SRAFFA: LÓGICA ECONÓMICA Y MATEMÁTICAS

Antonio Mora Plaza
Economista, Madrid

http://dx.doi.org/10.5209/rev_NOMA.2012.v36.n4.42311

Resumen.- Este artículo trata de demostrar que hay dos caminos en el uso de las matemáticas en la historia del análisis económico: uno es el camino de Ricardo y Marshal, para quienes la matemática es sólo una guía para evitar el error de la lógica económica en su camino desde las hipótesis a las conclusiones; el segundo camino es el de Quesnay y los fisiócratas, el de Marx, Walras, Leontief, para quienes la realidad es el todo –remedando a Hegel- y los modelos económicos deber ser una imagen, aunque borrosa, de la realidad. Sraffa abre un nuevo método, trayendo al análisis económico lo mejor de ambos métodos.

Palabras clave.- *Sraffa, matemáticas, método*

Sraffa: Logical economic and mathematics

Abstract.- This article try to demonstrate that there is two ways in the use of mathematics in the history of economic analysis: the first is by the way of Ricardo and Marshall, who for the mathematics is only a guide to avoid the error in the logical economic from the hypothesis to the conclusions; the second is the way of Quesnay (the physiocrats), Marx, Walras, Leontief, who for the reality is the all (in the all is the truth, Hegel *dixit*) and the economic models they must to be an image, maybe vague, but as picture of the all. Sraffa open a new method, bringing to economic analysis the better from both.

Keywords.- *Sraffa, mathematics, method*

Jel: B51

La manera de afrontar Piero Sraffa la parte matemática de su obra *Producción de mercancías por medio de mercancías* merecería una introducción general sobre el papel de las matemáticas en las ciencias sociales o, al menos, en el subconjunto de ese conocimiento que es la Economía. Pero eso daría para mucho y mucha extensión y esa no es la intención. Pero al menos hay algún aspecto que no se puede obviar. Nadie discute la importancia de las matemáticas en las ciencias físicas o, como se las llamaba en tiempos de Galileo y Newton, filosofía natural (*Principios de filosofía natural*, Newton; *Diálogo de las dos Ciencias*, Galileo). En cambio, a veces se pone en entredicho la oportunidad o no de la mal llamada *Ciencias Exactas* en España -hasta hace poco- en la construcción de las ciencias sociales. Descarto las razones interesadas derivadas de los que no quieren o no saben matemáticas y sólo buscan justificarse. Decía lo de lo inoportuno e inexacto –valga la paradoja- de llamar ciencias exactas a las matemáticas porque estas no son una ciencia, aunque lo fuera para los griegos de los tiempos de Euclides y a pesar del uso de principios físicos en Arquímedes para determinadas demostraciones geométricas (por ejemplo, principio de la palanca para el cálculo de los volúmenes). Lo de exacto[1] lo dejo porque se aparta del tema demasiado. En general, las matemáticas son dos cosas a la vez y complementarias: un conjunto de construcciones lógicas y un lenguaje. No se pretende reducir las matemáticas a la mera lógica porque eso lo han intentado grandes mentes como Frege y B. Russell y fracasaron; además los teoremas de incompletitud de Gödel sirven indirectamente para asentar como errónea tal pretensión. Pero tampoco se puede obviar a Frege y a Russell porque sus intentos de fundamentar las matemática sobre bases lógicas no han sido estériles. Reducidas a su función en cualquier forma de conocimiento las matemáticas pueden servir o no para acompañar aquél si ese conocimiento cumple tres principios o requisitos: 1) si puede reducirse a conjunto de entes abstractos que interrelacionan y que llamamos modelos; 2) si al menos parte de esas interrelaciones lo son de causa y efecto; 3) si se cumplen los principios de universalidad y necesidad de la Ciencia. Por ejemplo, ni en la Psicología, ni en la Historia –salvo datos históricos-, ni en la Ética, ni en la Estética, no parece que tenga que decir nada las matemáticas. En todas ellas fallan algunos de los tres principios anteriores o los tres. Así, en la Psicología y en la Historia sería útil el segundo principio (relaciones de causas y efecto), pero no el primero (reducción a entes abstractos); en la Estética ninguno de los dos, salvo una posible Historia de las ideas estéticas y en la Ética aún menos, porque esta materia no nos habla de lo que pasa sino de lo que debiera pasar (de cómo debemos comportarnos). Las ciencias sociales como la sociología o la economía parecen cumplir el segundo principio, a regañadientes el primero, pero con enormes dificultades el tercero, es decir, el principio de universalidad y necesidad. Así, en Física la ley de la gravedad es universal porque afecta a todos los entes que tienen masa y porque es inevitable su acción cuando hay dos masas (los *graves* de Newton) en presencia. Además esa acción se extiende de forma ilimitada. Otro ejemplo es el de la relatividad, donde su segundo principio (el primero es el principio galileano de relatividad del movimiento según el marco de referencia) es el de la constancia de la velocidad de la luz. En el electromagnetismo la idea de acción por medio del *campo* eléctrico descubierto -¿o creado?- por Faraday y matematizado por Maxwell resulta insoslayable, necesario y universal. En Economía, *prima facie*, no parece que se hayan descubiertos leyes que podamos asegurar su universalidad, incluso su necesidad. Adam Smith creyó encontrar un principio de egoísmo (buscando el interés particular se consigue el general), pero no está tan claro, porque no es universal (se enfrenta a él el altruismo) y porque menos seguro es –yo creo que está absolutamente equivocado- su consecuencia, es decir, que se consiga con ello el interés general, como estamos viendo, por ejemplo, en la crisis actual, donde el egoísmo de los especuladores del ladrillo antes y de los llamados “mercados financieros” ahora nos han llevado a la crisis y a la recesión. Otra ley curiosa es la de Gresham (la

