Redes sociales y semigrupos

John P. Boyd

(Traducción: Reyes Herrero)

1. Introducción

¿Por qué son útiles los semigrupos para el estudio de las redes sociales? ¿Cómo puede relacionarse la noción matemática de «semigrupo» con el concepto sociológico de red? La respuesta es que para hacer una descripción clara de una red social es necesario un concepto matemático, el de «relación», y eso nos lleva directamente a los semigrupos. Brevemente, un *semigrupo* es un conjunto en el que se ha definido una operación binaria que cumple la propiedad asociativa. Es decir, si S es un conjunto no vacío, que llamamos *conjunto origen*, una operación binaria definida sobre S es una función por la cual a cada par ordenado de elementos de S, como r y s, le corresponde otro elemento de S que tiene como expresión $r \cdot s$ y se llama *producto* de r y s. Esta operación binaria cumple la *propiedad asociativa* si para cualesquiera que sean r, s, t de S

$$(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t)$$

El efecto más interesante de la propiedad asociativa es que, en realidad, se puede prescindir de los paréntesis; es decir, que la expresión $r \cdot s \cdot t$ no ofrece ningún tipo de ambigüedad. Otros símbolos corrientes para operaciones en semigrupos son $\circ$, $\bullet$, $\times$, $+$, $\cap$, $\cup$, $\wedge$ y $\vee$. Si el símbolo de la operación es «+» entonces decimos que la operación es una «suma» en vez de un «producto». De hecho, el símbolo de la operación suele omitirse muy a menudo, y así, el producto de r y s suele expresarse simplemente por la yuxtaposición de ambos elementos, como en rs. Aunque un semigrupo es en realidad un par ordenado del tipo $(S,\circ)$, normalmente se representa por su conjunto origen de referencia S si ello no da lugar a confusiones. A continuación se presentan algunos sencillos ejemplos de lo que es (o no es) un semigrupo.

Ejemplo 1. $(\mathbf{N}, \cdot\,)$, donde $\mathbf{N} = \{1, 2,...\}$ es el conjunto de los números naturales (números enteros positivos) y la operación binaria definida es la multiplicación.

Ejemplo 2. Otro ejemplo de semigrupo definido sobre el mismo conjunto origen de los números naturales es aquel en el que la operación es la suma, en lugar de la multiplicación.

John P. Boyd. University of California at Irvine.
Política y Sociedad, 33 (2000), Madrid (pp. 105-112)

Ejemplo 3. La resta no es una operación binaria que pueda definirse en **N**, porque hay algunos pares ordenados de **N** para los que no está definida. Por ejemplo, 1 – 2 no está definido en **N**. Por supuesto, si incorporamos los números negativos y formamos el conjunto **Z** de los números enteros, la resta se convierte también en una operación binaria posible. No obstante, el par (**Z**, –) no es un semigrupo, porque no cumple la propiedad asociativa. Así, $7 - (3 - 1) = 7 - 2 = 5$, mientras que $(7 - 3) - 1 = 4 - 1 = 3$.

No todos los semigrupos cumplen la *propiedad conmutativa*, según la cual para cualesquiera r y s de S, $r \cdot s = s \cdot r$. Los dos primeros ejemplos de semigrupos sí la cumplen, sin embargo.

Ejemplo 4. Un buen ejemplo de semigrupo que no cumple la propiedad conmutativa es el conjunto de todas las matrices de 2 por 2 de valores reales con la multiplicación de matrices convencional. Es sencillo encontrar dos matrices de ese tipo para las que no se cumpla la propiedad conmutativa. Para cumplir la propiedad conmutativa, las matrices tienen que compartir algunas propiedades especiales, como tener el mismo autovector.

Ejemplo 5. Los semigrupos con cero a la izquierda se construyen sobre un conjunto no vacío S definiendo la operación $st = s$ para cualesquiera s y t de S. En la bibliografía sobre redes sociales esta operación es más conocida como la «ley de la primera letra» [1] (Boorman y White, 1976). Nótese que este tipo de multiplicación nunca cumple la propiedad conmutativa excepto en el caso de que $s = t$.

