PRODUCCIÓN SIMPLE Y CONJUNTA A CONSECUENCIA DE SRAFFA

Antonio Mora Plaza
Economista, Madrid

Resumen.- El tema de la producción conjunta es un tema manido desde Sraffa, aunque los manuales se resisten a tratarlo quizá, por la comodidad formal que supone la producción simple, a pesar de que lo relevante empíricamente es la conjunta. A lo largo del artículo saldrán nombres de autores que se han ocupado de esto, es decir, de la producción conjunta en un contexto ricardiano o neo-ricardiano. Se obvia pues la producción conjunta marginalista. No obstante, nada más lejos de mi intención hacer un recuento histórico del tema. Esto ya se ha hecho[1] con éxito y ha dado juego para doctorados. Estas notas son intentos de aportación, de novedad en algunos aspectos de la producción conjunta, por un lado, y, por otro, alguna crítica a verdades consideradas indiscutibles[2].

Palabras clave.- *producción conjunta, producción simple, Sraffa*

Abstract.- The joint production is an historical matter from Sraffa, although the text books don´t treat it frequently, perhaps for the formal accommodation to the single production, despite that the joint production is the question more empirical important. Along this papers will appear the names of authors who they have treated this question under a ricardian or neo-ricardian survey. The marginalist joint production is obviated. The other hand, is not my intention to talk about the the historical developement of joint production. This matter has been worked with succes and facilitated many graduates and doctorates. This is an attempt to contribute with somes ideas and to make also somes criticals to the unquestioned knowledge.

Keywords.- *joint production, single production, Sraffa*

1. Producción simple y producción conjunta

Como se ha observado en varias ocasiones, uno de los muchos méritos de Piero Sraffa en su obra "*Producción de mercancías por medio de mercancías*" es haber dado importancia a la producción conjunta, relegada en la enseñanza de la economía a tesis doctorales y artículos especializados y poco más. Y ello ha sido así a pesar del caso irrelevante en la práctica de la producción simple. Siendo bienpensante, se podría decir que acaso se confiaba demasiado en que las posibles conclusiones que se extrajeran de la producción conjunta fueran las mismas que las de la simple. Hasta Sraffa el caso de la producción conjunta lo justifica para el posterior tratamiento del Capital fijo y la

[1] En general, los libros de Pasinetti; en internet se puede ver el art. de Peris i Ferrando. Ambos se mencionan en la bibliografía.

[2] El caso del aspecto de la frontera salarios-beneficios.

Tierra[3], y no es hasta el capítulo IX (tercero de la producción conjunta) -y cuando lleva entonces dos capítulos avanzados- que el economista italiano lo justifica en relación a la producción simple de esta manera: "*Queda ahora por ver en qué medida las otras conclusiones alcanzadas en el caso de las industrias de productos simples son aplicables al caso de las industrias con producción conjunta. Una de las que claramente necesita verificación es la norma según la cual, cuando el tipo de beneficio es cero, el valor relativo de las mercancías es proporcional a la cantidad de trabajo que, directa o indirectamente, ha ido a producirlas*"[4]. Lo cual es cierto si, como hace Sraffa, reduce el capital a trabajo fechado, porque entonces lo que nos queda es un vector de precios dependientes *proporcionalmente* del salario y de la sumas de trabajo en distintas fechas. Sraffa no lo explica así porque no hace mención a ecuaciones que no hace explícitas, pero esta es la explicación más sencilla y evidente. Y la segunda justificación que nos da es que cabe la posibilidad de precios negativos en la producción conjunta, cosa soslayable en la simple bajo algunos supuestos razonables. Esto ya no es tan intuitiva ni tan fácil de ver a primera vista, pero tiene que ver -como veremos- con la imposibilidad de aplicar el teorema de Perrón-Froebenius según los supuestos y asegurar con ello un vector (de equilibrio) de precios positivos. Esta sería la explicación formal; la explicación económica es algo más compleja en Sraffa, pero viene a ser la siguiente: en la producción simple los precios varían siempre proporcionalmente a los salarios (ver ecuación (1)), incluso con ganancias positivas, lo que hace que el precio del producto considerado aumente como producto en la misma proporción que lo hace como medio (factor); en cambio, en la producción conjunta son muchos los productos que se producen mediante un mismo proceso y, aún cuando la suma normalizada con la razón-patrón de todos esos productos fuera equivalente a un único precio (caso anterior en la producción simple), ahora podría ocurrir que uno de los sumandos contuviera un precio negativo sin afectar por ello a la positividad de la suma[5]. En esta ocasión, la explicación es más farragosa, pero creo que lo expuesto sintetiza correctamente lo expresado por el italiano.

He intentado apartarme lo más posible de los caminos trillados y ser lo más creativo posible con una sola excepción: respectar lo más posible el *espíritu económico* de Sraffa. Sin más dilación y justificación entramos en faena y, aunque las anotaciones de Sraffa son, como siempre, peculiares para lo que ahora se acostumbra, el modelo del italiano se podría caracterizar por la ecuación:

[3] "Producción de mercancías...", pág. 67, nota 1, pie de página.

[4] Ídem, pág 83.

[5] Claro que la discusión al respecto es más compleja porque no podría ocurrir en cualquier caso con muchas mercancías. La razón es que si un grupo considerable de ellas salieran de la producción con precios negativos se verían beneficiadas las industrias que utilizan el producto como medio; ello supondría una disminución de sus costes y, a su vez, de sus precios, lo cual permitiría una subida general del sistema de salarios y beneficios; pero eso, en contra de lo que pueda parecer y dado el mismo nivel general de tasa de salario y ganancias del sistema en el modelo considerado, provocaría costes insoportables para otras muchas que no emplearan esos productos de precios negativos como medios. El sistema poco a poco se haría inviable hasta que no se desecharan los procesos que originan precios negativos. Esto podría valer como una crítica lógica a las subvenciones que permiten precios -es decir, costes por encima de los ingresos- negativos a sectores sin futuro, salvo que se valoren otros aspectos no estrictamente económicos.

(1) $$\underset{1xn}{p}\underset{nxn}{Y}=\left[\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W}+\underset{1xn}{p}\underset{nxn}{X}\right]\times\left(1+\underset{nxn}{G}\right)$$

donde ***p*** es el precio de los bienes, ***Y*** la matriz de bienes finales, ***L*** los inputs de trabajo, ***W*** la matriz diagonal de salarios, ***X*** los medios de producción y ***G*** la matriz, también diagonal, de tasas de ganancia según sectores (o mercancías). Todo ello es muy parecida a la de la reproducción simple, pero con dos diferencias: 1) en aquélla la matriz de productos finales ***Y*** era diagonal, es decir, con ceros en todos los elemento en los que ***i*** fuera diferente de ***j***. Aquí, en la producción conjunta, todos los elementos de ***Y*** tienen o pueden tener cualquier valor positivo, de tal forma que la matriz de la diferencia $Y-X$ puede tener algún valor negativo en sus elementos sin que por ello los costes (suma vertical de precios por cantidades) de cada sector (o mercancía) deje de ser positiva; 2) ahora no empleamos una única tasa de salario y una única tasa de ganancia, sino ***n*** tasas de ambas. Aunque es un caso de producción conjunta porque tenemos ***n*** mercaderías de ***n*** sectores ***X*** que producen ***n*** mercaderías distribuidas en ***n*** sectores, también es un caso muy restrictivo y podemos llamarlo caso de *producción conjunta srafiano*. El caso más amplio que puede concebirse y que normalmente está fuera de la literatura económica[6] sería aquel que vendría dado por la ecuación del sistema:

(2) $$\underset{1xm}{p_b}\underset{mxn}{Y}=\left[\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W}+\underset{1x\tilde{n}}{p_\eta}\underset{\tilde{n}xn}{X}\right]\times\left(1+\underset{nxn}{G}\right)$$ para ***m***>***n***

donde la matriz de bienes finales ***Y*** tiene dimensión ***m****x****n*** y la de medios de producción ***ñ****x****n***. Ambas, por lo tanto, coinciden en los sectores de donde proceden tanto bienes como medios (***n***), pero no en las características de estos (***m*** para ***Y***, ***ñ*** para ***X***). Un caso tan abierto de producción conjunta tendría al menos los siguientes problemas:

(a) La inversa[7] de YY^T **-**que da lugar a una matriz simétrica dado que se ha supuesto que ***m***>***n*** -carece de sentido económico aún cuando sea factible despejar los precios $\boldsymbol{P}_b$ finales de la ecuación (2).

(b) No se puede hacer la resta $Y-X$ por ser matrices de distinta dimensión, con lo cual no se puede hallar el producto neto, y menos intentar obtener la razón-patrón.

(c) Ni *la mercancía-patrón* ni *la razón-patrón* -que podrían obtenerse de las variables no monetarias de (2)- serían únicas. En efecto, la mercancía-patrón se obtiene de reducir los valores reales de productos finales y medios de producción mediante $\boldsymbol{q}_i$ *multiplicadores* de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

(3) $$u\underset{mxn}{Y}\underset{nx1}{Q}=\underset{\tilde{n}xn}{X}\underset{nx1}{Q}$$

(4) $$\underset{1xn}{L}\underset{nx1}{Q}=1$$

[6] Pasinetti, Schefold, Ahijado.

[7] A pesar de las posibilidades del cálculo de las *matrices inversas generalizadas* donde la matriz a invertir no es cuadrada necesariamente.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

que, aún cuando hiciéramos ***m=ñ*** para que la igualdad (3) fuera posible, tendríamos ***m+1*** ecuaciones (***m*** filas de (3) y la ecuación (4)) y ***n+1*** incógnitas (***n*** *multiplicadores* ***q*** y un ***u*** *coeficiente reductor*). Además hemos supuesto que ***m>n*** por motivos de realismo económico. Y si no es única la mercancía-patrón, tampoco lo será la razón-patrón, puesto que todas estas ***n+1*** incógnitas se obtendrían conjuntamente resolviendo (3) y (4). A pesar que se ha abierto mucho las posibilidades formales de plantear la producción conjunta desde los trabajos de Pasinetti (1980), Schefold (1971) y el teorema de Mangasarian[8] (1971), etc. todo tiene un límite.

(d) Si hacemos ***m=n=ñ*** para entrar en la producción conjunta srafiana, tampoco tendríamos una única mercancía patrón. El motivo es que ahora la matriz de productos finales ***Y*** ya no es una matriz diagonal y de (3) obtenemos $\mu[A-I]XQ=0$ para $A=XY^{-1}$. Pero ahora el vector XQ ha de ser positivo como resultado de una solución Perrón-Froebenius en la ecuación anterior. Es decir, $\Sigma_{i=1}^{n} X_{ij} q_j > 0 \quad \forall_i \; i=1 \;\; a \;\; n$, lo cual se puede cumplir sin poder asegurar que los multiplicadores $\boldsymbol{q_i}$ sean todos positivos[9] (lo único que sabemos es que al menos un multiplicador ha de ser positivo porque los medios de producción ***X*** sólo pueden ser cero o positivos por motivos obvios).

(e) Si no se puede calcular los autovalores en la producción conjunta eso no significa que no pueda obtenerse resultados significativos de las ecuaciones del sistema, pero lo que está vedado es entonces que la ecuación que resulta de hacer cero los salarios en (2) nos de un tipo de beneficio que, aún siendo el máximo posible por lo anterior, no tiene porqué coincidir con el autovalor que garantice unos precios positivos. De ello se percató Sraffa en su libro revolucionario diciendo que: *"... mientras las ecuaciones pueden ser satisfechas por soluciones negativas para las incógnitas, sólo son practicables aquellos métodos de producción que, en las condiciones efectivamente dominantes (es decir, al salario dado o al tipo de beneficio dado), sólo implican precios positivos*"[10]. Por esta razón y a falta de la agarradera de Perrón-Froebenius para el cálculo del autovalor que pudiera permitir que *la razón-patrón* (***M*** en (7)) coincida con los beneficios que resultan de hace cero los salarios en (6), Sraffa nos da un razonamiento económico por reducción al absurdo, utilizando los salarios como variable estratégica[11]. Es cierto que con ello se obtiene la razón-patrón única, pero el problema sigue siendo el mismo: sin Perrón-Froebenius no se garantizan precios positivos. Este modo de pensar, esta inversión de variables, es una de las revoluciones que introduce Sraffa en el análisis económico. En efecto, para la economía neoclásica y marginalista se acostumbra a pensar que precios, ganancias y salarios son las variables que han de adaptarse a la tecnología (llámase función de producción neoclásica o matriz de requerimientos); en la filosofía srafiana es lo contrario o al menos, las posibilidades de cambio están en pie de igualdad. La otra gran revolución de su filosofía es la posibilidad de que los sistemas sean abiertos, con grados de libertad en lenguaje matemático (más incógnitas que ecuaciones); que no se busquen

[8] Para el cálculo de autovalores de matrices de orden **m**x**n.**

[9] "Producción de mercancías...", pág. 71, edic. Oikos-Tau. Veáse también el apéndice IV.

[10] "Producción de mercancías... ", pág. 68.

[11] "Producción de mercancías... ", pág. 79.

soluciones únicas y que sea la sociedad y, por ende, la sociología, la que se encargue de resolver y/o analizar los conflictos (la lucha de clases en Marx).

2. Consecuencias de la producción conjunta

Entre ambos extremos, es decir, entre los sistemas de producción conjunta caracterizados por las ecuaciones (1) y (2), nosotros vamos a proponer en un primer momento el siguiente sistema de ecuaciones siguiendo el espíritu srafiano -aunque no estrictamente su letra- con distinción entre bienes básicos y no básicos.