[1] También por la enorme ambigüedad que entraña la palabra exacto, y más aún aplicada a las Matemáticas, aunque pueda parecer lo contrario y paradójico. Por ejemplo, en la geometría euclidiana lo que parece entenderse como exacto –las figuras geométricas, sus propiedades, sus teoremas- no se define por su exactitud sino por su certeza o acierto lógico; en cambio, todo el desarrollo del cálculo infinitesimal desde Arquímedes se basa precisamente en la posibilidad de acotar la imprecisión, precisamente porque lo que entra en juego es *la medición* y no sólo la lógica. Recordemos, por ejemplo, que para B. Russell no existen los número reales, sino, en todo caso, aceptaba el lógico inglés que había sucesiones de números racionales que no tenían su límite en su mismo campo.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

moneda mala desplaza a la buena), que quizá no tenga mucha importancia pero que parece universal. Aunque no recuerdo el texto, Samuelson ha hecho un recuento de las supuestas leyes de la economía que pretendían su universalidad y han fallado unas tras otras. Pero el problema en la economía no es tanto encontrar esos principios o leyes universales y necesarias a partir de la psicología de los actores económicos sino que la mayor dificultad es la necesidad de ese reduccionismo para cumplir el primero de los principios, es decir, para llegar a modelizar e introducir con ello la cuchara de las matemáticas. La razón de ello es que son muchos los factores que intervienen en las decisiones de los individuos en el subconjunto de decisiones que podemos entender como económicas. Este es el gran problema de la econometría, donde el conjunto de las variable exógenas que intentan recoger precisamente las causas se estorban entre sí y dan lugar a malos estimadores, con intervalos de confianza demasiado amplios y sin que podamos valorar con seguridad el peso de cada variable en el efecto. Y el problema es que si no conseguimos meter esa cuchara de encadenamientos lógicos a partir de la realidad –o sus epifenómenos- corremos el serio peligro de equivocarnos en las conclusiones o de llegar sólo a la trivial conclusión (como ocurre en la teoría del equilibrio general) de que *todo depende de todo*. Sraffa, que era un genio, es para lo bueno y lo malo, un ejemplo, y ello no impidió que diera a la luz uno de los dos o tres textos más importantes de la historia del análisis económico.

