de una distribución altamente improbable y no la consideraremos en el futuro.

¹⁰ El modelo de bloques en el que cada vértice está en su propia posición tendrá una equivalencia estructural exacta. Pero si uno de nuestros objetivos es proporcionar una imagen simplificada de la red, usar la red como modelo de sí misma no ayuda en nada. Una partición así es completamente trivial. Por otro lado, las particiones con muchos fallos y con solo unas pocas posiciones ocupadas conjuntamente son de un valor muy limitado.

¹¹ Véase el intercambio entre Faust y Romney (1985) y Burt (1986) respecto a los méritos relativos de la correlación y la distancia euclídea como medidas apropiadas para el modelado de bloques.

¹² Este es un procedimiento de optimización local.

¹³ Si hay más unos que ceros, entonces los ceros serán inconsistentes con un bloque de unos.

BIBLIOGRAFÍA

- BATAGELJ, V., P. DOREIAN y A. FERLIGOJ, «An optimization approach to regular equivalence». *Social Networks*, 14 (1-2): 121-135, 1992.
- BATAGELJ, V., A. FERLIGOJ y P. DOREIAN, «Direct and indirect methods for structural equivalence». *Social Networks*, 14 (1-2): 63-90, 1992.
- BREIGER, R. L., S. A. BOORMAN y P. ARABIE, «An algorithm for clustering relational data with applications to social networks analysis and comparisons to multidimensional scaling». *Journal of Mathematical Psychology*, 12: 328-383, 1975.
- BURT, R. S., «Positions in social networks». *Social Forces*, 55: 93-122, 1976.
- BURT, R. S., «A cautionary note». *Social Networks*, 8: 205-211, 1986.
- DOREIAN, P. y L. ALBERT, «Partitioning political actor networks: some quantitative tools for analyzing qualitative networks». *Journal of Quantitative Anthropology*, 1: 279-291, 1989.

- DOREIAN, P., V. BATAGELJ y A. FERLIGOJ, «Partitioning networks based on generalized concepts of equivalence». *Journal of Mathematical Sociology*, 19: 1-27, 1994.
- DRABEK, T. E., H. L. TAMMINGA, T. S. KILIJANEK y C. R. ADAMS, *Managing Multiorganizational Emergency Responses*. Institute of Behavioral Science, University of Colorado, 1981.
- FAUST, K. L. y A. K. ROMNEY. «Does structure find structure? A critique of Burt's use of distance as a measure of structural equivalence». *Social Networks*, 7: 77-103, 1985.
- FERLIGOJ, A., V. BATAGELJ y P. DOREIAN, «On connecting network analysis and cluster analysis», en G. H. FISHER y D. LAMING (eds.) *Contributions to Mathematical Psychology, Psychology, Psychometrics and Methodology*, capítulo 24, pp. 329-344, Springer-Verlag, Nueva York, 1994.
- FINE, G., *With the Boys: Little League Baseball and Pre-adolescent Culture*. University of Chicago Press, Chicago, 1978.
- LORRAIN, F. y H. C. WHITE, «Structural equivalence of individuals in social networks». *Journal of Mathematical Sociology*, 1: 49-80, 1971.
- JOHNSON, S., «Hierarchical clustering schemes», *Psychometrika*, 38: 341-254, 1967.
- WARD, J. H., «Hierarchical grouping to optimize an objective function». *Journal of the American Statistical Association*, 58: 236-244, 1963.
- WHITE, D. R. y K. P. REITZ, «Graph and semigroup homomorphisms on networks of relations». *Social Networks*, 5: 193-234, 1983.