(6) $$\underset{1xm}{p_b}\,\underset{mxn}{Y_b}+\underset{1xn}{p_n}\,\underset{nxn}{Y_n}=\left[\underset{1xn}{L}\,\underset{nxn}{W}+\underset{1xm}{p_b}\,\underset{mxn}{X}\right]\times\left(1+\underset{nxn}{G}\right)$$

(7) $$\underset{1xm}{p_b}\,\underset{mxn}{Y_b}+\underset{1xn}{p_n}\,\underset{nxn}{Y_n}=\left[\underset{1xm}{p_b}\,\underset{mxn}{X}\right]\times\left(1+\underset{nxn}{M}\right)$$

(8) $$\underset{1xm}{p_b}\,\underset{mxn}{Y_b}\,I+\underset{1xn}{p_n}\,\underset{nxn}{Y_n}\,I-\underset{1xm}{p_b}\,\underset{mxn}{X}\,I=1$$

(9) $$\underset{1xn}{L}\,\underset{nx1}{I}=1$$

donde ***I*** es el vector vertical ***n***x***1*** de unos, $\boldsymbol{p_b}$, $\boldsymbol{p_n}$ son los precios de los bienes básicos y no básicos, $\boldsymbol{Y_b}$ e $\boldsymbol{Y_n}$ los productos finales básicos y no básicos y ***X*** los medios de producción. Ahora el vector de precios $\boldsymbol{P_b}$ es común a productos finales y medios; ***M*** es la matriz diagonal de beneficios máximos; las ecuaciones (8) y (9) son los numerarios empleados para trabajar en un conjunto cerrado y acotado con el producto neto y los inputs de trabajo normalizados (además el producto neto es *el numerario*), y ***m***>***n***, porque en la producción conjunta la lógica económica implica se producirán más y *distintos* productos finales que los medios empleados. Este sistema es aún más general que el propuesto por el economista italiano, porque la matriz de productos -que está representada por $\boldsymbol{Y_b}$ y $\boldsymbol{Y_n}$ -tienen ***m***+***n*** filas entre ambas y, en cambio, la matriz de medios ***X*** sólo tiene ***m***; en Sraffa el número de filas y columnas coinciden tanto en la matriz de productos finales como la de medios, de tal forma que se puede efectuar la resta de ambas y hallar su inversa (en principio). Nada de esto se puede hacer en la que aquí se propone. Pues bien, de este conjunto de ecuaciones se pueden obtener algunos resultados no triviales:

(a) *Los precios de los productos básicos influyen en la formación de los precios de los básicos y de los no básicos; en cambio los precios de los no básicos no influyen en la de los básicos.*

Esta afirmación puede ser sostenida mediante la ecuación (6) despejando los precios de los no básicos y queda:

(10) $$p_n = L\,W(1+G)Y^{-1} + p_b\left[X\,(1+G) - Y_b\right]Y_n^{-1}$$

El conspicuo lector podría objetar que también es despejable los precios de los productos básicos, aunque de forma más complicada formalmente. A ello se puede responder de la siguiente forma: a1) que las matemáticas carecen de sentido causal;

este lo pone el que las usa, en este caso, el economista, y eso es lo que hace Sraffa en su libro clásico; a2) que hay una razón más poderosa, porque despejar los precios de los productos básicos en función de los no básicos y del resto de las variables exigiría hallar la inversa de $Y_b Y_b^T$, que es una matriz simétrica que carece de sentido económico, y puede dar lugar a valores también sin sentido por haber considerado que ***m***>***n***. Veamos las palabras de Sraffa: "*Desde el principio, sin embargo, la principal implicación económica de la distinción era que los productos básicos juegan una parte esencial en la determinación de los precios y del tipo de beneficio, en tanto que los productos no básicos no la juegan*"[12].

(b) *La frontera de tipo de salario-tipo de ganancia que surge en la producción conjunta según el modelo definido por (6), (7), (8) y (9) es formalmente el mismo que el que surge en la producción simple (modelo Sraffa) sin adelantamiento de salarios.*

Esta afirmación parece ir contra el sentido común por lo alejado que están los modelos aludidos, especialmente porque este de producción conjunta -por lo que se ha explicado- es mucho menos restrictivo que el propuesto por el propio Sraffa en su libro tantas veces mencionado. Y sin embargo, las matemáticas esta vez nos sirven para desvelar lo que la intuición nos niega. En efecto, si igualamos (6) y (7) en lo que tienen de común queda:

(11) $$P_b X \times (1 + M) = (LW + P_b X) \times (1 + G)$$

Y si ahora abandonamos los múltiplos salarios y ganancias, para ir a un único salario y una única ganancia; y si además multiplicamos las ecuaciones por el vector vertical de unos ***I***, queda de (9) y (11): $w + wg = (M - g) p_b XI$

y (7), (8) y (9) nos deja: $1 = p_b Y_b I + p_n Y_n I - p_b XI = M p_b XI$

y entre ambas ecuaciones anteriores nos da:

(12) $$\left(\frac{M - g}{M} \right) = w(1 + g)$$

Veamos ahora el sistema *srafiano* de producción simple sin adelantamiento de salarios caracterizado por (13), (14), (15) y (16).

(13) $$pY = (1 + \pi)[wL + pX]$$

(14) $$pY = (1 + R) pX$$

(15) $$pYI - pXI = 1$$

(16) $$L\mathrm{I} = 1$$

De este conjunto de ecuaciones sale que la relación entre tipo de salario y tipo de ganancia es:

[12] "Producción de mercancías... ", pág. 80.

(17) $$w = \frac{R-\pi}{(1+\pi)R}$$

que es formalmente el mismo que (12) en la producción conjunta con tal de hacer $R = M$ y $\pi = g$. Ello demuestra la potencialidad que tiene la invención **-**¿o descubrimiento?**-** de la *razón-patrón* de Sraffa, porque sin ese recurso no podría haberse llegado a esta insospechada conclusión.

(c) *En la producción conjunta -al menos en este modelo- se producirá un aumento de los precios de los bienes y servicios (mercancías)* <u>*no básicos*</u> *ante: 1) una disminución de la productividad, 2) un aumento de los salarios, 3) un aumento de los precios de los bienes y servicios básicos, 4) un aumento de los medios de producción por unidad de los bienes y servicios finales no básicos, 5) un aumento de las ganancias en cualquier sector, 6) una disminución de los bienes y servicios básicos en relación a los no básicos.*

En efecto, de (10) se obtiene (18) al pasar de ***n*** tasas de ganancia ***G*** y ***n*** tasas de salarios ***W*** a una única tasa de ganancia ***g*** y una única tasa de salarios ***w***:

(18) $$p_n = LY_n^{-1} w(1+g) + p_b\left[XY_n^{-1}(1+g) - Y_b Y_n^{-1}\right]$$

$$\frac{dp_n}{dLY_n^{-1}} > 0\,;\ \frac{dp_n}{dw} > 0\,;\ \frac{dp_n}{dg} > 0\,;\ \frac{dp_n}{dp_b} > 0\,;\ \frac{dp_n}{dXY_n^{-1}} > 0\,;\ \frac{dp_n}{dY_b Y_n^{-1}} < 0$$

donde LY_n^{-1} es la inversa de la productividad del trabajo, XY_n^{-1} es la relación entre medios de producción por unidad de bienes y servicios no básicos, y $Y_b Y_n^{-1}$ es la relación también entre bienes y servicios (mercancías) básicos finales y no básicos. Con (18) se calculan las derivadas de los precios de los bienes no básicos $\boldsymbol{p_n}$ con respecto a todas las variables anunciadas y los signos de las mismas son los enunciados en (c).

(d) *Por encima de un cierto nivel de salarios (de ganancias), las ganancias (los salarios) son más altas (altos) en la producción simple que en la conjunta dada la matriz de medios de producción; por debajo de ese nivel, ocurre lo contrario.*

En la producción simple con salarios *ex-ante* ya hemos visto que la frontera salarios-ganancias está dada por la ecuación $w = (R-g)/R$, mientras que la misma frontera en la producción conjunta se define a través de $w = (M-g)/(1+g)M$. El punto de corte en el eje de ordenadas es igual para ambos: ***w***=*1*, como se pude comprobar haciendo la tasa de ganancia ***g***=*0* en ambas ecuaciones. En cambio, ambas ecuaciones no coinciden en el punto de corte con el eje de abcisas, es decir, cuando los salario son ***w***=*0* en ambos. Para la primera ecuación -la de la reproducción simple- es ***g***=***R**,* mientras que para la producción conjunta es ***g***=***M*****,** y ya hemos visto que se cumple que ***R***<***M***. Eso significa que ambas ecuaciones se cortan en *dos* puntos: para ***g***=*0*, que ya hemos comentado y que vale ***w***=*1* para ambas, y también en un punto intermedio entre la recta que representa la ecuación srafiana $w=\left(R-g\right)/R$ de producción simple con salarios *ex-ante* y la curva que representa la ecuación de la *producción conjunta srafiana* $w=\left(M-g\right)/\left(1+g\right)M$. Ese punto de corte de ambas ecuaciones se da para $w=R\times\left(M-g\right)/M$ y $g=\left[\left(1+M\right)\times R-M\right]/M$. Por ello podemos afinar más y decir que entre ***w**=1* y ***w**=(M-g)/M* son más altas las ganancias en la producción simple srafiana que en la producción conjunta srafiana, y lo contrario desde este último punto hasta ***w**=0*. De forma simétrica, se puede añadir que entre ***g**=0* y ***g**=**R*** les interesaría la producción simple (con adelantamiento de salarios) a los asalariados, y que a partir de ***R*** hasta ***M*** (donde los salarios se hacen cero), lo contrario, siendo -como se recordará- ***R*** la razón-patrón de la producción simple y ***M*** la tasa máxima de beneficio para la producción conjunta *srafiana*. No se tiene la intención, en principio, de considerarlo como un cambio en las técnicas porque la matriz de medios de producción ***X*** no ha cambiado, aunque sí lo han hecho la de bienes y servicios finales y también el comportamiento empresarial en cuanto al momento del cobro de los salarios. No obstante, si se quiere ver así podría hacerse, porque el catecismo sobre *qué es un cambio en las técnicas* no está escrito. Lo que no hay en este modelo en ningún caso retorno de las técnicas porque recta y curva *se cruzan* sólo una vez[13].

(e) *La tasa máxima de beneficios (**M**) cuando los salarios son cero no garantiza que sea igual a la razón-patrón, porque esta no es única en este modelo de producción conjunta srafiano; en cambio, sí está acotada respecto a la producción simple srafiana con adelantamiento de salarios (ex-ante).*

Esta afirmación es aún menos intuitiva que la anterior, pero es útil para limitar el grado del error que se comete al no poder utilizar directamente Perrón-Froebenius. Igualmente se intuye que puede acotar la posibilidad de precios negativos. En el epígrafe anterior hemos visto que la ecuación de la reproducción simple y la que define la producción conjunta se cortan en el punto $g=\left[(1+M)\times R-M\right]/M$, en el cual, si se hace ***g**>0* y tras pasos algebraicos elementales, se obtiene:

(19) $$M<\frac{R}{1-R}$$

De otra parte, la relación entre razón-patrón, tasa de salario y tasa de ganancia en la producción simple con adelantamiento srafiano de salarios es: $w=\left(R-g\right)/g$. Si ahora sustituimos esta tasa de ganancia ***g*** por su valor en la producción conjunta (11) se obtiene que $w=\left(M-R\right)/\left(M\times R\right)$, con lo que para que los salarios ***w*** sean positivos ha de ocurrir que:

(20) $$M>R$$

Y uniendo (17) y (18) queda:

[13] Aunque tienen 2 puntos de contacto, pero uno de ellos es cuando **g**=0, es decir, en el inicio de la curva en ordenadas (la vertical), tal como se ha explicado.

(21) $$R < M < \frac{R}{1-R}$$

Es decir, a falta de razón-patrón única en la producción conjunta, la tasa de ganancia en esta modalidad de producción ***M*** está acotada por la razón-patrón de la producción simple ex-ante ***R*** según (19), y cuanto menor sea la razón-patrón, menor será el intervalo de acotación. Esta relación es un resultado novedoso.

3. La frontera salario-ganancia[14]

En la última parte del capítulo IX dedicado a "*otros efectos de la producción conjunta*", inicia Sraffa una discusión sobre la posibilidad de que ante un descenso en los salarios tenga como consecuencia necesariamente un alza en el tipo de beneficio[15]. Sraffa afirma que no siempre ha de ocurrir esto, porque si cambia el patrón de medida (mercancía-patrón), el salario medido en una mercancía-patrón cambiante puede tomar cualquier dirección y compensar -esto es lo que hay que interpretar de las palabras de Sraffa- durante algún tramo el aumento natural del tipo de beneficio ante el descenso de los salarios. Sin embargo, todo esto parecería contradecir la ecuación (11) que es monótona decreciente, lo que sería incoherente con las explicaciones del economista italiano. No obstante, el punto clave de todo esto está en la ecuación (19) que hemos deducido, donde está acotada la tasa máxima de beneficios en la producción conjunta, pero no tenemos -a diferencia de la producción simple- una razón-patrón única. En efecto, al menos entre los tramos que van de ***R*** a ***M*** y de ***M*** a ***R***/(***1-R***), la relación de los salarios con su mercancía patrón puede ser oscilante y permitir un descenso de las ganancias, a la vez que un descenso en el salario-patrón. Todo ello se deriva indirectamente de que en la producción conjunta tengamos más incógnitas que ecuaciones que impiden una única razón-patrón, que tengamos posibles multiplicadores negativos y, por último, unos posibles precios también negativos[16]. Sraffa lo soluciona con criterio económico como hemos visto: es la propia economía y sus actores los que eliminarán soluciones de precios negativos por inviables. Y esto es una pista para ciertos comportamientos que la economía neoclásica y marginalista no puede explicar. Me refiero a que los comportamientos económicos lleven, a pesar de todo, a precios negativos. La necesidad de una subvención casi permanente a ciertos sectores (en Europa, leche, algunos productos agrícolas, carbón, etc.) podrían explicarse a partir de estas posibilidades de precios negativos por las relaciones de costes directos e indirectos de estas industrias o sectores que llevarían a que los precios de sus inputs elevaran sus costes directos e indirectos, de tal forma que la suma de todos estos costes -seguidos a través de la suma de las matrices de requerimientos históricas- fueran tales que superaran los ingresos; ello se debería a que los precios finales (de producción) no pudieran elevarse al mismo ritmo que sus costes por la necesidad que tiene la economía -según estos modelos- de tender a igualar las tasas de beneficios y de salarios; también porque, en todo caso, no hay una única *razón-patrón* que determine la tasa máxima de beneficios, aunque hemos visto

[14] Se abandona la diferenciación entre productos básicos y no básicos.