Ejemplo 6. Los semigrupos con cero a la derecha son «complementarios» de los con cero a la izquierda porque satisfacen la condición inversa: $ts = s$, que también se conoce como «ley de la última letra» [2].

Dados dos semigrupos cualesquiera S y T es posible obtener un nuevo semigrupo, que se denomina *producto directo*, definido como el producto cartesiano de todos los pares ordenados (s, t), donde s es un elemento de S y t es un elemento de T. La multiplicación se define así:

$$(s, t)\,(s', t') = (ss', tt'),$$

para todo s y s' perteneciente a S y para todo t y t' perteneciente a T.

Ejemplo 7. Una banda rectangular es el producto directo de un semigrupo con cero a la izquierda y un semigrupo con cero a la derecha. La banda rectangular combina las leyes de la primera y última letra en un mismo semigrupo. De nuevo, no se cumple la propiedad conmutativa, excepto para ejemplos triviales.

Ejemplo 8. Los semigrupos *completamente simples* son isomorfos de un sandwich de Rees (Clifford y Preston, 1961) definido sobre el conjunto origen $L \times G \times R$, donde L es un semigrupo con cero a la izquierda, G es un grupo y R es un semigrupo con cero a la derecha. La multiplicación está definida por una función φ de $L \times R$ en G según la cual:

$$(x, g, y)\,(x', g', y') = (x, g\,\varphi(y, x')\,g', y')$$

Se empleó un semigrupo de este tipo en Boyd (1991) para describir la red de monjes de Sampson (1969) como una combinación de la ley de la última letra y el equilibrio estructural.

Dado un subconjunto no vacío S del semigrupo T, si para cualesquiera s y s' de S el producto ss' también pertenece a S, decimos que S es un *subsemigrupo* de T. Otra manera de expresar lo mismo es decir que un subsemigrupo está «cerrado» con respecto a la multiplicación. Nótese que todo semigrupo es siempre un subsemigrupo de sí mismo. Resulta sencillo demostrar que la intersección no vacía de dos subconjuntos de un mismo semigrupo es de nuevo un semigrupo. Sin embargo, la unión de subsemigrupos normalmente no es un subsemigrupo. No obstante, sea G un subconjunto cualquiera de un semigrupo S, el conjunto finito de todos los productos de los elementos de G es un semigrupo de S. El semigrupo de S resultante se representa como $<G>$ y se denomina semigrupo *generado* por G, mientras que nos referiremos a G como al conjunto de los *generadores* de $<G>$.

La otra gran herramienta de la que disponemos para comparar semigrupos es el «homomorfismo», definido como una función (o aplicación) de un semigrupo en otro que conserva la multiplicación. Esto es, si $(S, \cdot)$ y $(T, \circ)$ son dos semigrupos y φ es una función de dominio S y de rango T, decimos que φ es un homomorfismo si para cualesquiera s y s' pertenecientes a S,

$$\varphi(s \cdot s') = \varphi(s) \circ \varphi(s')$$

Al elemento $\varphi(s)$ se le llama la *imagen* de s (respecto de φ). Esto nos lleva al siguiente enunciado sobre los homomorfismos: «la imagen del producto es igual al producto de las imágenes».

El ejemplo clásico de homomorfismo es la aplicación de «paridad» del semigrupo multiplicativo de los números enteros en el semigrupo de dos elementos, «par» e «impar», con las reglas usuales en cuanto a la multiplicación: (impar × impar) y (par × par) da como resultado «par» en ambos casos, mientras que impar por par da impar. Esta aplicación conserva la estructura tanto aditiva como la multiplicativa, así que es un homomorfismo de dos semigrupos, $(\mathbf{Z}, +)$ y $(\mathbf{Z}, \times)$.