Pensemos ahora lo que significa una ecuación y veamos las posibilidades que no da como descripción de una realidad y de supuestos de comportamiento. Una ecuación –y si se quiere, una función– lo que recoge es un conjunto de entes abstractos que llamamos variables, cuyos valores pueden tomar toda una infinidad de valores –salvo que los acotemos *ad hoc*–, pero con una excepción: que debemos rebajar esa infinidad en un grado que viene dado por el signo de la igualdad. Por ello, lo que determina la importancia de la ecuación no son los infinitos valores que pueden recoger las finitas variables, sino los conceptos que encierran o quieren representar de la realidad esas variables. Si tomamos una ecuación o función que pretenda ser representativa de la realidad, debería tomarse una ingente cantidad de variables en el ámbito de las *supuestas* ciencias sociales para representar esa realidad. Esta es la primera dificultad; la segunda es que se debe arriesgar la forma funcional de estas relaciones entre variables. En un sistema de ecuaciones ambas cosas se trastocan. Por un lado podemos poner sobre la mesa una cantidad casi ilimitada de valores de esas variables, lo cual añade una riqueza de *pixeles* descriptivos de esa realidad para formar esa fotografía borrosa nada comparable con lo que se puede hacer con el cálculo diferencial. Lo que se pierde es que, para poder trabajar con esa inmensidad de datos, estas relaciones son normalmente lineales. Estas dos últimas características es lo que recoge el álgebra matricial (o, por ejemplo, el cálculo tensorial en la matemática utilizada por la teoría de la relatividad). En las *supuestas* ciencias sociales debería renunciarse a las funciones únicas de algunas variables (tampoco pueden ser muchas), porque parece impensable que los comportamientos sociales puedan *embutirse* en una sola ecuación, por atinados que estemos eligiendo sus variables y sus relaciones funcionales. De ahí los fracasos prospectivos de la funciones de producción, (la Cobb-Douglas, por ejemplo) o de los modelos de crecimiento, tanto de la producción como los demográficos. No tengo duda de que ese retrato borroso de la realidad que puede ser el instrumento del álgebra matricial es mucho más rico y adecuado para tratar de describir someramente la realidad. Y sin embargo, la dificultad de acertar con las variables de representación son las mismas en ambos tipos de matemáticas, tanto en la del cálculo diferencial basado en la continuidad de las variables como con las matrices y su discontinuidad. No en vano uno de los grandes avances para el estudio, planificación y prospección de la economía son las tablas Input-Output de Leontief o la programación lineal aplicada en la economía soviética por Kantarovitch, y en otros aspectos por Koopmans y Dantzig.

Creo que se podría distinguir dos corrientes en el uso de las matemáticas por parte de los economistas. Una primera –primera además en el tiempo- es la aportada por Quesnay y los fisiócratas, seguida mucho más tarde por Marx, Walras, Leontief. En esta se parte del principio hegeliano de que la verdad es el todo (o en el todo está la verdad) y sus construcciones son omnicomprensivas porque intentan abarcar toda la realidad y explicarla. O al menos una fotografía borrosa de la realidad, pero de toda. La otra manera de utilizarla es como lo hacen o puede hacerse a partir de los textos de Ricardo y/o Marshall, donde las matemáticas son un instrumento para explicar ciertos fenómenos entendidos como económicos y evitar el yerro lógico. La diferencia con lo anterior es notable, porque aquí falla el principio de universalidad y se rehúye a explicar toda la realidad. La cosa se concentra, bien en el comercio (costes comparativos), en la renta de la tierra, en los mercados y/o en las empresas (Marshall, *caeteris paribus*). Por este camino se llega a *la caja de herramientas* de Joan Robinson, que es como negar la posibilidad de la ciencia en materia de lo que suele entenderse por Economía (incluso con la reduccionista definición de Lionel Robbins[2]). La teoría dominante de la economía o, mejor dicho, tanto el objeto de estudio en las cosas entendidas por económicas como el uso del instrumental ha seguido el legado de Marshall, con la excepción del análisis de Leontief y de Walras (anterior a Marshall). ¿Y dónde queda ubicada la matemática de Sraffa? Pues aquí viene una de sus genialidades, porque Sraffa está en ambas. El italiano parte también de toda la realidad -al igual que Walras- en su capítulo I de *Producción de …*; luego amplia al estudio de toda la realidad con excedente, a la producción conjunta, al capital fijo, al trabajo fechado, y así sigue hasta su último capítulo con los productos que se auto-reproducen (apéndice B de *Producción de*…). Pero Sraffa, influido quizá por la lógica de Ricardo, pero considerando que la prueba de la bondad de una teoría es cuando se explica el todo (a diferencia de Marshall y su análisis parcial), busca y encuentra un camino intermedio: parte de los datos de la realidad –de toda, aunque realidad borrosa- representada por ***n***x***n*** medios, ***n*** productos, ***n*** inputs de trabajo, una tasa de salario y una tasa de ganancia para encontrar una de las grandes abstracciones de la historia del análisis económico como es *la mercancía-patrón*. Con ello también y como subproducto *la razón-patrón*. Este es uno de los grandes atractivos de *Producción de* …: la manera original de proceder de Sraffa en el uso de las matemáticas. No es que Sraffa tuviera tal propósito, pero es el resultado en su obra. Él puso todo su empeño en sustituir la lógica matemática de su modelo por las explicaciones económicas