[15] "Producción de mercancías... ", pág. 90.

[16] Ver apéndice IV.

que está acotada (21). Sraffa, como casi siempre, no especificó la función que justificaba sus afirmaciones, pero sí dio las explicaciones económicas pertinentes.

La posibilidad del cambio de convexidad - y por tanto del retorno de las técnicas- depende exclusivamente del cambio de las técnicas y no de los períodos de trabajo fechado, cambio de patrón (Sraffa) o de la actualización del valor del capital físico (Pasinetti, Nuti) exclusivamente.

Desde que Sraffa planteó el problema en los capítulos de la producción conjunta se ha hecho un esfuerzo por demostrar el error de la teoría del capital en el marginalismo. En efecto, en la teoría marginalista la relación entre la intensidad del capital por hora u hombre trabajada con respecto al tipo de interés, es una relación monótona decreciente sin cambio de convexidad. Para la crítica iniciada en el Cambrigde inglés, con Robinson, Sraffa, Kaldor, Dobb, seguido luego por Nuti, Pasinetti, Garegnani, Morishima, etc., se ha demostrado la falsía de esta teoría en lo que respecta a este punto. Y si falla eso, también falla la misma relación respecto a la relación entre la productividad del trabajo de esta misma teoría, porque la frontera salario-ganancia puede ser, en algunos tramos, no monótona decreciente. Y con ello tampoco se cumple el teorema Euler de reparto del producto en función del valor de las productividades marginales de los factores. Sin embargo, a veces se traslada erróneamente la posibilidad del retorno de las técnicas -que es su consecuencia- achacándolo a lo que no es. Así, en el excelente -por otra parte- libro de Ahijado[17], se dice, referido a la función de producción que relaciona tasa de salario con tasa de ganancia , "*que es una función polinomial muy compleja de orden n-1, que es el orden de la matriz **A**, y tiene un trazado irregular*". Son argumentos que recoge a su vez de Pasinetti[18]. Desde luego, nada más gratificante que la derrota de unos los aspectos claves del marginalismo, pero me parece que este un argumento falso o, simplemente, un error. Desde entonces parece que perpetúa esta aseveración. Si *la frontera precios/salario-ganancia* es irregular, incluso, como afirmaba antes, no es monótona decreciente[19] en algún tramo, lo es no por lo que dice el autor referido. La función de los precios en la *producción simple con tasas de salario único ex-post y ganancia única* es como sigue:

(22) $p = w(1+g)LY^{-1}\left[I - A(1+g)\right]^{-1}$ con $A = XY^{-1}$

que multiplicada por la matriz vertical ***I*** de unos ***n***x***1***, despejado el salario y tomado pI como numerario[20] queda:

[17] "Distribución, precios de producción y crecimiento", Manuel Ahijado, 1982, edit. Ceura, pág. 53.

[18] "Lecciones de la teoría de la producción", pág. 116, 1983 (Lezioni di teoria della produzioni, 1975)

[19] Una función es monótona decreciente en el tramo considerado si se cumple que para todo $\mathbf{x}_1<\mathbf{x}_2$ ocurre que $f(\mathbf{x}_1)<f(\mathbf{x}_2)$; si creciente, con el signo de desigualdad cambiado.

[20] Se podría utilizar como numerario **pY** y las conclusiones serían las mismas en este epígrafe y en el siguiente.

(23) $$w = \frac{pI = 1}{(1+g)LY^{-1}\left[I + (1+g)A + (1+g)^2A^2 + \cdots + (1+g)^{n-1}A^{n-1}\right]I}$$

Se ha partido desde el principio de que ***A*** es productiva, es decir, que se cumple que $X > XA$, además de que la tasa de ganancia sea menor que la razón-patrón ($g < R$), por lo que está acotada. Con ambas cabe la posibilidad de que la función que hay entre corchetes:

(24) $$S = I + (1+g)A + (1+g)^2A^2 + \cdots + (1+g)^{n-1}A^{n-1}$$

sea convergente[21]. Por su parte, el teorema de Perrón-Froebenius nos dice que (24) es una función creciente tanto de ***g*** como de ***A***. Es por lo tanto una función contínua por ser suma de funciones contínuas; es monótona creciente para cualquier valor de ***g*** (aunque sabemos que está acotada esta tasa). Y si (24) es continua y convergente, (23) es monótona decreciente, con puntos de corte en el eje de ordenadas y tangente en el infinito en el de abscisas. ¿Donde queda entonces la afirmación de Ahijado que el recoge de otros autores? La confusión viene -creo yo- al no distinguir entre *deslizamiento* a lo largo de la curva (entre salario-ganancia (***w-g***)) y *traslación* de esta misma curva. Para obtener una curva *salario-ganancia* con cambio de convexidad -que es una condición suficiente[22] pero no necesaria para el retorno de las técnicas- es necesario partir de la hipótesis económica de que el comportamiento empresarial consista en dejar fija una de las dos variables monetarias -salarios o ganancias- y que optimice alguna función empresarial -ventas, beneficios, etc.**-**, variando la elección de las técnicas, es decir, ***A*** y/o ***L***. Nuti da en cambio una explicación financiera para el retorno de las técnicas: "*el significado económico de la oscilación es que, en ciertos intervalos de variación de la tasa de interés, una empresa es prestataria en ciertos períodos y prestamista en otros, y gana con un incremento de la tasa de interés como prestamista más de lo que pierde como prestatario, de manera que pueda pagar un mayor nivel de salarios si realiza operaciones de otorgamiento y toma de préstamos con una tasa más elevada de interés*"[23]. Pero esta explicación tiene, creo, dos defectos: 1) hay que recurrir a la reducción de trabajo fechado necesariamente; 2) más importante, en esta explicación no parecen variar ni ***A*** ni ***L***, por lo que no hay cambio de técnicas ni de organización, por lo que la función frontera salario-ganancia *no se desplaza,* sino *sólo se desliza*. Con ello no cambia la convexidad y, menos aún, la monotoneidad de la función. Sraffa, por su parte, habla de *cambio de patrón* para justificar una línea oscilante entre salarios y ganancias y lo hace por la "*posibilidad de que el precio de un producto pueda descender más deprisa que el salario*"[24]. El economista italiano no dio la ecuación con la que trabajaba y hay que deducirla a partir de sus hipótesis.

---

[21] Con la posibilidad nos vale en este contexto. Lo será si el $1+g < 1/|\lambda_m|$, siendo λ_m el autovalor máximo de la expresión que hay entre corchetes en (22).

[22] No es necesaria porque hay un caso siempre posible: una recta que nos da la frontera salario-ganancia en la producción simple con salarios ex-ante y una curva que surge bajo otros tipos de supuestos a partir de los salarios ex-post.

[23] "Capitalism, Socialism and Sleady Growth", D. Nuti (1970).

[24] Pero esto sólo asegura que pueda cambiar la convexidad, no que cambie la condición de la función de ser monótona decreciente. Aunque el mero cambio de convexidad ya es suficiente -no necesaria- para el retorno de las técnicas.

Para la producción conjunta donde ***m>n*** (*no srafiana*), el caso es el mismo, sólo que la ecuación (22) es más complicada por no ser cuadrada la matriz de productos ***Y***. El resultado es la ecuación (25).

(25) $$p = Lw\,(1+g)\times\left[Y - X\,(1+g)\right]^{T}\times\left[\left[Y - X\,(1+g)\right]\times\left[Y - X\,(1+g)\right]^{T}\right]^{-1}$$

La conclusión es la de que sin cambio en las técnicas **-**es decir, variando ***Y***, ***X***, ***L***, ***A***^{i}, aunque no necesariamente todas**-** no se ve cómo puedan darse los casos de Sraffa y Ahijado que originan un retorno de las técnicas que hemos discutido. Un cambio de las técnicas debe implicar un tipo de comportamiento empresarial que suponga un desplazamiento de la función frontera salario-ganancia. Sólo se me ocurre una excepción que luego se verá. Sin ello, por más complicada que sea la ecuación característica -que no lo es- que menciona Ahijado, no por eso deja de ser la función de precios continua, monótona y creciente (22), y con ella, monótona decreciente *la función frontera w-g*. También puede estar el error de los autores al considerar a $L\left[I - A(1+g)\right]^{-1} w = 1$ como un polinomio que hay que resolver de forma tradicional[25], calculando los ceros (valores de la función que se obtienen al hacer cero la tasa de ganancia). No es cierto. Lo que se hace es calcular los autovalores de forma tradicional y elegir el único autovalor que cumple el teorema de Perrón-Froebenius (*P-F*). No hay polinomio característico[26] de ***n*** ceros, sino un sólo cero: el autovalor de *P-F* elegido, es decir, el autovalor más alto en términos absolutos, que sea real y no repetido. No hay, por tanto, una ecuación algebraica cuyas ***n*** soluciones haya que utilizar en (22), sino un único valor. Y por más que variemos ***g*** para cada ***A*** dado, sólo tenemos un ***w*** bajo una relación monótona decreciente.

a) Retorno de las técnicas sin cambio de convexidad

Ante las dificultades de construir una *función salarios-beneficios* con cambio de convexidad a pesar del cambio de la tecnología (cambios en la matriz ***A*** de requerimientos más los inputs de trabajo ***L***), vamos a presentar cómo se puede construir una función con retorno de las técnicas convexa en todo su recorrido. Esta es la excepción de la que hablábamos antes. Para ello podemos utilizar la ecuación (23) de producción simple sraffiana o la (25) de producción conjunta con ***m>n***. Utilizamos la (23) en un primer momento de la manera que sigue:

(26) $$w(A_1, L_1, Y_1, g) = \frac{pI = 1}{(1+g)L_1Y_1^{-1}\times\left[I + (1+g)\,A_1 + (1+g)^2 A_1^{\,2} + \cdots + (1+g)^{n-1} A_1^{\,n-1}\right]I}$$

(27) $$w(A_2, L_2, Y_2, g) = \frac{pI = 1}{(1+g)L_2Y_2^{-1}\times\left[I + (1+g)\,A_2 + (1+g)^2 A_2^{\,2} + \cdots + (1+g)^{n-1} A_2^{\,n-1}\right]I}$$

---

25 Como nos dice Ahijado.

26 Otra cosa es que para calcular todos los autovalores se tenga que calcular el determinante $I\lambda - AI = 0$ de dimensiones **n**x**n**. Aquí si hay un polinomio característico n-dimensional. Pero esto es previo; luego sólo se toma un autovalor: el P-F.

Ambas ecuaciones se diferencian en las matrices de requerimientos ***A*** y en los inputs de trabajo ***L***. Ambas ecuaciones cortan en el eje de ordenadas (vertical) para ***g***=0, pero en puntos diferentes (salvo que se diera $A_1=A_2$, $L_1=L_2$ *e* $Y_1=Y_2$) y descienden a medida que aumenta la tasa de ganancia de forma continua porque el denominador es una función suma de funciones continuas siempre crecientes (la inversa, por tanto, es decreciente). Pues bien, siempre podremos elegir valores de A_1, A_2, L_1, L_2, Y_1, Y_2 tales que se cumpla que:

variable	función w-g	envolvente
para $0<=g<g_1$	$w(A_2,L_2,g) < w(A_1,L_1,g)$	$w(A_1,L_1,g)$
para $g=g_1$	$w(A_2,L_2,g) = w(A_1,L_1,g)$	$w(A_1,L_1,g)$
para $g_1<g<g_2$	$w(A_1,L_1,g) < w(A_2,L_2,g)$	$w(A_2,L_2,g)$
para $g=g_2$	$w(A_1,L_1,g) = w(A_2,L_2,g)$	$w(A_2,L_2,g)$
para $g_2<g<=M$	$w(A_2,L_2,g) < w(A_1,L_1,g)$	$w(A_1,L_1,g)$

y que ambas curvas se corten dos veces en los puntos g_1 y g_2. La función estaría definida por la curva quebrada *envolvente* que es continua a lo largo de todo ella, derivable -salvo en los puntos de corte g_1 y g_2- y convexa siempre. No hay pues cambio de convexidad y si retorno de las técnicas. Para su construcción es necesaria el concurso de los empresarios, que tienen a disposición los dos posibles procesos implicados en las curvas (26) y (27) y que maximicen las ganancias cambiando la técnica de producción en los puntos g_1 y g_2, para pasar de la ecuación (26) a la (27) en g_1 y retornar a la (26) de nuevo en g_2. La función envolvente es toda ella continua y derivable, salvo en los puntos de cruce entre las dos funciones. Si en lugar de (23) hubiéramos empleado (25) normalizada para $pI = 1$, las conclusiones hubieran sido parecidas, salvo que los movimientos en el cambio de las técnicas serían más bruscas, con posible aparición de precios negativos, pero en ningún caso y, dado que hemos hecho $pI = numerario$, la suma de todos ellos sería positivo y la función siempre decreciente. En ningún caso cambiaría la convexidad quebrada de la curva *envolvente*.