De igual modo, otro ejemplo de homomorfismo es el de la función logarítmica del semigrupo multiplicativo de números reales positivos en el grupo aditivo de todos los números reales. La función logarítmica es un homomorfismo gracias a la bien conocida regla según la cual el logaritmo del producto es igual a la suma de los logaritmos; esto es $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

Cuando un homomorfismo es biyectivo se llama *isomorfismo*. Los semigrupos isomórficos se consideran idénticos excepto a efectos de «renotación». Por ejemplo, la función logarítmica es un isomorfismo.

Los homomorfismos son la principal herramienta para el diseño de semigrupos. Si cada uno de los elementos en el semigrupo objetivo es la imagen de algún elemento en el semigrupo fuente, decimos que el objetivo es la *imagen* de la fuente. La imagen puede ser mucho más pequeña que la fuente y, sin embargo, preservar su estructura multiplicativa (o aditiva). Por ejemplo, la proyección de un vector del espacio en un subespacio con menos dimensiones es un homomorfismo de la suma de vectores.

Aunque la noción básica de semigrupo debería resultar clara todavía queda por ver por qué los semigrupos son relevantes para el estudio de las redes sociales. Para ello tenemos que ofrecer interpretaciones en términos de redes sociales para cada uno de los tres elementos de un semigrupo: el conjunto S, la operación binaria y la propiedad asociativa.

2. Semigrupos de relaciones

En la mayoría de las aplicaciones comunes de los semigrupos al campo de las redes sociales, el conjunto origen es normalmente algún conjunto de relaciones sociales, como «amigo», «madre», «enemigo» etc., mientras que la operación binaria es normalmente la composición de relaciones, como en «la madre de un amigo».

Dependiendo de la situación, estas relaciones pueden hacerse operativas de diferentes maneras. Un «amigo» puede ser, en un estudio determinado, un conjunto de pares ordenados de personas (x, y) donde y muestra un comportamiento «amistoso» objetivo hacia x. En otro estudio, sin embargo, podría determinarse que x es «amigo» de y si así lo confirma y.

Una convención usual es usar letras mayúsculas para designar las relaciones concretas. Por lo tanto, tiene sentido usar mayúsculas en bastardilla para los semigrupos de esas relaciones. Así, los elementos típicos de un semigrupo **S** de relaciones se designarían mediante R, S y T en oposición a r, s y t, que serían los elementos de un semigrupo considerado en abstracto. Si X es el conjunto de individuos sobre el que se definen esas relaciones, a los individuos se les designa mediante minúsculas en cursiva. El enunciado «el individuo x está relacionado mediante R con la persona y» se expresa mediante la notación xRy. Nótese que en un semigrupo de relaciones hay dos conjuntos, el conjunto de individuos y el conjunto base de relaciones que se aplican a los individuos.

Debemos ahora detenernos a considerar dos posibles maneras de interpretar los pares ordenados; es decir, xRy ¿debe leerse como «x está relacionado por R con y» o viceversa? Si R designa la relación «madre», la primera interpretación atribuye a x el papel de madre y a y el de hijo, mientras que la segunda interpretación invierte esos papeles. Aunque en inglés las dos interpretaciones son posibles, la primera parece más natural en español, de modo que en adelante consideraremos que xRy significa que «x está relacionado por R con y». Para poner un ejemplo concreto, si R es la relación «ser amigo de», xRy significa que x es amigo de y. Cualquier relación R puede representarse a través de una matriz de ceros y unos en la que el elemento que se encuentra en el cruce de la fila x con la columna y es un 1 si y solo si puede mantenerse que xRy. Aunque esta convención de colocar a los que eligen en las filas y a los elegidos en las columnas no es la más común, viene forzada por la decisión tomada sobre la interpretación a adoptar.