[2] La economía es la ciencia que analiza el comportamiento humano como una relación entre fines dados y medios escasos que tienen usos alternativos.

para evitar, creo yo, reducir su teoría y su *preludio a la teoría económica* de la época a un mero modelo matemático a lo Von Neumann, por ejemplo, o a un modelo alternativo de equilibrio general análogo al de Walras, con otro instrumental matemático, pero sin más pena que gloria. Es verdad que al final Sraffa no ha pasado a los manuales, pero por otros motivos, no por falta de méritos intelectuales.

Sraffa ya explicaba en sus artículos de 1925 y 1926 –especialmente el que atañe a los rendimientos en régimen de competencia– cómo para determinar los precios "*tenemos que abordar la vieja y ya casi anticuada teoría que hace depender el valor únicamente del costo de producción*". Y más tarde ya expresa reiteradamente en *Producción de…* la importancia que tiene en la formación de los precios, no lo que entendemos por coste de producción directo –concepto ausente en el libro-, sino las distintas proporciones entre trabajo y medios de producción y la composición y variedad de estos medios de producción; y no sólo de la empresa, industria o sector que produce el bien o servicio (mercancía en Sraffa), sino la importancia de esas proporciones de las empresas, industrias, sectores que indirectamente actúan como proveedoras de las primeras, y así sucesivamente. La economía neoclásica, perdido el horizonte de los fisiócratas, pierde a su vez estas nociones. Al menos hasta Walras, que intenta una teoría del todo con la intención buscar un ansiado equilibrio que nos lleve al mejor de los mundos posibles, utilizando métodos de optimización que intentan dibujar supuestos comportamientos socioeconómicos. El instrumento de Walras será el cálculo diferencial, que para eso era ingeniero. Pero es Alfred Marshall el que con sus *Principios de Economía* lleva el análisis económico sólo –o prácticamente– a la empresa, al mercado, al equilibrio parcial y con la cláusula *caeteris paribus* como instrumento, y la economía deja de estudiarse como un todo, tal como vislumbró Sraffa en la segunda década del siglo XX y como concluyó Joan Robinson –quizá sin darse cuenta– con *la caja de herramientas*. Sraffa, lo mismo que Von Neumann primero y Leontief después, vuelven a retomar la economía como un todo y, tanto el ruso como el italiano, no consideran necesario expresar aquélla como un proceso continuo. Ambas cosas –discontinuidad y estudio de la totalidad– abocaban al instrumento necesario para abordar sus creaciones intelectuales: el álgebra matricial. No es la primera vez que un mismo objeto se abordaba con instrumentos formales tan diferentes. Quizá el caso más relevante sea en la historia de la Ciencia el de la mecánica cuántica, con Schrödinger y Heisenberg llegando a los mismos resultados a partir, el primero con la ecuación de onda describiendo lo que pasa en el micromundo, el segundo presentando los efectos de esa mecánica mediante matrices, pero renunciado a cualquier relato descriptivo de lo que pasa en el átomo.