b) Modelo convexo sin retorno de las técnicas

En el modelo anterior hemos supuesto desde el principio (desde ***g***=*0*) que había 2 procesos definidos por (26) y (27) y que el empresario o gestor (o el conjunto de los que toman decisiones empresariales en un país) elegía, *porque estaba en su mano* a medida que iba aumentando el tipo de beneficio, un proceso u otro con el fin de maximizar los beneficios dado un tipo de salario (se puede entender al revés, porque formalmente da igual, aunque económicamente tenga sentido diferente). De esta manera se podía construir una envolvente que, dado en concreto los tipos de procesos, se daría un retorno de las técnicas. Sin embargo, para que el modelo sea operativo o simplemente realista, el gestor debía tener desde el principio (desde ***g****=0*)[27] opción a cualquiera de los 2 procesos. Esto supone una restricción, aunque normalmente no se hace explícito. En este segundo modelo supondremos que el nuevo proceso se hace presente en el momento de la intersección de la curva que define el proceso *en activo*. Dicho de otra manera, no necesariamente teníamos a nuestra disposición el proceso alternativo y sólo surge cuando aventuramos que una nueva técnica podría ser más barata -y obtener con ello más beneficios- que la anterior. Aunque parezca la misma que la del modelo anterior, tiene unas consecuencias distintas. La ecuación que define el proceso general -en singular- es formalmente la misma que las que definían el modelo anterior, pero con una diferencia notable: la del proceso $w(A_2, L_2, g)$ sólo comienza su andadura cuando el gestor se da cuenta de que hay la posibilidad de cambiar la técnica del proceso, variando ***A, L***, es decir, los medios de producción y el input trabajo. Con este comportamiento ya no vale el modelo (a) de *deslizamiento* a lo largo de las curvas que definen los dos procesos, sino que ahora sólo tenemos una curva que define los dos procesos: el que teníamos hasta $\boldsymbol{g_2}$ y el nuevo que, al variar ***A*** y ***L*,** se produce un *desplazamiento* de la curva que define la función -única función-, de tal forma que lo que obtenemos es una curva quebrada con un salto o, al menos, con una quiebra de la función presente para situarla de nuevo más alejada de ambos ejes. En términos formales, la nueva curva será $w(A_2, L_2, g) > w(A_1, L_1, g)$, para cualquier valor de ***g***. La realidad de este modelo es que nunca se produce un cruce de 2 técnicas, porque *el desplazamiento* de la función cuando se van a cruzar es permanente. El resultado es una curva descendente, monótona, quebrada, continua a trozos, derivable también a trozos y convexa. Sería como la (26) o (27), pero definida de esta manera:

(28) $$w(A, L, g) = \frac{pI = 1}{(1+g)L\,Y^{-1} \times \left[I + (1+g)A + (1+g)^2 A^2 + \cdots + (1+g)^{n-1} A^{n-1} \right] I}$$

	variable	*función w-g*	*envolvente*
para	$0 <= g < g_1$	$w(A_1,L_1,g) < w(A_1,L_1,g)$	$w(A_1,L_1,g)$
para	g=g1	$w(A_1,L_1,g) = w(A_2,L_2,g)$	$w(A_1,L_1,g)$
para	$g_1 < g < g_2$	$w(A_1,L_1, g) < w(A_2,L_2,g)$	no hay
para	$g_2 <= g < g_3$	$w(A_1,L_1,g) < w(A_2,L_2,g) < w(A_3,L_3,g)$	$w(A_3,L_3,g)$
para	$g=g_3$	$w(A_2,L_2,g) = w(A_3,L_3,g)$	$w(A_3,L_3,g)$

con ***R*** como tasa máxima de ganancia y siendo la *función envolvente* continua entre ***g****=0* y $\boldsymbol{g_1}=1$ y derivable entre ***g****=0* y $\boldsymbol{g_1}<1$; no existe entre $\boldsymbol{g_1}<\boldsymbol{g}<\boldsymbol{g_2}$; es de nuevo continua para $\boldsymbol{g}=>\boldsymbol{g_2}$ y derivable para $\boldsymbol{g}>\boldsymbol{g_2}$ hasta ***g****<****R***; en ***g****=****R*** sería continua, pero no derivable, obviamente. Para $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{g_3}$ la función no se deslizaría por la curva, sino que se produciría *un salto* a una nueva función más a la derecha, con lo cual nunca se volvería a cruzar

[27] Vamos a relacionar la sucesión temporal con el aumento de los beneficios. Esto se hace siempre, pero muchos no se dan cuenta de que lo hacen. Lo ideal sería poder disponer de un espacio tridimensional, pero no es el caso.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

con una curva que representara una técnica anterior. Y, sin embargo, siempre convexa y monótona decreciente. No hay retorno de técnicas porque la función es única, con las características anteriores. La explicación económica es la siguiente: el gestor o gestores empresariales trabajan con unos medios de producción y de trabajo de acuerdo con un sistema productivo que les permite ir aumentando los beneficios (ganancias); si en un momento determinado estos se estancan de tal manera que, aún cuando disminuyan los salarios relativos apenas aumenten los beneficios (se hace inelástica la curva (28)), buscan un cambio de sistema, de métodos de producción, nuevas recombinaciones del libro de alternativas de producción, de organización, etc., y cambian la matriz de requerimientos ***A*** y el vector de inputs de trabajo ***L***[28], y si no se equivocan, *desplazarán* la curva del proceso productivo a la derecha *en ese momento* (antes no existía como alternativa real), y el sistema será más productivo; si se equivocan, pasará lo contrario, y la curva se desplazará hacia el origen del eje cartesiano de salarios-ganancias. Cuando el gestor (o el sector o el sistema en su conjunto) acierte -dada la competencia que tiende a igualar salarios y beneficios en todos lo sectores (mercancías)- aumentará en un principio los precios de producción y sus beneficios, pero a más plazo, la compra de sus medios serán más caros como consecuencia del incremento de la demanda de esos medios por parte de las empresas que han obtenido beneficios del mismo sector (que el que opera el gestor); también porque habrán disminuido la escala del resto de empresas que sus beneficios estaban por debajo de la media y otras habrán simplemente. Entonces -por este motivo- se encarecerán la oferta de estas empresas de medios para nuestros gestores (del nivel que sean). Resumiendo, tanto por el lado de la demanda de medios que son productos de otras empresas, como de la disminución de la oferta de estas mismas empresas, los precios se adecuarán -o tenderán a ello- de tal forma que los beneficios tiendan a igualarse. Ocurrirá que nuestro gestor tendrá que adecuarse nuevamente, trasladando su curva (28) a la derecha del origen de los ejes de abcisas y ordenadas. Con todo ello intentará combatir el descenso de los beneficios que supone *deslizarse* (variando salarios y ganancias a lo largo de la frontera salarios-beneficios) con *desplazamientos* a la derecha de esta misma curva, es decir, con variaciones de las técnicas de producción, modificando ***A*** y ***L*** en un proceso sin fin (o al menos hasta que desaparezca la empresa, empresas o sector o haya que apuntalarlo mediante subvenciones[29]).

c) Modelo de frontera de salario-ganancia con salarios acotados

En un intento de acercarnos a la realidad, se presenta en este epígrafe un modelo donde el gestor (o gestores, sectores o de toda la economía) tienen acotados simultáneamente los salarios por arriba con $w_M = w(0 <= g <= R) = ctee$, y por abajo con $w_m = w(0 <= g <= R) = cte$: por arriba, porque son los anteriores los que ponen límite al salario de los trabajadores; por abajo, porque son los mismos trabajadores -o sus representantes sindicales- los que lo acotan mediante mínimos de convenio, acuerdos, mínimos legales (gobiernos), etc. De esta manera, aún cuando las funciones que

[28] Al cambiar **A** se sobrentiende que pueden cambiar **Y**, **X** o uno cualquier de los dos, porque **X**=**AY**.

[29] Podría ser el caso del sector energético (nuclear) español y los llamados *costes de transformación a la competencia.*

expresan la frontera salario-ganancia son las mismas que en los casos anteriores, el comportamiento de los gestores se presupone diferente. Este, cuando se haya en un punto de salarios y ganancias dentro del intervalo de salarios ($\boldsymbol{w_m}$, $\boldsymbol{w_M}$) sigue con la misma técnica caracterizada por la curva $w(A_1, L_1, g)$, *deslizándose* hacia abajo, es decir, aumentando las ganancias y rebajando los salarios[30], pero hasta el nivel $\boldsymbol{w_m}$, no más. Cuando llega a ese punto donde se cortan la función frontera anterior y la recta que expresa el salario mínimo $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w_m}$, lo que hace es *desplazar* la curva a la derecha, modificando los valores ***A*** y ***L*** hasta una nueva posición que se encuentre al menos *dentro* del intervalo ($\boldsymbol{w_M} / \boldsymbol{w_m}$), y así sucesivamente. El esquema es el siguiente:

	variable	*función w-g*	*envolvente*
para	$0<=g<g_1$	$w_M < w(A_1,L_1,g)$	no existe
para	$g=g_1$	$w_M = w(A_1,L_1,g)$	$w(A_1,L_1,g)$
para	$g_1<g<g_2$	$w_m < w(A_1,L_1,g) < w_M$	$w(A_1,L_1,g)$
para	$g=g_2$	$w_m = w(A_1,L_1,g) < w_M$	$w(A_1,L_1,g)$
para	$g_2<g<g_3$	$w_m < w(A_2,L_2,g) < w_M$	$w(A_2,L_2,g)$
para	$g_3=g<R$	$w_m =w(A_2,L_2,g) < w_M$	$w(A_2,L_2,g)$

La función pues no existe hasta que se corta con el salario máximo, por lo que es continua entre $\boldsymbol{g_1}<=\boldsymbol{g}<=\boldsymbol{g_2}$ y derivable entre $\boldsymbol{g_1}<\boldsymbol{g}<\boldsymbol{g_2}$; entre $\boldsymbol{g_2}<\boldsymbol{g}<\boldsymbol{g_3}$ la función no existe. En este intervalo surge un problema: si el gestor no es capaz de encontrar unos valores para ***A*** y ***L*** que le permitan saltar a la función $w(A_2, L_2, g)$, la empresa (sector, economía privada) no podrá compaginar las condiciones de tasa de ganancia, tasa de salarios y tecnología. El modelo no da la solución, pero la realidad la dará de alguna manera, aunque sea dolorosamente[31]. Lo mismo ocurría en el modelo anterior ante un *desplazamiento* de la función salario-ganancia, aunque no se haya hecho mención; no así en el modelo primero de retorno de las técnicas sin cambio de convexidad, donde la función envolvente era siempre continua y salarios y ganancias se *deslizaban* a lo largo de la curva sin sobresaltos. Estos modelos -y los que siguen- son acordes con la manera de pensar srafiana: los modelos económicos -todas las teorías sociales son modelos en última instancia- no lo explican todo, ni todas la situaciones, pero imponen límites materiales a los comportamientos individuales y colectivos, públicos y privados, en lo que respecta a la producción, distribución y consumo de bienes y servicios. Para acabar este epígrafe, en el tramo $\boldsymbol{g_3}<=\boldsymbol{g}<=\boldsymbol{g_4}$ la función es continua en todo el y derivable entre $\boldsymbol{g_3}<\boldsymbol{g}<\boldsymbol{g_4}$.

[30] Siempre en términos de la mercancía-patrón y con la normalización **pl**=1.

[31] En forma de economía sumergida o defraudadora.

d) Modelo de frontera salario-ganancia escalonada

En este modelo el salario es único, pero va cambiando según tramos de la tasa de ganancia ***g***, y permanece constante hasta el siguiente tramo. Sea $w = w_1(g_0 <= g <= g_2) = cte$ el valor de los salarios impuesto por la realidad (o las fuerzas sociales y económicas) entre los tramos que de ganancia que se indica; luego se salta en el siguiente tramo, de tal forma que ahora *la función horizontal de limitación de salarios* $w = w_2(g_2 <= g <= g_4) = cte$ es más alta que la anterior; *la función frontera w-g* es $w(A_1, L_1, g)$ y se corta con *la función de limitación* tal que $w=w_1$, es decir, en un punto intermedio entre $\boldsymbol{g_0}$ *y* $\boldsymbol{g_2}$ (tal como $\boldsymbol{g_1}$). La peculiaridad de este modelo es la de que entre $\boldsymbol{g_1}$ y $\boldsymbol{g_2}$, los gestores no pueden hacer compatible los salarios con la función de producción que determina la frontera de salario-ganancia $w(A_1, L_1, g)$; lo único que pueden hacer es *saltar* a $w(A_2, L_2, g)$, y lo harán en un punto intermedio de la nueva *función de limitación de salarios* $w = w_2(g_2 <= g <= g_4) = cte$, y así sucesivamente. El resumen sería:

variable	función w-g	f. de salarios
$0<=g<g_1$	no existe	$w=w_1(0<=g<g_2)$=cte.
$g=g_1$	$w(A_1,L_1,g)$	$w=w_1(0<=g<g_2)$=cte.
$g_1<g<=g_2$	no existe	$w=w_1(0<=g<g_2)$=cte.
$g_2<g<g_3$	no existe	$w=w_2(g_2<=g<g_4)$=cte.
$g=g_3$	$w(A_2,L_2,g)$	$w=w_2(g_2<=g<g_4)$=cte.
$g_3<g<=g_4<R$	no existe	$w=w_2(g_2<=g<g_4)$=cte.