Muchos tipos de relaciones son más fáciles de visualizar representándolas como matrices. Por ejemplo, la relación de *identidad* I en un conjunto X de n elementos es una matriz de n por n con unos en la diagonal y ceros en el resto de la matriz. Del mismo modo, la relación *vacía* 0 estaría representada por una matriz de n por n llena de ceros. Por último, una relación *simétrica* R, definida por la condición de que siempre que xRy tendremos que yRx, es, en términos de matrices, igual a su traspuesta: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^T$.

Ahora estamos en condiciones de definir la composición de relaciones. Si R y S son dos relaciones, R o S significa, para cada pareja de individuos x y x' pertenecientes a X, que $x(R \circ S)x'$ es verdadero si y solo si existe otro individuo y tal que xRy y yRx'. Puede demostrarse fácilmente que el conjunto $\mathbf{B}$ (X) de todas las relaciones que se apliquen sobre X es un semigrupo con respecto a la operación de composición. La manera más sencilla de probar que se cumple la propiedad asociativa es considerar la representación matricial de las relaciones y demostrar que la multiplicación de matrices booleanas es isomórfica de la composición de relaciones.

3. Vínculos diádicos y estructura global

El elemento básico de una relación social es el vínculo diádico entre dos individuos. Hay muchas clases diferentes de vínculos de ese tipo, como «gustar», «amar», «desear» u «odiar». Para reflejar completamente la realidad debe especificarse cual es la dirección de esos vínculos. El amor no correspondido es el ejemplo típico: puede que Juan ame a María, pero María puede no amar a Juan. Estos vínculos pueden representarse de modo abstracto a través de un conjunto de grafos: cada tipo de relación se representa por separado en diferentes grafos en los que los individuos se representan mediante puntos y la relación existente entre dos individuos mediante una flecha en la dirección apropiada. Si tenemos solo unos pocos tipos de vínculos distintos, podemos representarlos todos a la vez sobre el mismo conjunto de puntos poniéndole nombre a las flechas. Nótese que, de acuerdo con este modelo, podemos solo tener constancia de que los vínculos, o están presentes o no lo están. Sin embargo, a medida que mejoran las técnicas de observación es posible tomar en consideración la fuerza, la probabilidad y otras características de cada uno de los vínculos. Afortunadamente, operar con vínculos sociales caracterizados por múltiples atributos es perfectamente consistente con la teoría de semigrupos.

Incluso si nos atenemos a estos, bastante simples, conceptos relacionales, hay algunas cuestiones pertinentes para las ciencias sociales que pueden plantearse. ¿Tienden algunas de estas relaciones a ir juntas, como puede ser el caso de «gustar» y «amar», o tienden por el contrario a ser mutuamente excluyentes, como en el caso de «gustar» y «odiar»? Yendo un poco más lejos, puede examinarse la distribución de las elecciones que la gente hace o recibe: ¿se distribuyen binomialmente, como cabría esperar de acuerdo con la hipótesis nula, o hay que acudir a la binomial negativa o a otro tipo de distribución? Si es así, ¿sucede como resultado de un proceso social o es debido a algún tipo de distribución probabilística de la popularidad individual? También pueden definirse y observarse todo tipo de sesgos estadísticos en la identificación de díadas, tríadas o agrupamientos mayores.

Muchas de estas cuestiones, aunque útiles e interesantes a nivel micro, no aportan sin embargo ninguna información significativa sobre la estructura social global. Lo que necesariamente se desprende de la noción misma de semigrupo es que los individuos y sus relaciones sociales pueden generar estructuras a gran escala a partir de las interacciones y de las propiedades a nivel micro de esas relaciones. Este es precisamente el programa que desarrolla el campo en expansión de las redes sociales. Puede que algunos consideren este enfoque reduccionista e ingenuo pero, después de todo, la ciencia misma es reduccionista. Las leyes que explican el comportamiento de los gases se derivan de la consideración de la probabilidad estadística de los movimientos de moléculas individuales. Un éxito similar podría aguardar a los estudiosos de las redes sociales.