Antes de entrar en el uso que hace Sraffa de las matemáticas y los problemas que abordó con ellas y –sobre todo- sin ellas, se puede decir algo de su peculiar utilización. Por supuesto que es el álgebra el instrumental casi único, quizá con dos posibles excepciones: la optimización que lleva a cabo en el capítulo correspondiente a la *reducción del capital a trabajo* fechado para calcular la fecha (el tiempo) que da el máximo beneficio y en el capítulo del *capital fijo* que emplea las matemáticas financieras para calcular la amortización (anualización) correspondiente a las mercancías pluarianuales. Lo llamativo de Sraffa es que vista su obra en su complejidad parece imposible que pudiera llegar a las conclusiones que llega en los diferentes capítulos sin emplear el famoso teorema de Perron-Frobenius en ningún momento a pesar de que lo conocía[3] –sabemos que lo conocía por los esfuerzos de sus amigos matemáticos Besicovitch y Ramsey para tal fin–. Parecería, en principio, que habría dos caminos para abordar la parte matemática presente en Producción de –sea explícita o implícita-: una, utilizar siempre que sea necesario el teorema y subsanar con ello las insuficiencias y/o deficiencias del texto de Sraffa; dos, completar, como lo han hecho economistas posteriores como Schefold, Kurz, Lippi, Salvadori, las pruebas sin el teorema mediante algoritmos que lleven a tal fin. Al proceder así podemos decir dos cosas: la primera que, al no emplear el teorema, Sraffa *sólo* nos puede dar o bien las condiciones *necesarias*, o bien *las suficientes,* y a veces ninguna de las; la segunda, que todas las pruebas e inventos algorítmicos que llevan a las condiciones suficientes son, en el fondo, una versión particular del teorema de Perron-frobenius, por más alejadas que parezcan aquéllas de éste. Y no puede ser de otra forma porque el teorema es la versión para funciones discretas de los teoremas del punto fijo de Brower y de Kakutani que nos dan precisamente una solución final de equilibrio. Consciente de ello –esa es mi impresión– Sraffa suele completar *la parte suficiente* de las pruebas suponiendo comportamientos económicos que evitarían soluciones absurdas por parte de los agentes económicos (precios negativos o infinitos, por ejemplo). Un capítulo donde se puede comprobar y discutir lo anterior es el mencionado sobre la reducción del capital a trabajo fechado, donde los precios dependen de la suma capitalizada de las matrices de requerimientos que recogen los efectos directos e indirectos del trabajo en la formación aquellos. La discusión gira –como veremos– sobre la convergencia o no de la serie (progresión geométrica), convergencia que depende de la productividad que recoge la matriz de requerimientos y la tasa de ganancia empleada. La ventaja de emplear algoritmos es que pueden ambos razonamientos, el matemático y el económico, ir en paralelo, *pari passu*, y permitir una mejor visualización del aspecto económico, frente a la aplicación del teorema, que no lo permite. Así, por ejemplo, cuando Sraffa emplea el "*mínimo valor posible de R*"[4] (de la razón-patrón) es fácil comprender que todos los precios sean positivos, puesto que la tasa de ganancia exigida es la que corresponde al excedente menor de todos los existentes (uno por mercancía). De esta manera tenemos una razón suficiente, pero en este caso no es simultáneamente condición necesaria, porque esta viene dada por el teorema de Perrón-Frobenius. Además, se puede demostrar (véase aquí el apéndice sobre las tres tasas máximas de ganancia) que, en general, la tasa máxima de ganancia, la razón-patrón y esta tasa correspondiente al menor de los excedentes no tienen por qué coincidir. En cualquier caso, estas insuficiencias o deficiencias no empeñan para nada la genial obra del turinés, que ha puesto los pilares de una nueva teoría económica, una alternativa al marginalismo y sus colaterales y derivados (teoría del capital, equilibrio general competitivo, óptimos paretianos, etc.). Para completar y subsanar sus deficiencias hay economistas y economistas-matemáticos con talento suficiente como los

[3] Sabemos que lo conocía por los esfuerzos de su amigo matemático Besicovitch para tal fin.
[4] Pág. 79 de *PMPM.*

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

mencionados y otros como Pasinetti, Garegnani, Schefold, Steedman, Afriat, etc.