Aquí la función envolvente es siempre creciente, obligando a los que deciden (empresa, sector o sectores) a cambiar ***A*** y ***L*** para hacer compatible salarios y ganancias siempre crecientes, por tramos los primeros y continuas las segundas.

e) Modelo de frontera salario-ganancia de doble acotación

A diferencia del modelo con acotación de salarios, supondremos que tanto los salarios como las ganancias lo están. Es decir, los trabajadores, merced a acuerdos con los empresarios, gestores, por ley, etc., o merced a su capacidad impedir la bajada de sus salarios como consecuencia del deslizamiento de la función de salario-ganancia aumentando la tasa de ganancia a costa de los salarios, el salario no bajará de un tope $\boldsymbol{w_m}$; tampoco podrán subir más allá de un tope superior $\mathbf{w}_M$ impuesto por la parte contraria. Hasta aquí es el mismo modelo que el que hemos llamado *con acotación de salarios*. La novedad es que también las ganancias están acotadas. En efecto, el gestor y/o empresario o el propio conocimiento tecnológico para ese momento no comenzará la producción de la empresa (sector) hasta no obtener un nivel de ganancias mínimo $\boldsymbol{g_m}$; tampoco podrá superar como sabemos la razón-patrón o la tasa máxima de beneficios del sistema económico (aunque no coincida con la razón-patrón). Con ello tenemos un espacio cuadrado de soluciones factibles cuyo vértice inferior es el ($\boldsymbol{w_m}$ /

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

$\boldsymbol{g}_m$) y el superior ($\boldsymbol{w}_M$ / $\boldsymbol{g}$=$\boldsymbol{R}$)[32]. Si ahora la función atraviesa el cuadrado, podrá tocar primero en un punto tal como el ($\boldsymbol{w}_1$ / $\boldsymbol{g}_m$), donde $\boldsymbol{w}$ está acotado ($\boldsymbol{w}_m<\boldsymbol{w}_1<\boldsymbol{w}_M$). Luego la gestión podrán aumentar las ganancias de la empresa (o del sector si estamos aplicando el modelo de forma más general), *deslizándose* por *la función frontera w-g* hasta el lateral derecho del cuadrado, es decir hasta que $\boldsymbol{w}(A,L,g)=\boldsymbol{w}_m$ y $\boldsymbol{g}_2$ tal que $\boldsymbol{g}_m<\boldsymbol{g}<\boldsymbol{g}_2$. A partir de ahí no se puede hacer compatible salarios, ganancias y *la función frontera w-g*, con lo cual, sólo cambiando la técnica y/o la organización, es decir, cambiando $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{L}$, podrá *desplazarse* esta función a la derecha $\boldsymbol{w}(A_2,L_2,g)$ hasta encontrar un punto del cuadrado factible que ya hemos comentado. Todo eso se puede resumir de la siguiente manera:

	variable	función frontera w-g
para	$0<g<g_m$	no existe
para	$g_m<=g<=g_2$	$w_m<w(A_1,L_1,g)< w_1< w_M$
para	$g_2<g<R$	$w(A_1,L_1,g)< w(A_2,L_2,g)$
para	$g=R$	$w_m<w(A_2,L_2,g)<=w_M$

Con esta función frontera las ganancias no pasarán del tope máximo de ganancia, porque a partir de $\boldsymbol{g}_2$ no son compatibles a la vez salarios, ganancias y función frontera; sólo lo serán si cambia la matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}$ y la de inputs de trabajo $\boldsymbol{L}$ y la función frontera se desplace a la derecha del origen de coordenadas, pero no más allá del extremo inferior ($\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_m$ / $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{R}$) o del extremo superior ($\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_M$ / $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{R}$). Por encima del cual a los trabajadores les encantaría llegar, pero la gestión no podría hacerlo, incluso aunque quisiera ($\boldsymbol{R}$ o en su caso $\boldsymbol{M}$, es el límite máximo de ganancias que le permite el sistema económica merced a la competencia).

4. Función frontera salario-ganancia con reducción a trabajo fechado

Traemos aquí la ecuación de precios de la producción simple o conjunta srafiana con reducción de mercancías a trabajo fechado del artículo: "Aspectos de la economía de Sraffa"[33]. Los precios $\boldsymbol{p}_t$, como se puede apreciar, dependen proporcionalmente de los salarios $\boldsymbol{w}$, también proporcionalmente de la inversa de la productividad del trabajo $\boldsymbol{L}_y$ y, de forma mucho más compleja, de los tipos de intereses $\boldsymbol{r}$, de *las razones-patrones anuales* ($\boldsymbol{R}_k$, distintas cada año) y, por último, del tiempo de reducción a trabajo fechado ($\boldsymbol{t}$-$\boldsymbol{i}$)[34].

[32] O **M** si el modelo de función no tiene razón-patrón y sí tasa máxima de beneficios.

[33] Ver bibliografía.

[34] Recordar del artículo original que **t** es el tiempo máximo hacia atrás de la matriz de requerimientos, mientras **i** es el tiempo que estamos considerando. La diferencia entre ambos serían los residuos de los efectos sobre el precio de las matrices de requerimientos desde **i** hasta **t**, es decir: $\mathbf{A}^{i+1}$, $\mathbf{A}^{i+2}$,....,$\mathbf{A}^{t-1}$.

$$p_t = w \times \left[\frac{1}{1 - \dfrac{(1+r)^i}{\prod_{k=1}^{k=i}\left(1 + R_k\right)}} \right] \times \frac{(1+r)^{t-i} - 1}{r} \times L_y$$

Si ahora post-multiplicamos esta por ***YI***, siendo ***Y*** como siempre la matriz de productos finales e ***I*** el vector vertical de unos; si consideramos que $L_y = LY^{-1}$, y si además tomamos a $pYI = 1$ como numerario y despejamos el salario ***w***, obtenemos la ecuación:

(29) $$w = \frac{r\left(\prod_{k=1}^{k=i}(1+R_k) - (1+r)^i\right)}{\prod_{k=1}^{k=i}(1+R_k) \times \left[(1+r)^{t-i} - 1\right] LI}$$

que sería <u>*la frontera salario-ganancia srafiana*</u> (simple o conjunta) de la función de precios anterior y que tendría las siguientes propiedades:

a) cuando el tipo beneficio (ganancia) tiende a cero, buscado para encontrar el punto de corte en ordenadas ***w*** cuando ***r**= 0*, obtenemos de (29) que:

(30) $$\lim.\ de\ \ w\ \ cuando\ \ r \to 0 = \frac{\lim..\ del\ numerador \to 0}{\lim.\ del\ denominador \to 0} = in\mathrm{det}er\mathrm{min}ado$$

Este hecho apunta a la idea de que la frontera de salario-ganancia en el sistema de reducción de trabajo fechado puede ser irregular.

b) para que la tasa de salario ***w*** sea mayor que cero ha de cumplirse que el numerador de (29) sea mayor que cero, y eso es como decir que, tras manipulaciones algebraicas elementales, ocurra:

(31) $$si\ \ r < \exp\left[\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{k=i} \lg\left(1 + R_k\right)\right] - 1 \ \to\ w > 0$$

c) si R_m fuera *la razón-patrón media* de R_k desde ***k**=1* a ***k**=i* de tal forma que se cumpliera:

(32) $$\left(1 + R_m\right)^i = \prod_{i=1}^{k=i}\left(1 + R_k\right) \quad \to \quad r < R_m$$

es decir, para que la tasa de salario sea mayor que cero[35] -en definitiva, para que el sistema sea posible- ha de ocurrir que el tipo de ganancia (beneficio) del sistema sea menor que *la razón-patrón media* (tal como se ha definido).

d) para valorar si la función (29) es creciente o decreciente debemos hallar *el numerador* de la primera derivada. Este es como sigue:

$$(33) \qquad S(1+r)^{t-i}+ri(1+r)^{i-1}+r(t-i)\times(1+r)^{t-1}-S-ri(1+r)^{t-1}-rS(t-i)\times(1+r)^{t-i-1}>0$$

$$siendo\ S=\prod_{k=1}^{k=i}\left(1+R_k\right)$$

Si la anterior inecuación es con el signo **>**, la función (29) es creciente, y si con el signo **<**, es decreciente. Como se puede comprobar cualquier cosa es posible. A diferencia del cálculo de la producción simple, conjunta srafiana e incluso no srafiana, donde la relación entre tasa de salario y tasa de ganancia podía ser monótona o no monótona, creciente o decreciente, cóncava o convexa en función de los supuestos (uno de los cuales e imprescindible era el de fijar el comportamiento de los gestores), aquí, con mercancías (sean bienes y servicios de consumo o de producción) reducidas a trabajo fechado, se puede afirmar que cualquier cosa es posible en $la\ frontera\quad w-g$, porque depende de los tiempos (***t**, **i***) y de la *razones-patrón interanuales* (***R**$_k$*) que consideremos. Hay que advertir que estas razones-patrón, que son a la vez una medida de la productividad del sistema y del excedente, sustituyen, inspirados en Sraffa, a la matriz de requerimientos ***A*** (donde están ***Y*** e ***X***, es decir, matriz de productos y de medios). No obstante, si consideramos dadas las razones-patrón ***R**$_k$* *,* la inecuación (33) nos dice cuándo la ecuación (29) es creciente y cuando decreciente según el signo *mayor o menor que*:

$$(33b)\quad S(1+r)^{t-i}+ri(1+r)^{i-1}+r(t-i)\times(1+r)^{t-1}>o<-S-ri(1+r)^{t-1}-rS(t-i)\times(1+r)^{t-i-1}$$

e) el resultado anterior parece muy complejo, pero si llevamos ***i*** hasta el final (***t**-1*), es decir, si llevamos a su máxima extensión en el tiempo la reducción a trabajo fechado, la ecuación de determinación de los precios que hemos traído del artículo “Aspectos de la economía de Sraffa”; si sustituimos además ***i**=t-1* en (29) y normalizamos el trabajo $LI=1$, tras pasos elementales, queda la ecuación:

$$(34) \qquad \boxed{w=\frac{\prod_{k=1}^{k=t-1}\left(1+R_k\right)-\left(1+r\right)^{t-1}}{\prod_{k=1}^{k=t-1}\left(1+R_k\right)}}$$

y donde para que los salarios sean positivos (***w**>0*) ha de ocurrir que:

$$(35) \qquad \prod_{k=1}^{k=t-1}\left(1+R_k\right)>\left(1+r\right)^{t-1}$$

[35] Salvo en el supuesto que los bienes que los trabajadores directos y sus familias se integren en el sistema como medios de producción, es decir, en **X,** como hizo Sraffa en el I capítulo de su libro (“*Producción de subsistencia*”).

Es una conclusión análoga a la obtenida en (31). Ahora la función (29) completa se ha simplificado enormemente en (34), y al hallar la primera derivada de la tasa de salarios ***w*** respecto al tipo de ganancia ***r*** queda:

$$(36) \qquad \frac{dw}{dr} = -(t-1)(1+r)^{t-2} \times \frac{1}{\prod_{k=1}^{k=t-1}(1+R_k)}$$

Y (36) es siempre negativa, por lo que la función de la que *deriva* (34) es decreciente. Además la segunda derivada es:

$$(37) \qquad \frac{d^2w}{dr^2} = -(t-1)(t-2)(1+r)^{t-3} \times \frac{1}{\prod_{k=1}^{k=t-1}(1+R_k)}$$

que es también negativa, por lo que la función (34) es decrecientemente decreciente (convexa hacia el origen). Además, todas las derivadas tendrán signo negativo:

$$(38) \qquad \frac{d^jw}{dr^j} = -(t-1)(t-2)\cdots(t-j)(1+r)^{t-j-1} \times \frac{1}{\prod_{k=1}^{k=t-1}(1+R_k)} \qquad \text{para j=1 a j=t-1}$$

La función frontera de salario-ganancia (34) tiene un interés adicional. Si a ***t*** (el tiempo de reducción a trabajo fechado) le damos el valor 1, es decir, sólo consideramos un período de tiempo, los salarios valen cero (***w***=*0*); en cambio para ***t***=*2* el resultado es muy interesante:

$$(39) \qquad w = \frac{(1+R_1)-(1+r)}{1+R_1} = \frac{R_1 - r}{1+R_1}$$

que tiene el mismo punto de corte en el eje de abcisas (***w***=*0* / ***r***=R_1) que la razón-patrón de la producción simple de Sraffa[36], aunque distinto en el eje de ordenadas (***r***=*0* / ***w***=$R_1/(1+R_1)$). Para t=3 se obtiene:

$$(40) \qquad w = \frac{(1+R_1)\times(1+R_2)-(1+r)^2}{(1+R_1)\times(1+R_2)}$$

y, en general, para ***t***=*j* tendremos:

$$(41) \qquad w = \frac{(1+R_1)\times\cdots\times(1+R_j)-(1+r)^j}{(1+R_1)\times\cdots\times(1+R_j)}$$

[36] w=(R-r)/R

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

La ecuación (41) podríamos pues tildarla de *función generatriz de razones-patrón interanuales de reducción a trabajo fechado*. El nombre es desde luego un poco largo, pero no se me ocurre como reducirlo. Y no por ello deja de ser una *función frontera de salario-ganancia* que se ha simplificado notablemente respecto a las anteriores (23) y (34) merced a la introducción de las razones-patrón interanuales $\boldsymbol{R}_k$ que han sustituido a la matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}$ y sus productos, es decir, $\boldsymbol{A}^j$. Pero sigamos. La derivada primera de (41) es:

(42) $$w = -\frac{j(1+r)^{j-1}}{(1+R_1)\times\cdots\times(1+R_j)}$$

que al ser negativa hace que la función (41) se decreciente (como se observa a simple vista). La derivada segunda es:

(43) $$w = -\frac{j(j-1)\times(1+r)^{j-2}}{(1+R_1)\times\cdots\times(1+R_j)}$$

que es también negativa, por lo que la función (41) -como cabía esperar- es decrecientemente decreciente, es decir, convexa hacia el origen.

Hay recordar que todos estos resultados se dan en el caso particular de que la función frontera de salario-ganancia (29) se haya llevado hasta el final de los tiempos en la reducción a trabajo fechado (haciendo ***i***=*t-1*). Este caso no es descabellado porque representa el valor actual de las mercancías -de todas ellas- para poder hacer así comparaciones y obtener además los precios de producción. En este caso se podría decir que la *ontogénesis* de la obtención de los precios actuales coincide con la *filogénesis* de su historia.

En síntesis, de todo esto podríamos decir que, si consideramos que el tipo de ganancia ***r*** no puede ser mayor que la razón-patrón correspondiente $\boldsymbol{R}_k$, se concluye que *la función frontera salario-ganancia es siempre decreciente si extendemos hasta el infinito la matriz de requerimientos* (sustituidas por las razones-patrón interanuales), pero si la extensión no es total, ya no se puede afirmar esto. De ahí que Sraffa pudiera comparar el precio de dos mercancías[37] tales como el vino y el roble viejo con diferentes, pero sobre todo parciales, períodos de maduración. Lo correcto es que hubiera hallado el cociente a través de la matriz de requerimientos ***A***, entonces Sraffa se habría dado cuenta que el cociente de los precios de dos mercancías, *extendidas ambas al infinito en sus matrices de requeri*mientos ($\boldsymbol{A}^i$, con ***i*** al infinito), sólo se diferencian en el trabajo directo, como puede comprobarse en la ecuación de precios traída del trabajo ya mencionado[38]. Y, en todo caso, si no es al infinito, como ***A*** es productiva -y cuanto más, mejor- la matriz $\boldsymbol{A}^i$ será siempre residual con respecto al trabajo directo de los diferentes períodos a medida que aumente el tiempo de reducción (***i***). En nuestro caso, se han ido sustituyendo estas matrices por las razones-patrón interanuales a través del mecanismo de reducción de trabajo fechado. Todo esto, llevado a la frontera salario-

[37] Pág. 61 de “Producción de... “.