El primer resultado global significativo fue la teoría de Harary (1954) del «equilibrio estructural» y la subsiguiente versión para las ciencias sociales elaborada por Cartwright y Harary (1956). La teoría del equilibrio estructural toma en consideración dos tipos de relaciones, «positivas» y «negativas». El teorema principal demuestra que si el producto de los «signos» en cada ciclo es positivo, entonces la sociedad puede partirse en dos grupos de tal manera que todas las relaciones positivas quedan dentro de esos grupos y todos los vínculos negativos están entre ellos. A Davis (1967) se le cita a menudo por haber presentado una generalización del equilibrio estructural que permite más de dos grupos. Aunque la propuesta de Davis puede resultar útil como modelo, es lógicamente equivalente al bien conocido enunciado según el cual toda relación de equivalencia genera una partición, que matemáticamente resulta trivial. Más tarde, Johnsen (1985) encontró muchas estructuras globales minando sistemáticamente estos axiomas.

El autor (Boyd, 1969), hizo una generalización del equilibrio estructural en una dirección diferente asumiendo que las denominaciones de las relaciones proceden de cualquier «grupo» finito (en el sentido matemático del término), y lo aplicó al estudio de sistemas matrimoniales como los que pueden hallarse entre los aborígenes australianos.

Aunque no puede decirse que los sistemas de parentesco propios de Australia estén dentro de la línea dominante en la sociología, y ni siquiera en la antropología, el particular modo en el que aquí las reglas concretas conducen a una estructura global pide casi a gritos una aplicación a contextos sociales más generales. La idea principal que hay tras el hecho de considerar que las denominaciones de los vínculos sociales son un grupo, es que la operación binaria definida en el grupo impone una serie de reglas a la interacción de las relaciones. Por ejemplo, el hecho de que al hermano de la madre se le llame «tío», puede expresarse como el resultado de una operación binaria: *HoMa = To*, donde las abreviaturas Ho, Ma y To corresponden obviamente a «hermano», «madre» y «tío».

Tanto en español como en inglés tenemos también la equivalencia *HoPa = To*, pero en otros sistemas de parentesco pueden no considerarse iguales los dos tipos de «tío» (Boyd, Haehl y Sailer, 1972). Este hecho hace conveniente escoger las denominaciones a partir de un conjunto estructurado de valores con estructura suficiente como para definir la composición. Profundizaremos en esta cuestión en el siguiente epígrafe.

Nótese que cualquier atributo de un conjunto de individuos puede definirse sencillamente como una relación de identidad restringida a esos individuos. Por ejemplo, puede pensarse en el conjunto de «mujeres» como la relación M definida por la siguiente condición: xMy será verdadero si y solo si $x=y$ y x es una mujer. Luego atributos y relaciones pueden combinarse de manera natural en un solo esquema conceptual en el que los atributos personales son considerados como relaciones reflexivas.

Entonces, ¿cuál es la plausibilidad y qué sentido tiene la «asociatividad» para el estudio de las relaciones sociales? Por ejemplo, si tomamos en consideración las relaciones «madre», «hermano» e «hija», la expresión *(MaHo)Ja* se refiere a la relación «la hija del tío», mientras que la expresión *Ma(HoJa)* se refiere a la relación «la sobrina de la madre». En la mayoría de las situaciones en el contexto de las ciencias sociales, cabe esperar que estas dos maneras de asociar la secuencia MaHoJa den como resultado la misma cosa. De aquí el atractivo de los semigrupos para el estudio de las relaciones sociales. Por otra parte, podríamos suponer que la diferencia entre *Ma(HoJa)* y *(MaHo)Ja* es una diferencia de tipo cronológico: *Ma(HoJa)* significa que *HoJa* se agruparon primero para constituir la relación primaria «sobrina», que después se asocia a la madre de uno. Del mismo modo, *(MaHo)Ja* podría querer decir que primero se constituyó la relación «tío», seguida de la constatación de que la chica en cuestión es su hija. Cuál de las dos asociaciones sea la primaria es algo que podría depender de la cultura o de las edades relativas de los dos primos. En cualquier caso, uno espera que se trate de diferencias menores y, tal vez, que las dos relaciones puedan fusionarse en una sola. Pero esto debe comprobarse empíricamente: ¿hasta qué punto se cumple la propiedad asociativa?