A pesar de todas las deficiencias anunciadas, la ventaja del proceder de Sraffa es que inaugura una nueva forma de abordar la economía y un nuevo uso del instrumental matemático. Con Adam Smith, por ejemplo, los precios vienen determinados por las sumas de las rentas de los factores (salarios, ganancias, rentas) que se determinan autónomamente; con Ricardo se determinan primero los salarios, las rentas de la tierra y el precio final, siendo las ganancias la variable dependiente a determinar que se obtiene por diferencia; en el marginalismo dependen las rentas del valor des supuestas productividades marginales y los precios de los supuestos costes marginales; en el marxismo de su teoría del valor-trabajo, de la diferenciación entre el valor del trabajo y el valor de *la fuerza* del trabajo para pasar al problema de la transformación y llegar a los precios; en Sraffa, a diferencia de lo anterior donde todas las variables monetarias (al menos) están determinadas de una u otra manera, la relación entre salarios y ganancias queda indeterminada. Una misma ecuación como la de la reproducción simple con salarios *post-factum* $\boldsymbol{PY}=\boldsymbol{wL}+(\mathbf{1}+\mathbf{r})\boldsymbol{PX}$ (donde $\boldsymbol{P}$ es un vector de precios, $\boldsymbol{Y}$ una matriz diagonal de productos finales, $\boldsymbol{w}$ la tasa de salarios, $\boldsymbol{L}$ un vector de inputs de trabajo, $\boldsymbol{r}$ la tasa de ganancia y $\boldsymbol{X}$ la matriz cuadrada de medios de producción) sirve para caracterizar ¡realidades diferentes!, diferentes relaciones entre salarios y ganancias. Nada nos dice de cómo se forman los salarios y las ganancias, pero nos señala la dependencia de ambas rentas y acotan su suma, que es el excedente. El sistema *en libertad acotada* de Sraffa va a permitir estudiar el capital como trabajo fechado y/o agregado como período medio de producción (capital fijo), las mercancías que se auto-reproducen, la demanda efectiva de Keynes sobre una base sólida *esrafiana*, la teoría de la reproducción y acumulación de Marx, lanzar una teoría del comercio internacional distinta a la de Ricardo, exponer una teoría del equilibrio distinta a la *walrasiana* y posteriores (Debreu, Arrow), una teoría de la negociación de los salarios a partir de la función frontera salario-ganancia, un esbozo de una teoría de la inflación no monetaria a partir de los efectos sobre los precios de una aumento de las tasas de ganancias cercanas a la tasa máxima, etc. Son sólo algunos ejemplos que economistas posteriores han desarrollado y que yo mismo lo he hecho en *Descifrando a Sraffa* de forma entre audaz y temeraria, pero intentando ser original. En Sraffa, a diferencia de los modelos marginalistas o marxistas, la matemática es un instrumento que por sí sólo no nos devela la realidad, no nos la explica suficientemente, pero es, cambio, un camaleón que se adapta al medio; su función es servir de basamento para nuevos modelos explicativos desarrollados de forma integrada con el/los modelos *esrafianos*. Es verdad que esto no estaba en la intención de Sraffa ni en la de los *esrafianos* (si es que quedan), pero esta es una posibilidad abierta y creo que extraordinariamente fructífera. No por ello se cae en una especie de relativismo, donde Sraffa sirviera para dotar de base sólida a cualquier teoría y/o escuela económica. Sraffa es, por ejemplo, incompatible con el marginalismo en general y, más en concreto, con la teoría del capital neoclásica. Teoría que se sigue explicando a pesar de su incoherencia y de su nula capacidad explicativa, pero este es otro tema. Con Sraffa –y apuesto que con Marx también– surge una visión del análisis económico donde hay que operar desde diferentes niveles de abstracción, donde se puede construir modelos de un nivel de abstracción elevado para y concretando otros modelos que, sin dejar de serlo, se acerquen y reflejan mejor la realidad. Marx diría, siguiendo a Hegel, *elevarse* de los abstracto a lo concreto. La ventaja de Sraffa es que nos da el basamento de todo ello porque parte de tres hipótesis y/o principios que parecen inexcusables: el grado de libertad entre salarios y ganancias, la formación de los precios a partir de un margen sobre los costes y el capital como trabajo fechado. A partir de esto pueden venir Keynes, Kalecki, Marx y hasta Ricardo en retrospección. A partir de Sraffa y su visión del excedente se puede reconstruir la teoría del excedente y, desde la teoría del excedente, abordar los problemas y algunas (de forma selectiva) de las teorías explicativas desarrolladas hasta nuestros días.