[38] “Aspectos de la economía de Sraffa”.

ganancia, con los numerarios $pYI = 1$ (lo que significa que se anulan los efectos de los precios en los consumos de las empresas) y $LI = 1$ (lo que significa que se normalizan los salarios), da lugar a un tipo de funciones cuyas posibles cambios de convexidad, incluso posibles casos de crecimiento, dependen de los supuestos que se hagan sobre el comportamiento de los gestores (empresarios, gobiernos, etc.) y no si sólo depende de las variables salario y ganancia, tal como se ha expuesto. Aunque esto vaya aparentemente en contra de los expuesto por Nuti, Pasinetti, Gareganani, etc., no hay tal, porque si se examinan los argumentos, siempre aparece un comportamiento de los agentes -digamos, empresarios-, tal que les lleva a modificar la matriz de requerimiento y/o los inputs de trabajo; en nuestro caso, las razones-patrón. Incluso en los puntos de truncaje (*truncations*) y de introducción de un proceso indirecto (*roundabout*) que recoge Ahijado (1982) de Schefold (1976), se producen por la introducción de una nueva máquina, donde el residuo al finalizar el año se considera como una nueva máquina producida, aunque más vieja. En definitiva, se varía la matriz de requerimientos ***A*****,** y cuando esto sucede, trasladado a nuestro análisis, se produce un *desplazamiento* de la curva *frontera w-g* y no un *deslizamiento*.

Apéndice I

La frontera salarios-ganancias se han definido mediante las ecuaciones (23) o (25), pero presentamos aquí una alternativa, porque no parece natural tomar como numerario la suma de los precios $pI = 1$, aunque formalmente no hay inconveniente. Traemos aquí la ecuación (22):

(22) $$p = w(1+g)LY^{-1}\left[I - A(1+g)\right]^{-1}$$

Combinamos ahora esta ecuación con la ecuación de la razón-patrón de Sraffa de la función de producción simple:

(44) $$pY = \left(1+R\right)pX$$

Y post-multiplicando esta ecuación por la inversa de ***Y*** queda:

(45) $$p = \left(1+R\right)pXY^{-1}$$

que igualándola con (22) y post-multiplicando la igualdad por ***Y*** sale:

(46) $$\left(1+R\right)pX = w(1+g)LY^{-1}\left[I - A(1+g)\right]^{-1}$$

Tomando como numerario $pXI = 1$ y despejando la tasa de salario:

(47) $$w = \frac{\left(1+R\right)}{\left(1+g\right)LY^{-1}\left[I - \left(1+g\right)A\right]^{-1}I}$$

que parece más natural que (23), además de incorporar la razón-patrón de Sraffa. Por otra parte, con *la producción conjunta no srafiana,* donde ***m***>***n*** (más productos que medios) hay que tomar (25) y con (2) y el numerario $pXI = 1$ sale la ecuación frontera salario-ganancia para la conjunta no srafiana:

(48) $$\left(1+R\right) = w\,(1+g)\,L\left[Y - X\,(1+g)\right]^{T} \times \left[\left[Y - X\,(1+g)\right] \times \left[Y - X\,(1+g)\right]^{T}\right]^{-1} YI$$

Ahora se puede despejar sin dificultad la tasa de salario ***w*** e incorporar la matriz de requerimientos ***A*** mediante $X = YA$.

Apéndice II

En el capítulo VI de su libro mencionado inicia Sraffa una discusión sobre la posibilidad de que salarios y ganancias no tengan una relación siempre inversa. Ya se ha visto todo esto en lo anterior y no entraré en esa posibilidad. Está demostrada y aquí se ha hecho, pero cambiando algunos puntos de vista y supuestos. Sraffa lo que hace es hallar *la diferencia* de precios de dos productos[39] con reducción a trabajo fechado. Sin embargo, el estado de esa cuestión en Sraffa es muy incompleta e insatisfactoria por varios motivos: a) la reducción a trabajo fechado es por 2 períodos y no de todo el trabajo incorporado directa e indirectamente a lo largo del proceso, tanto del *vino añejo* como del *arca de roble* que lo contiene, según sus propios ejemplos; b) calcula la diferencia de precios en lugar del cociente de los mismos. Con ello no podemos valorar la variación de los precios en términos relativos; c) como en ningún momento tienen en cuenta el teorema de Perrón-Froebenius, nada sabemos sobre la convergencia de la función de precios. Para subsanar esas insuficiencias traemos a colación la función de precios de la producción simple srafiana. Todo lo que se va a decir vale también para la conjunta srafiana e, incluso, para la no srafiana (con ***m***>***n***). La ecuación de producción simple es (49), que es la misma que la conjunta srafiana, solo que en este último caso la matriz ***Y*** de bienes finales no es diagonal, sino que todos sus elementos tienen -o pueden tener- un valor.

(49) $$p = w(1+g)LY^{-1}\left[I - A(1+g)\right]^{-1}$$

Desarrollado (49) es:

(50) $$p = w(1+g)LY^{-1}\left[I + (1+g)A + (1+g)^2A^2 + \cdots + (a+g)^{t-1}A^{t-1}\right]$$

Si se dan las condiciones de aplicación del teorema de Perrón-Froebenius en (49) y (50) -básicamente que ***A*** sea productiva[40] y que A=>0- entonces el teorema nos dice que los precios serán una función creciente de ***g*** y ***A***. Por otro lado, para que tenga sentido desarrollar la ecuación (50), la función de precios ha de ser convergente. Esto nos deja que la función de precios en función de la tasa de ganancia, ha de ser necesariamente convexa hacia el eje de abcisas, con un valor en el eje de ordenadas para ***g***=*0* tal como $p = w\,LY^{-1}\left[I - A\right]^{-1}$, y convergiendo hacia un valor para cada precio que va a depender de las columnas de las matrices $\boldsymbol{A}^j$. Cada precio del vector de precios ***p*** se va a diferenciar de otro en el trabajo directo correspondiente y en las columnas anteriores, pero todas han de cumplir las características mencionadas: nacen para un valor determinado -normalmente distinto- en el eje de ordenadas, siguen un

[39] Pág. 62 de “Producción de... “

[40] Que **X**>**AX**

función creciente, pero crecientemente decreciente (primera derivada positiva y segunda negativa) y permanecen siempre por debajo de un cierto valor (al que convergen desde abajo). Estas dos últimas propiedades dependen de los valores concretos de $\boldsymbol{g}$ y de $\boldsymbol{A}$. Visto así, cada precio es una función de $\boldsymbol{g}$ monótona creciente, siempre continua y siempre derivable. Otra cosa es el cociente. Aquí sí que cabe cambios de convexidad, porque durante ciertos tramos el precio, llamemos $\boldsymbol{p}_r$ crecerá más deprisa que el precio llamemos $\boldsymbol{p}_S$ y la función cociente de precios $\boldsymbol{p}_r/\boldsymbol{p}_S$ será convexa (monótona creciente), y cuando crezca más deprisa el precio $\boldsymbol{p}_S$, la función cociente será cóncava (monótona decreciente)[41]. Sin embargo, nada de esto nos dice nada nuevo sobre la función frontera salario-ganancia. En efecto, para considerar esta hay que anular el efecto de los precios tomando como numerario cualquier conjunto de variables en el que ellos intervengan ($pI=1 \ o \ PYI=1 \ o \ pXI=1$).

Económicamente quizá no sea tan fácil como pueda parecer obtener un conjunto de valores para las variables $\boldsymbol{g}$ y $\boldsymbol{A}$ que satisfagan simultáneamente las condiciones anteriores: que se cumpla el teorema de Perrón-Froebenius para asegurar un conjunto de precios positivos y que la función de precios sea convergente para evitar precios disparatados. Pero, como diría Sraffa, son las propias condiciones de la economía, o los agentes económicos que se podría decir o actores, principalmente los gestores y los mercados, los que irán eliminando las soluciones inviables. Y eso no sólo para los sectores de producción final, sino también para todos los sectores que actúan básicamente como medios de otros sectores. Además hay otra manera de ver la matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}$. Podemos suponer, aunque no se haya hecho en ningún momento en el artículo, que el producto $\boldsymbol{A}^j\boldsymbol{A}^{j+1}$ *supone un cambio de técnicas*, sobre todo si eso supone también un proceso temporal. En efecto, si $\boldsymbol{A}^j$ no sólo representa la matriz de requerimientos de $\boldsymbol{A}^{j+1}$, sino que entre ambas hay un período de tiempo -pongamos un año- se puede suponer que el producto de ambas matrices es un cambio de técnicas *si* $\boldsymbol{A}^j$ *es distinto de* $\boldsymbol{A}^{j+1}$ *y no sólo por el exponente*. No es que ello se deduzca de (49) -todo lo contrario-, pero es factible su introducción heurística en (50). Como se ve la cosa es más compleja de lo que Sraffa nos expone en su obra como ejemplo. No obstante, en honor al gran economista italiano, hay que decir que todo esto debía tener en su cabeza si se lee entre líneas los capítulos VI y IX. Tal es así, que incluso contempla la posibilidad de precios negativos si el margen entre los precios de venta de un producto dirigido a la venta y el mismo producto utilizado como medio es muy pequeño. Sraffa habla también de los salarios[42]. Con las ecuaciones (49) y (50) se puede contemplar si en algún momento la productividad de la matriz $\boldsymbol{A}$ para algún producto que se utiliza como medio (alguna columna de $\boldsymbol{A}$) origina un crecimiento del valor final del producto que le corresponde como fila que no puede ser compensado con una bajada de los salarios del sistema (de todos, porque estamos con un modelo de tasa de ganancia y salarios únicos). Sraffa pone el ejemplo de las habas. En el artículo "Aspectos de la economía de Sraffa" se ve más claro esta posibilidad en la medida que las matrices de requerimientos $\boldsymbol{A}^j$ se van sustituyendo por *las razones-patrón interanuales*.

---

[41] Pasinetti hace una valoración de los efectos sobre el cociente de precios de la tasa de ganancia, distinguiendo un llamado efecto-intensidad de un efecto-precio, aunque no saca ninguna conclusión sobre *la frontera w-g* porque no estaba en este capítulo. "Lecciones de la teoría de la producción", pág. 110, FCE.

[42] Pág. 87 de "Producción de ..."

Apéndice III

Como complemento al epígrafe sobre la frontera salario-ganancia, vamos a dar algunos desarrollos matemáticos a partir de las ecuaciones implícitas del modelo de Sraffa, apartándonos de las dadas por Schefold y Nutti[43]. El primer caso será el más simple posible:

a) <u>Frontera salario-ganancia srafiano con salarios ex-post</u>.

Partimos de la ecuación srafiana ex-post que define al sistema:

(51) $$\underset{1xm}{p}\underset{nxn}{Y} = \left[\underset{1x1}{w}\underset{1xn}{L} + \underset{11xn}{p}\underset{nxn}{X}\right] \times \left(1 + \underset{1x1}{g}\right)$$

Si ahora reemplazamos la matriz ***X*** de medios por:

(52) $X = AY$ con lo que $A = XY^{-1}$ y despejamos los precios ***p*** queda:

(53) $$p = w(1+g)LY^{-1}\left[I-(1+g)A\right]^{-1}$$

Para eliminar el factor precios ***p*** vamos a post-multiplicar ambos miembros de la ecuación por ***YI***, siendo ***Y*** los bienes finales e ***I*** el vector vertical de unos. Además haremos del producto $pYI = 1$ el numerario, es decir, $pYI = 1$. Con todo ello queda:

(54) $$1 = pYI = w(1+g)LY^{-1}\left[I-(1+g)A\right]^{-1}YI$$

Llegado a este punto parecería que ya hemos arribado al destino simplemente con despejar los salarios de la ecuación y tendríamos una relación inversa entre estos y las ganancias puesto que estas aparecen en dos lugares en la ecuación (54) y ambas de forma creciente: la primera es evidente y la que está pre-multiplicando a la matriz de requerimientos ***A*** lo es por el teorema de Perrón-Froebenius al suponérsela irreductible, productiva y mayor que cero. Pero vamos a dar un paso más y desarrollamos (54):

(55) $$1 = pYI = w(1+g)LY^{-1}\left[I + (1+g)A + (1+g)^2A^2 + \cdots + (1+g)^{n-1}A^{n-1}\right]^{-1}YI$$

Ahora reemplazamos la matriz ***A*** por su valor en (52) y abrimos los corchetes y queda:
(56)
$$1 = pYI = w(1+g)L\left[Y^{-1}IY + (1+g)Y^{-1}XY^{-1}Y + (1+g)^2Y^{-1}XY^{-1}XY^{-1}Y + \cdots + (1+g)^{n-1}Y^{-1}XY^{n-1}Y\right]^{-1}I$$

y llamando ahora ***B*** a $B = Y^{-1}X$ y reemplazando en lo anterior:

[43] Capialism. Socialism and Sleady Growth, 1970

(57) $$1 = w(1+g)L\left[I + (1+g)B + (1+g)^2 B^2 + \cdots + (1+g)^{n-1} B^{n-1}\right]I$$

La diferencia de (54) respecto a (55) es que ahora tenemos integrado la matriz de bienes finales ***Y*** dentro del corchete, al cual se puede aplicar también el teorema P-F[44] y asegurar el crecimiento de la tasa de ganancia. Despejando los salarios queda:

(58) $$w = \frac{1}{(1+g)L\left[I - (1+g)B\right]^{-1} I}$$

que es una función decreciente, con un punto de corte en el eje de ordenadas:

(59) $$para \quad g = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1}{L\left[I - B\right]^{-1} I}$$

y con un descenso monótono, decreciente, convexo y tangencial en el eje de abcisas a medida que aumenta la tasa de ganancia. Ahora bien, nosotros sabemos que ese descenso tiene el límite srafiano de la razón-patrón ***R***. Este desarrollo matemático vale tanto si estamos en la producción simple como en la conjunta, puesto que la diferencia es que la matriz ***Y*** de bienes finales sea diagonal (producción simple) o no (producción conjunta), es decir, con valores positivos (puede haber algún cero) en todos los elementos. Pero hay una diferencia notable entre ambos: en la producción conjunta ya no podemos asegurar que ***A*** -y en nuestro caso menos aún ***B***- sea productiva, irreductible y estrictamente mayor que cero, con lo que no podemos recurrir a Perrón-Froebenius. Eso implica que el crecimiento de ***g*** en (53) y siguientes no está asegurado por el teorema; tampoco la convergencia del denominador de (59). Para asegurar esto hay que recurrir al comportamiento económico de los actores -tal y como hace Sraffa[45]- de tal forma que sean ellos los que seleccionen aquellos procesos productivos que aseguren precios y salarios positivos y, a largo plazo, una frontera decreciente entre salarios y ganancias, puesto que es imposible que en una economía real y en su modelo explicativo auto-reproductivo sin acumulación y sin variaciones en la técnica (***A***,***L***) y sin aumentos de productividad, puedan crecer simultáneamente salarios y ganancias. No obstante, este hecho, esta necesidad de recurrir a la economía real, demuestra que la teoría neoclásica -donde la relación entre salarios y ganancias es monótona decreciente y convexa- no puede admitirse como cierta con carácter general. Además, esta necesidad de adecuarse a una economía viable, es decir, modificar la

---

[44] Suponiendo a **B** irreductible, mayor que cero y productiva, también y que **g**<**R** (criterio de convergencia) para poder pasar de (57) a (58).