El argumento de fondo para defender la plausibilidad de la propiedad asociativa es que el vínculo social definido entre dos individuos a través de un camino cualquiera, está determinado principalmente por la secuencia de vínculos a lo largo del camino, y no por cualquier árbol de evaluación. Sin la asociatividad, la idea de «camino» queda indefinida; en cambio, es posible que haya que usar complicados árboles de evaluación que correspondan a cada una de las formas de colocar los paréntesis en una secuencia de relaciones.

4. El problema del cierre

Si hay un aspecto de la teoría de semigrupos que no consigue mantenerse empíricamente, no es el axioma de la asociatividad, sino el requisito de que haya una operación definida. Es razonable asumir que la mayoría de las relaciones compuestas de primer nivel, como «el amigo de un amigo» o «la madre de mi padre», existen y son conocidas para la fuente, para el punto de partida a partir de la cual surge el camino de relaciones. Pero, ¿qué pasa cuando hay caminos de relaciones muy largos, como por ejemplo la relación «amigo de» iterada diez o veinte veces? Seguramente no existe ninguna realidad psicológica ni sociológica al final de caminos tan largos. Incluso algunas relaciones compuestas de primer orden (es decir, caminos de una longitud de dos) son desconocidas para sus respectivos puntos de llegada debido a su naturaleza de relaciones prohibidas, como en el caso de «el amante de un amante». No obstante, hay diversas maneras de manejar este problema, la mayoría de las cuales pertenecen a una de estas dos categorías genéricas: algebraicas y probabilísticas.

4.1. Métodos algebraicos

Un primer método algebraico es considerar los homomorfismos del semigrupo origen que cumplan la condición de que, cada elemento del semigrupo destino sea la imagen de, al menos, una relación del origen que sea lo suficientemente corta como para que pueda considerarse «real». Por ejemplo, si en el semigrupo origen solo hay dos relaciones generadoras que cumplan las condiciones de «equilibrio estructural», entonces existe un homomorfismo sobre el semigrupo de dos elementos $+1$ y -1. En este caso, cada elemento del semigrupo destino es la imagen de relaciones de longitud uno: los generadores mismos.

Un segundo método algebraico es añadir un elemento cero al semigrupo para expresar la idea de «indefinición». Un problema con este método, sin embargo, es que interfiere con el conjunto de imágenes homomórficas. Esto puede remediarse fácilmente no equiparando dos elementos del semigrupo solo porque ambos representen la relación vacía (Boyd, 1980). Otra solución es redefinir el concepto de homomorfismo: un *homomorfismo* 0 es una función φ entre dos semigrupos y cero tal que, para cualesquiera s y t, si $st \neq 0$, entonces $\varphi(st) = \varphi(s)\varphi(t) \neq 0$.

Por último, un tercer procedimiento algebraico es dar algún tipo de estructura a la distinción entre relaciones «definidas» e «indefinidas». Por ejemplo, las relaciones indefinidas son normalmente similares a un *ideal*: es decir, un subconjunto U de un semigrupo S tal que, para todo s perteneciente a S y para todo u perteneciente a U, tanto s como u pertenecen a U. Por ejemplo, el conjunto de todos los productos de cuatro o más relaciones creado a partir del conjunto de generadores es un ideal. Si un semigrupo no tiene ningún ideal distinto de sí mismo se le llama *simple*. Los semigrupos completamente simples del Ejemplo 8 son, afortunadamente, simples.