Sin más dilación vamos a ver ahora algunos aspectos del uso de esas matemáticas según la lógica expositiva de *Producción de mercancías por medio de mercancías* y no según el orden de sus descubrimientos, porque sabemos que ambos no fueron en paralelo, cosa que normalmente ocurre y de lo que ya advirtió Kuhn al distinguir entre la lógica del descubrimiento y la lógica de la exposición en la historia de la ciencia, entre la filogénesis y la ontogénesis de la lógica científica. Dicho de otra forma, vamos a ver la ontogénesis del uso expositivo del instrumento lógico y no la filogénesis de su invención. Para este fin han aparecido otros textos[5]. No obstante y como siempre ocurre, no hay mejor forma de escudriñar la ontogénesis que pasear intelectualmente por la filogénesis, ver los avances y retrocesos del autor, sus dudas, sus consultas a –en este caso- sus amigos matemáticos y cómo antepuso siempre su intuición y el criterio económico a la mera y fría precisión matemática. Sraffa antepuso siempre el caballo de la lógica económica al carro de la lógica formal y por eso, a pesar de algunos errores, llegó tan lejos.

A) En el primer capítulo del libro –*producción de subsistencia*- ya varias veces mencionado (en adelante *PMPM*), Sraffa parte de un modelo de dos sectores que produce cada uno dos mercancías a partir de las mismas dos mercancías, hierro y trigo. En su modelo todo el trigo producido se utiliza como medio de producción para sí mismo –para su propio sector- y para el otro sector, que es el hierro, y que hace lo propio con su producto. Más simplicidad no puede darse en un modelo que, a pesar de ello, abarca toda la realidad y en un ciclo completo: lo que se produce en un período se consume en el siguiente para producir lo mismo. Las matemáticas adecuadas al efecto es el álgebra matricial. La razón de ello es que este instrumento cumple tres requisitos que le son exigido al modelo de Sraffa: 1) que la realidad es el todo; 2) que lo significativo del modelo es su discontinuidad, el empleo de cantidades

[5] *Besicovitch, Sraffa and the existence de la Standard commodity,* N. Salvadori*,* 2010. http://host.uniroma3.it/eventi/sraffaconference2010/abstracts/pp_salvadori.pdf
Sraffa on Bortkiewicz. Reconstructing the Classical Theory ov Value and Distribution, 2006. https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxiaWJsaW90ZWNhZ2x8Z3g6MzNkZjM3MzFlZTBmZDdmNg
Sraffa and the mathematicians: Frank Ramsey and Alister Watson, Kurz y Salvadori.
On the collaboratin between Sraffa and Besicovitcht: The proof of gradiente, Kurz y Salvadori, en la obra colectiva *Sraffa: on an alternative economics*, 2008, edit Palgrave MacMillan.
Sraffa 1926 and Sraffa 1960: an attempt to bridge the gap, Sergio Nisticó, ídem anterior.