[45] Es notable que Sraffa no menciona ni recurre en ningún momento al teorema de Perrón-Froebenius. Es posible que el no lo conociera en un principio, pero sí los dos notables matemáticos de Cambrigde que le ayudaron, y en una obra de varias décadas de maduración es impensable que no fuera avisado de ello. Quizá lo omitió por no desvirtuar el carácter económico de sus explicaciones. Mi explicación en concreto es que Sraffa quería presentar un modelo donde el comportamiento de los actores implicados fuera determinante en él, cosa que se hubiera perdido se fijaba las condiciones formales a priori. Pero esto ha originado, creo yo, una confusión en el punto trascendental de la frontera salario-ganancia al no distinguir entre *deslizamientos* a lo largo de la frontera y *desplazamientos* de esta función, que ocurre siempre que no consideremos dados todas las variables (***A***, precios, ***L***) que no sean precisamente salarios y ganancias. De ahí el esfuerzo que se ha hecho en este modesto trabajo en distinguir ambos movimientos.

matriz de requerimientos ***A,*** supone un *desplazamiento* de la curva frontera de salario-ganancia, con lo que la función más realista de esta frontera sólo tiene sentido en un espacio de 4 dimensiones (***w***, ***g***, ***A, L***), donde son más significativos las variaciones de la matriz de requerimientos que los *deslizamientos* a través de la línea salario-ganancia.

La limitación de este modelo de producción conjunta srafiano es que el número de procesos ha de ser igual al número de mercancías producidas[46] (***Y*** y ***X*** son del mismo rango).

b1) <u>Frontera salario-ganancia con producción conjunta y con salarios y ganancias múltiples</u>.

Ahora cambiamos el modelo anterior al considerar no un sólo tipo de salario y una sola tasa de ganancia, sino ***n*** tasas de salarios y ***n*** tasas de ganancias, lo cual le añade realismo al modelo. Aquí ya tenemos que caminar solos porque Sraffa nos abandona, puesto que en ningún momento consideró esta posibilidad.

(60) $$\underset{1xn}{p}\underset{nxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{p}\underset{nxn}{X}\right] \times \left(1 + \underset{nxn}{G}\right)$$

donde ***W*** y ***G*** son matrices diagonales. Ahora haremos lo que hemos hecho en el caso a): despejaremos los precios ***p***, hacemos $A = XY^{-1}$ y emplearemos el mismo numerario, es decir, $pYI = 1$, y después de hacer todo esto queda:

(61) $$1 = pYI = LW(1+G)Y^{-1}\left[I - A(1+G)\right]^{-1} YI$$

Llegado a este punto parecería que no podemos salir de ahí salvo extender la expresión entre corchetes como la suma geométrica que representa. Al hacerlo así y sustituir la matriz de requerimientos ***A*** por su valor queda[47]:

(62)
$$1 = LW(1+G)Y^{-1}\left[I + XY^{-1}(1+G) + XY^{-1}XY^{-1}(1+G)^2 + \cdots + (XY^{-1})^{n-1}(1+G)^{n-1}\right]^{-1} YI$$

Y si abrimos la expresión entre corchetes para permitir pre-multiplicarla por Y^{-1} y pos-multiplicarla por Y, llamamos ***B*** a $B = Y^{-1}X$ y ***C*** a $C^i = Y^{-1}(1+G)^i Y$ (al igual que el caso anterior) y con las equivalencias siguientes:

1) $Y^{-1} I Y = I$
2) $Y^{-1}XY^{-1}(1+G)Y = BY^{-1}(1+G)Y = BC$
3) $Y^{-1}XY^{-1}XY^{-1}(1+G)^2 Y = B^2 Y^{-1}(1+G)^2 Y = B^2 C^2$

....

[46] Pág. 68 de “Producción de mercancías... “.

[47] Damos por supuesto que la expresión entre corchetes de (61) sea convergente.

n) $Y^{-1}(XY^{-1})^{n-1}(1+G)^{n-1}Y = B^{n-1}Y^{-1}(1+G)^{n-1}Y = B^{n-1}C^{n-1}$

tenemos ahora que:

(63) $$1 = LW(1+G)\left[I + BC + B^2C^2 + \cdots + B^{n-1}C^{n-1}\right]I$$

Y si por comodidad hacemos:

(64) $$D = \left[I + BC + B^2C^2 + \cdots + B^{n-1}C^{n-1}\right]$$

es evidente que ***D*** es creciente con respecto a cualquiera de las tasas de ganancias, es decir $dC/dg_i > 0 \quad \forall i = 1\ a\ n$ debido a que ***C*** depende crecientemente de ***G***. No podemos pasar (64) a la expresión sintética porque no tenemos ahora ninguna garantía de que sea creciente pero convergente. Lo será, en todo caso, si cumple que: $límite\ de\ B^iC^i \to a\ cero\ si\ i \to \infty$ (condición necesaria), o también si el sistema $\lambda Y = BCY$ tiene una autovalor máximo tal que $1 > 1/|\lambda_m|$, siendo λ_m el autovalor máximo (condición suficiente)[48]. Ahora bien, si ***D*** no fuera convergente, entonces puede pasar cualquier cosa, incluso valores disparatados desde el punto de vista económico, en especial porque en ***B*** actúa la inversa de ***Y***. Veamos en forma desarrollada (63):

(65) $$1 = (l_1 \cdots l_n) \times \begin{bmatrix} w_1 & & \\ & \ddots & \\ & & w_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1+g_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1+g_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

y visto de forma abreviada:

(66) $$1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} l_i w_i (1+g_i) d_{ij}$$

Parecería también que hemos llegado al final, pero si ahora hacemos que para algún $\boldsymbol{w_i}$ o conjunto de valores de ***w*** se cumpla que:

(67) $$1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} l_i w_i (1+g_i) d_{ij} = \left(\sum_{i=1}^{n} l_i \hat{w}_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (1+g)_i d_{ij}\right)$$

cosa que siempre podemos hacer con tal de respetar (67), donde tenemos una ecuación y ***n*** tasa de salarios (gr. de libertad = ***n-1***). Si los actores económicos son capaces de desechar procesos que den valores disparatados, se pude concluir que, si ***D*** es creciente respecto a cada tasa de salarios ***g***, hay una relación inversa entre *masa de salarios* y ganancias de acuerdo con:

[48] Ver el apéndice matemático al libro de Pasinetti "Lecciones de la teoría de la Producción" ya mencionado.

(68) $$\sum_{i=1}^{n} l_i \hat{w}_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(1+g_i)d_{ij}}$$

que es una función decreciente con las consideraciones anteriores. El punto de corte en el eje de ordenadas sería:

(68b) $$para \quad g_i = 0 \quad \forall i = 1 \ a \ n \quad \Rightarrow \quad \sum l_i \hat{w}_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}}$$

Pero (68) y todo el proceso seguido hasta aquí tiene algunas particularidades que no tenía el caso a) de una frontera con una única tasa de salarios y una única tasa de ganancia:

1) Ahora no tenemos salarios (aunque sean múltiples) para comparar con la ganancia (una o múltiples), sino que debemos tomar el producto de los inputs de trabajo ***L*** y los salarios ***w***. Dicho de otra forma, al tomar las ganancias como variable independiente, no sabemos -en este modelo- qué incidencia tiene sobre una tasa de salario en particular, sino sólo sobre la masa de salarios LW , y muy bien podría ocurrir que un aumento de las ganancias en un sector provocara a la vez un aumento de los salarios en otro -incluso en el mismo- con tal de que el conjunto de la masa de salarios disminuyera.

2) Como hemos tenido que hacer el cambio de w por $\hat{w}$ para algún salario o para el conjunto de ellos (aunque respectando (67)), no tenemos un único punto de arranque de los salarios en el eje de ordenadas cuando las ganancias son nulas, sino una infinidad posible de puntos de arranque.

3) Aún tomando un punto de arranque cualquiera, es decir, desechando la infinidad de combinaciones posibles (en realidad *"(n-1)x(n-2)x....x1"*, puesto que tenemos una ecuación a respectar) para el punto de arranque, hay otra infinidad (en concreto ***n***) de funciones decrecientes (suponiendo que lo sean) según las distintas tasas de ganancia. La forma de concretar esta última cuestión sería tomar la tasa de ganancia ($\boldsymbol{g}_m$) que provoca la masa de salarios menor y la tasa de ganancia ($\boldsymbol{g}_M$), que provoca a su vez la masa de salarios mayor. Y esto es así si estas tasas se mantienen en sus puestos de menor y mayor tasa de salarios a medida que aumentan sus valores, pero bien podría ocurrir que fueran sustituidas por otras tasas de ganancia (hay ***n***) que le tomaran el relevo. De ocurrir esto, tendríamos que cambiar de tasas de ganancia cada cierto tramo de la variable de tal forma que provocara la menor tasa de salario y la mayor.

4) La cosa se podría complicar más aún, porque podría ocurrir también que esa especie de racimos descendientes que arrancan unidos del eje de ordenadas según (68) se cruzaran entre sí si la velocidad de caída de cada racimo es diferente. Es el caso que planteamos de retorno de las técnicas para tasas únicas de salario y

ganancia con funciones convexas. Sería como verlo al microscopio. A los efectos teóricos, pues, puede estudiarse el modelo con tasas de salarios y ganancias únicas, pero desde el punto de vista empírico, este modelo de tasas únicas entiendo que es muy pobre.

b2) Frontera salario-ganancia también srafiana y no srafiana. Otro forma.

Vamos a ver que hay una forma más simplificada que esta y que vale tanto para el caso de Sraffa -donde el número de procesos (o mercancías) de bienes finales son iguales al de los medios de producción- como si son mayores los procesos. Las 3 ecuaciones que van a definir el sistema son:

(69) $$\underset{1xm}{p}\underset{mxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W} + \underset{1xm}{p}\underset{mxn}{X}\right] \times \left(1 + \underset{nxn}{G}\right)$$

(70) $$\underset{1xm}{p}\underset{mxn}{Y} = \left[\underset{1xm}{p}\underset{mxn}{X}\right] \times \left(1 + \underset{nxn}{R}\right)$$

(71) $$pXI = 1$$

siendo (71) el numerario, ***R*** representa la matriz diagonal de tipos de ganancia máximas de cada sector cuando las tasas de salarios se han hecho cero, y que en el caso de que ***m***=***n*** estamos en el caso srafiano de producción conjunta. De este conjunto de ecuaciones obtenemos por sustitución:

(72) $$LW(1+G)I = pX(R-G)I$$

ecuación que desarrollada de forma ordinaria:

(72b) $$\sum_{i=1}^{n} l_i w_i (1+g_i) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij}\left(R_j - g_j\right)$$

No tenemos, como en el modelo anterior, una única tasa de salarios ni de ganancias, por lo que vamos a sustituir en (72b) las siguientes ecuaciones:

(73) $$\hat{w} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i w_i \, (1+g_i)}{\left(\sum_{i=1}^{m} l_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{m} (1+g_i)\right)}$$

(74) $$\hat{g} = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} g_i$$

Ambas, (73) y (74), sustituidas en (73), dan la fórmula que define en este modelo la frontera salario-ganancia a partir de ***n*** tasas de salarios y ***n*** tasas de ganancias:

(75) $$\boxed{\hat{w} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij}\left(R_j - g_j\right)}{n\left(1+\hat{g}\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right)}}$$

y ahora sí podemos asegurar que hay una relación decreciente entre salarios y ganancias con tal de que el numerador sea mayor que cero, es decir, que:

(76) $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} R_j > \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} g_j$$

Pero vamos a ir más lejos, porque ahora sustituiremos los $\boldsymbol{R}_j$ (tasas máximas de ganancias de cada sector j) por un ***R*** único como:

(76) $$\hat{R} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} R_j}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij}}$$

y como además el denominador de (76) vale uno por (71), queda:

(77) $$\boxed{\hat{w} = \frac{\hat{R} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} g_j}{n\left(1+\hat{g}\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right)} = \frac{\hat{R} - pXGI}{n(1+\hat{g})LI}}$$

Comparando esta expresión[49] con la obtenida en el modelo anterior (68) para el valor de los salarios respecto a las ganancias se puede observar dos avances y un retroceso: 1) no hemos tenido que invertir ninguna matriz, por lo que no tenemos que conjeturar acerca del comportamiento económico de los actores para conjurar los peligros de valores negativos en los precios o salarios; 2) queda más claro aún la relación inversa entre salarios y ganancias, en una relación monótona decreciente con tal de que el denominador de (77) no se haga negativo o cero: 3) esta tercera diferencia va en contra de (77): aquí los salarios dependen, además, del conjunto de precios, cosa que no ocurría en (68). Para solventar el problema hay que partir de que los precios están dados, es decir, la relación entre salarios y ganancias es estable con precios dados. Como dice el refrán, no hay bien que por mal no venga (y al revés).