4.2. Métodos probabilísticos

Los modelos estadísticos para el estudio de las relaciones sociales (Wasserman y Faust, 1994) han cobrado una importancia creciente en la disciplina dentro de los intentos de optar en la práctica entre modelos discretos y algebraicos. Aunque estos modelos resultan útiles para tratar con ecuaciones generadoras o desigualdades únicas, no dan cuenta sin embargo de la estructura misma del semigrupo. En cambio, Högnäs y Mukherjea (1995) usan la teoría de las cadenas de Markov para describir caminos aleatorios sobre los semigrupos. Su Teorema 2.8 (pag. 78) describe la estructura de todas las medidas de probabilidad «compatibles» sobre semigrupos completamente simples (véase Ejemplo 8) en términos de un sandwich de Rees. La idea es asignar una probabilidad a cada elemento del semigrupo en vez de clasificar cada producto de relaciones como «definido» o «indefinido».

Un método relacionado con éste es asignar a cada vínculo de cada producto una probabilidad de transición. Por ejemplo, si A es una relación generadora definida sobre un conjunto X de n elementos, A_y es el número necesario de x para que xAy se cumpla.

Esto es, A_y es el número de unos que hay en la columna y. Por ejemplo, si A es la relación «amigo de», A_y es el número de amigos que y tiene. La probabilidad condicional de x dado y, que se expresa mediante a_{xy}, puede definirse en dos etapas. Primero, con una probabilidad de 1- α se hará una elección «correcta», mientras que con una probabilidad de α se cometerá un «error». Si se efectúa una elección correcta, entonces una de las A_y filas para las que xAy se cumpla es elegida con una probabilidad uniforme. Por otra parte, si la elección es errónea, entonces una de las A_y filas para las que xAy no se cumpla es elegida con una probabilidad uniforme. Recapitulando, si $0 < A_y < n$,

$$a_{xy} = (1 - \alpha)\, A_y + \alpha / (n - A_y),$$

mientras que si A_y fuera igual a 0 o a n, entonces $a_{xy} = 1/n$. Nótese que las columnas, no las filas, suman uno. La probabilidad de error α puede estimarse como parámetro bien para conseguir el mejor ajuste, bien a partir de repetidas medidas, bien a partir de otros datos. Del mismo modo, si B es una segunda relación generadora definida sobre X, puede estimarse la matriz de transición b_{xy} con el parámetro β correspondiente. Por último, el vector inicial v puede o bien considerarse como uniforme o bien estimarse a través de algún procedimiento.

El paso siguiente es usar la multiplicación de matrices para estimar las probabilidades de definir composiciones de relaciones, dada una imagen homomórfica. La multiplicación de matrices proporciona todo tipo de beneficios: pondera cada camino de un modo razonable (como producto de las ponderaciones individuales) y entonces combina caminos independientes sumándolos (de manera que varios caminos diferentes cuentan más que un solo camino aunque sea igualmente bueno). Es más, si a y b son matrices de transición, también lo es su producto ab.

5. Semigrupos con estructura adicional

Hay que tener en cuenta que un semigrupo de relaciones tiene muchas estructuras adicionales que están íntimamente relacionadas a la operación definida en el semigrupo. Estas estructuras incluyen la operación inversa así como operaciones booleanas definidas sobre las relaciones consideradas como conjuntos. Cualquier buen modelo de relaciones sociales debe contemplar estas estructuras. ¡Los semigrupos no son suficientes!

La *inversa* de una relación R se expresa mediante R^T y se define por la condición según la cual yR^Tx se cumple si y solo si xRy se cumple. Como sugiere la notación empleada, la matriz de la inversa de R es igual a la traspuesta de la matriz de R. Su conexión con la operación de composición viene dada por la fórmula,

$$(RS)^T = R^T S^T$$

Nótese cómo se invierte el orden de las relaciones. Además, la traspuesta es una *involución*:

$$(R^T)^T = R$$

En muchas situaciones tiene sentido el requisito de que la inversa de cada generador sea también un generador. Esto asegura que el semigrupo generado sea cerrado con respecto a las inversas. Los semigrupos en los que se define una involución se parecen más a los grupos que a otros semigrupos, ya que la inversa de un grupo es también una involución.

Del mismo modo, dado que las relaciones R, S y T definidas sobre el mismo conjunto X

de individuos son ellas mismas conjuntos (de pares ordenados de X), pueden determinarse sus uniones e intersecciones, que satisfacen dos condiciones:

$$R(S \cup T) = RS \cup RT$$

y

$$R(S \cap T) \subseteq RS \cap RT$$

Así como las propiedades usuales del álgebra booleana. La condición de subconjunto de las intersecciones no puede equipararse a la igualdad, como puede verse a través de sencillos ejemplos. El álgebra booleana puede también describirse a través de la relación subconjunto. Si una relación es un subconjunto de otra, multiplicar ambas por una tercera relación conserva la desigualdad en los productos respectivos.

De otro modo, dado que el conjunto de todas las relaciones definidas sobre X es un conjunto, existe tanto una relación que es la más grande, $X \times X$, como una relación que es la más pequeña, la relación vacía. Igualmente puede definirse el complemento booleano de toda relación completando las operaciones, constantes y relaciones que se encuentran normalmente en cualquier álgebra booleana.

En la tarea de elaborar un modelo para un conjunto de relaciones observadas, puede que no sea posible conservar todas las estructuras posibles, ya que el conjunto de todas las relaciones definidas sobre un conjunto X no tiene imágenes homomórficas que no sean triviales (Birkhoff, 1967: 345). Es un problema aún abierto el cómo definir homomorfismos de modo que se puedan conservar imperfectamente algunas de las estructuras y a la vez dar cuenta de ellas de una manera adecuada.

NOTAS

[1] «first letter law» en el original.
[2] «last letter law» en el original.

BIBLIOGRAFÍA

BIRKHOFF, G. (1967): *Lattice Theory*, 3rd ed. American Mathematical Society, Providence, RI.

BOORMAN, S. A. y H. C. WHITE (1976): «Social structure from multiple networks II. Role structures». *American Journal of Sociology 81*: 1384-1446.

BOYD, J. P. (1969): «The algebra of group kinship». *Journal of Mathematical Psychology 6*:139-167.

— (1980): «The universal semigroup of relations». *Social Networks 2*:91-117.

— (1991): *Social Semigroups. A Unified Theory of Scaling and Blockmodelling as Applied to Social Networks*. Fairfax, VA, George Mason University Press.

—, J. H. HAEHL y L. SAILER (1972): «Kinship systems and inverse semigroups». *Journal of Mathematical Sociology 2*: 37-61.

CARTWRIGHT, D. y F. HARARY (1956): «Structural balance. A generalization of Heider's theory». *Psychological Review 63*: 277-293.

CLIFFORD, A. H. y G. B. PRESTON (1961): *The Algebraic Theory of Semigroups. Vol. I*. Providence, RI, American Mathematical Society.

DAVIS, J. A. (1967): «Clustering and structural balance in graphs». *Human Relations 20*: 181-187.

HARARY, F. (1954): «On the notion of balance of a signed graph». *Michigan Mathematical Journal 2*: 142-146.

HÖGNÄS, G. y A. MUKHERJEA (1995): *Probability Measures on Semigroups*. Nueva York, Plenum Press.

HOWIE, J. M. (1976): *An Introduction to Semigroup Theory*. Nueva York, Academic Press.

JOHNSEN, E. C. (1985): «Network macrostructure models for the Davis-Leinhardt set of empirical sociomatrices». *Social Networks 7*: 203-224.

PATTISON, P. E. (1982): «The analysis of semigroups of multirelational systems». *Journal of Mathematical Psychology 25*: 87-118.

SAMPSON, S. F. (1969): *Crisis in a Cloister. N.° 69-5775*. University Microfilms, Ann Arbor, MI.

WASSERMAN, S. y K. FAUST (1994): *Social Network Analysis. Methods and Applications*. Cambridge, Cambridge University Press.