Alguien podría estar tentado en considerar al ***R*** único como igual a la razón-patrón srafiana de la producción simple. Puede coincidir o estar muy cerca ambas, pero hay que recordar que aquella razón-patrón srafiana tenía su razón de ser al no depender de los precios. Significaba 2 cosas simultáneamente: la tasa de beneficio máxima (y única) y la razón (única) entre la producción neta y los medios empleados en un sistema

[49] Como se ve, se da en forma ordinaria y en forma matricial.

reducido de la economía. Aquí, la razón ***R*** significa *sólo* la tasa máxima de ganancia de cada sector ***j***. Sin embargo, sí se puede conjeturar que ambas estarán muy cerca.

Interesante en este modelo son los puntos de corte de las variables en los ejes de ordenadas y de abcisas. Veamos:

(78) $$para \;\; \hat{g} = 0 \;\; y \;\; g_i = 0 \;\; \forall i = 1 \;\; a \;\; n \;\; \Rightarrow \;\; \hat{w} = \frac{\hat{R}}{n\sum_{i=1}^{n} l_i}$$

(79) $$para \;\; \hat{w} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \hat{R} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} g_j$$

Lo notable de estos puntos es que el corte del eje de ordenadas (salarios igual cero) depende sólo de la razón-media de beneficios ($\hat{g}$), del número de medios usados (***n***) y de los valores-trabajo (***L***), y no de los precios ni de la matriz de requerimientos (***A***) o de sus componentes (***Y***,***X***). Podemos concluir que la “cuerda” o función que desciende en (78) hasta el punto de corte de abcisas (79), está anclada en un sólo punto en el eje de ordenadas (vertical); a diferencia de lo anterior, el punto de corte en el eje de abcisas depende de los precios ($\boldsymbol{p}_i$), de los medios de producción ($\boldsymbol{x}_{ij}$) y de las tasas de ganancia por sector o mercancía ($\boldsymbol{g}_j$), por lo que puede haber múltiples puntos de corte en el eje de abcisas (horizontal).

c) <u>Frontera salario-ganancia en producción conjunta generalizada</u>.

En este modelo vamos a completar la máxima generalización posible: ***m*** bienes finales, ***ñ*** medios de producción, ***n*** sectores, ***n*** tasas de salarios y ***n*** tasas de ganancia. La función que define el sistema es como sigue:

(80) $$\underset{1xm}{p}\underset{mxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W} + \underset{1xm}{p}\underset{mx\tilde{n}}{M}\underset{\tilde{n}xn}{X}\right] \times \left(1 + \underset{nxn}{G}\right)$$

y la que nos da el numerario que nos interesa en este caso va a ser:

(81) $$pYI - pMXI = 1$$

La matriz ***M*** es sólo un instrumento auxiliar en la que cada uno de sus elementos ($\boldsymbol{m}_{ij}$) indica el medio de producción (***ñ***) del que procede cada bien final (***m***). Después de sustituciones elementales entre (80) y (81) y post-multiplicando el resultado por el vector vertical de unos ***I***, queda:

(82) $$LW(1+G)I = 1 - PMXGI$$

(82b) $$\sum_{i=1}^{n} l_i w_i \left(1 + g_i\right) = 1 - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\tilde{n}}\sum_{k=1}^{n} p_i x_{ij} m_{jk} g_k$$

haremos lo mismo que con el modelo anterior y calculamos el tipo de salario medio ($\hat{w}$) y el de ganancia media ($\hat{g}$) y queda:

(83) $$\hat{w} = \frac{1 - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{ñ}\sum_{k=1}^{n} p_i m_{ij} x_{jk} g_k}{n\left(1+\hat{g}\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right)} = \frac{1 - pMXGI}{n(1+\hat{g})LI}$$

La diferencia con lo anterior es que en este modelo no hemos empleado las razones máximas de beneficio $\boldsymbol{R}_i$ por cada sector. También es evidente que la relación entre el salario medio y las ganancias (media y de cada sector) es decreciente, donde se pueden hacer las mismas consideraciones generales respecto al comportamiento de la función que ya se han hecho. Resulta curioso que la forma más generalizada de la frontera salario-ganancia es la más sencilla formalmente. Aquí, ni hemos empleado ningún ***R*** como se ha dicho, ni hemos invertido ninguna matriz. Es verdad que esta frontera depende de los precios que, en todo momento, son de equilibrio, por lo que si los consideramos dados, la forma de ajuste ante un movimiento de las tasas de ganancia sectoriales es un *deslizamiento* de los salarios en dirección contraria. Ante cualquier variación de los precios se va a producir un movimiento de *traslación* de la frontera w-g, al igual que si se mueven algunos de los componentes de la matriz auxiliar, ***M**,* o de los medios de producción, ***X**,* o de los inputs de trabajo, ***L***. También es evidente que, si consideramos como variables los precios y los salarios y, en cambio, todas las demás variables dadas, los salarios se moverán en dirección contraria a los precios. Todo lo anterior siempre que el numerador de (83) sea positivo, es decir que:

(84) $$pMXGI < 1 = pYI - pMXI$$

que es lo mismo que decir que:

(85) $$pYI > pMX(1+G)I$$

cosa natural, salvo que consideremos que los salarios sean cero y que estos estén integrados juntos con los medios de producción (***X***) al igual que el hierro, la cebada o las grúas[50]. En cuanto a los puntos de corte, son aún más sencillos:

(86) $$para\ \ \hat{g}=0\ \ y\ \ g_i = 0\ \ \forall i = 1\ \ a\ \ n\ \ \Rightarrow\ \ \hat{w} = \frac{1}{n\sum_{i=1}^{n} l_i}$$

(87) $$para\ \ \hat{w}=0\ \ \Rightarrow\ \ \hat{R} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{ñ}\sum_{k=1}^{n} p_i m_{ij} x_{jk}}$$

[50] Cosa que se considera de forma didáctica cuando se estudia el modelo de Leontief cerrado, es decir, sin excedente. El propio Sraffa lo considera en su obra en el primer capítulo.

El punto de corte de ordenadas (86) es evidente simplemente dando el valor cero a las ganancias (tanto la media como las sectoriales) en (83). En cambio, (87) exige alguna explicación adicional porque lo que se ha hecho es calcular un tipo único de ganancia máxima $\hat{R}$ tal que cumpla que:

$$(88) \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{ñ}\sum_{k=1}^{n} p_i m_{ij} x_{jk} g_k = \hat{R} \times \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{ñ}\sum_{k=1}^{n} p_i m_{ij} x_{jk}$$

y que dando el valor cero a la tasa media de los salarios en (83) y reemplazando (88) en el numerador, queda (87).

Apéndice IV

Si la producción es simple, se tiene la ecuación $YQ = (1+R)XQ$, donde ***Y*** es la matriz *diagonal* de bienes finales, donde ***R*** es la razón-patrón srafiana y (*1*+*R*) es el autovalor Perrón-Froebenius (el más alto de todos en valor absoluto) siempre que la matriz de medios de producción ***X*** la sustituyamos por *AY*, siendo ***A*** la matriz de requerimientos con las siguientes características: ha de ser mayor que cero, irreductible y productiva (*Y*>*AY*). Con ello se garantiza un conjunto de multiplicadores ***Q*** todos positivos.

Si estamos en la producción conjunta srafiana (o no esrafiana), entonces la matriz ***Y*** no es diagonal, sino que tiene (o puede tener) **n**x**n** elementos distintos de cero. Con ello la matriz $A = XY^{-1}$ no puede garantizarse que cumpla los 3 requisitos anteriores. Eso implica que, aún cuando sea positivo el producto *YQ*, lo sea todos y cada uno de sus multiplicadores $\left(\Sigma_{i=1}^{i=n}\Sigma_{j=1}^{j=n} y_{ij} q_j = (1+R)\Sigma_{i=1}^{i=n}\Sigma_{j=1}^{j=n} x_{ij} q_j\right)$. Y si esto no se cumple, no se puede asegurar que todos los multiplicadores sean positivos (teorema P-F). Y si se calculan los autovalores y autovectores por la izquierda con la ecuación $pY=(1+R)pX$, lo que no se puede asegurar es que todos los precios sean positivos.

Bibliografía

Afriat, S.: “Sraffa´s Prices”, Universitá degli Studi di Siena, quaderni 474. www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf

Ahijado, M.: “Distribucción, precios de producción y crecimiento”, 1982, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces.

Caballero, A. y Lluch, E.: “Sraffa en España”, Investigaciones Económicas (2ª época, vol. X, n.º 2), 1986.

Dobb, M.: “Teoría del valor y de la distribución desde Adam Smith, edit. Siglo XXI editores.

Dobb, M.: “The Sraffa system and the critique of neoclassical theory of distribution”, 1970.

Estrin, S. y Laidler, D: “Introduction microeconomics”.

Fiorito, Alejandro: “La implosión de la economía neoclásica”. Está en la red: www.geocities.com/aportexxi/sraffa12.pdf

Foncerrada, Luis Antonio: “Sraffa y Böhm-Bawerk”. Está en la red: http://www.economia.unam.mx/secss/docs/tesisfe/FoncerradaPLA/tesis.pdf

Garegnani, P.: “El capital en la teoría de la distribución”, 1982, ed. Oikos-Tau (“*Il capitale nelle teorie delladistribuzone*”, 1982)

Gehrke, Ch.y Kurz, D.: “Sraffa on von Bortkiewicz”. Está en la red: http://www.newschool.edu/cepa/events/papers/050509_Bortkiewicz.pdf

Harcourt, G.C.: “Teoría del capital” (*Some Cambridge controversies in the theory of capital, 1975*), apéndice al cap. 4, 1975, edit. Oikos-tau.

Heahtfield, D. F.: “Productions funtions”.

Marx, Carlos: “El método en la Economía Política”, 1974, Ediciones Grijalbo, S.A.

Marx, Carlos: “El Capital”, en el FCE, traducción de Wenceslao Roces.

Meade, J.: “A neo Classical Theory of Economic Growth”, 1961.

Meek, R.: “Mr. Sraffa´s Rehabilitationof Classical Economics”, 1961

Mora Plaza, A.: “Aspectos de la economía de Sraffa”, revista: Nómadas, n. 23, U. Complutense de Madrid, enlace: http://www.ucm.es/info/nomadas/23/antoniomora.pdf

Morhisima, M.: “La teoría económica de Marx” (*Marx´s Economics, 1973*), 1977, pág. 15, edit. Tecnos.

Moseley, F.: “El método lógico y el problema de la transformación”. http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm

Murga, Gustavo: “Piero Sraffa”. http://marxismo.cl/portal/index.php?option=com_content&task=view&id=100&Itemid=1

Nuti, D.: “Capitalism, Socialism and sleady growth”, 1970.

Okishio, N.: “A mathematical note on marxian theorems”, 1963.

Pasinetti. L.: “Critical of the neoclassical theory of growth and distribution”. Está en la red: http://www.unicatt.it/docenti/pasinetti/pdf_files/Treccani.pdf

Pasinetti, L.: “Structural Change and Economic Growth: a theoretical essay on the dynamics of Wealth of Nations”, 1981, Cambridge University Press.

Pasinetti, L.: “Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth”, 1961/2.

Pasinetti, L.: “Switches of technique and the rate of return in Capital Theory”, 1969.

Pasinetti, L.: “Crecimiento económico y distribucción de la renta” (“*Growth and Income Distribution*”, 1974), 1978, Alianza Editorial.

Pasinetti, L.: “Lecciones de teoría de la producción” (“Lezioni di teoria della produzioni”, 1975), 1983, FCE.

Peris i Ferrando, J.E: “Análisis de la resolubilidad de modelos lineales de producción conjunta”, 1987, en internet: http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/3829/1/Peris%20Ferrando,%20Josep.pdf

Potier, J.P.: “Piero Sraffa”, 1994, edicions Alfons Magnànim.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Robinson, J.: “Ensayos críticos”, 1984, Ediciones Orbis.

Samuelson, Paul: “Understanding the Marxian notion of Exploitation”, 1971.

Sargent, T.J.: “Teoría macroeconómica” (*Macroeconomic Theory, 1979*), 1988, Antoni Bosch editor.

Schumpeter, J. A.: “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analisis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Steedman, I.: “Marx, Sraffa y el problema de la transformación” (*Marx after Sraffa, 1977*), 1985, F.C.E.

Sraffa, Piero: “Producción de mercancías por medio de mercancías” (*Production of commodities by means commodities, 1960*), 1975.

Schumpeter, J. A.: “Historia del Análisis Económico” (*History of Economic Analisis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Segura, J.: “Análisis microeconómico”, pág. 88, 2004, Alianza editorial Tecnos.

Solow, R.: “The interest rate and transition between techniques”, 1967.

Sraffa, Piero: “Producción de mercancías por medio de mercancías” (*Production of commodities by means commodities, 1960*), 1975, Oikos-Tau.

Ricardo, D.: “Principios de Economía Política y Tributación” (*On the Principles of Political Economy and Taxation,*), 1973, F.C.E.

Vegara, J. M.: “Economía política y modelos multisectoriales”,1979, edit. Tecnos.

Varios,: “Matemáticas avanzadas aplicadas a la Economía”, UNED, 2001.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231