discretas; 3) que el álgebra matricial permite permite la resolución simultánea de variables muy adecuado a los modelos que intentan reflejar una realidad donde, o no existen las relaciones causa y efecto, o donde sólo están claras las relaciones pero sin asimetría causal. Se comienzan con lo que hay en período y se acaba el mismo utilizando lo producido como medio en el siguiente ciclo. No es necesario establecer una función concreta de producción (teoría del capital). Ello le lleva a dejar en el lector que suponga rendimientos constantes o no. Sraffa dice que no lo supone. Con ello acaba la discusión, porque dos no discuten si uno no quiere. Keynes le llevaría la contraria. Sraffa tiene razón, pero sólo hasta el capítulo de reducción del capital a trabajo fechado; después la tiene Keynes. En el mismo capítulo Sraffa hace un esfuerzo y lleva la economía a… tres sectores; más tarde a ***n*** sectores. Supone además que el trabajo y su remuneración entra en pie de igualdad que el trigo, el hierro. En esta generalización, Sraffa trabaja con una matriz ***X*** de ***n***x***n*** medios de producción y una matriz ***Y*** diagonal ***n***x***n*** pero sólo –al ser diagonal- de ***n*** productos finales. Aquí no hay funciones continuas como en Walras, ni en la producción, ni en la demanda. Tampoco hay procesos de optimización. Sraffa ha elegido el camino de su construcción económica: a) partir de toda la realidad, b) obviar cualquier función continua que relacione medios con productos, c) reducir el capital a trabajo fechado, d) considerar que los precios se forman con un margen sobre el valor de los medios de producción, pero excluidos los gastos salariales (salarios *post-factum*, ricardianos). Y en cuanto a las matemáticas, pues no hay otra: el álgebra matricial y con la ayuda de los matemáticos que aparecen en su prefacio en nota de agradecimiento: A. S. Besicovitch, Frank Ramsey y Alister Watson. Hasta entonces no había empleado las matemáticas, pero conocía las financieras por haber trabajado en el Banco de Italia y preparado su trabajo *The Bank Crisis in Italy.* A Keynes le impresionó y se lo llevó a Cambridge. Ahora se enfrentará a problemas de análisis económicos para los que su intuición y genio estaban preparados, pero no así su formación matemática. En este mismo capítulo Sraffa pone los precios y construye ya el modelo de subsistencia:

(a1) $$\begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & y_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

Y ahora se enfrenta con el mismo problema que Walras: con el recuento de ecuaciones e incógnitas. En principio parece que hay ***n*** ecuaciones y ***n*** incógnitas, pero eso es sólo la apariencia, porque sólo hay ***n*-1** ecuaciones linealmente independientes dado que en un estado de auto-reemplazamiento "*cualquiera de las ecuaciones puede inferirse de las demás*"[6] debido a que tenemos la ecuación global ***PY*I**=***PX*I**; y también tenemos ***n*-1** precios, puesto que uno de ellos –en este sistema de producción simple puede ser cualquiera– se puede tomar como numerario, que es lo mismo que decir que las ***n*** ecuaciones de (a1) se dividen por un precio. Además, al ser un sistema de auto-reemplazamiento, ocurre que para todas las mercancías, la suma de los medios de producción empleados de cada mercancía es exactamente igual al

[6] Pág. 19 de *PMPM.*

producto final de esa mercancía, es decir, que se cumple que ***Y***=***X*I**. El resultado es que hay un solo vector de precios que cumple (a1), aunque Sraffa no demuestre que sea necesaria y estrictamente positivo y único[7].

B) En el capítulo II de su obra aborda Sraffa lo que el llama siguiendo a los clásicos *producción con excedente*. Aquí se produce más en cada sector (o proceso) de lo que necesita el conjunto de los sectores como medios de producción. Dicho de otra forma ***Y***>***X*I**, siendo **I** el vector vertical de unos ***n*x1**, **X** la matriz ***n*x*n*** de medios de producción donde cada elemento x_{ij} representa la cantidad del medio ***i*** procedente del sector ***j***; ***Y***, por su parte, es la matriz diagonal ***n*x*n***, donde cada elemento de la diagonal y_{ii} (el resto son cero) es el productos final del bien (o servicio) ***i*** producido en el sector ***i***. Dicho de otra forma, el ahora vector ***Y*** de productos finales da para reemplazar en el siguiente ciclo a todos los medios de producción ***X*I**. Sraffa no pone fechas en las variables físicas, pero podría hacerlo. Otra cosa son las fechas en los precios, porque sin éllas ello supone que, además de poder facilitar el reemplazo con excedente, es que estamos en una situación de equilibrio. Son dos cosas distintas, aunque Sraffa no lo resalta. El excedente se reparte entre salario y ganancias, pero de forma asimétrica, no como lo hace la teoría del capital vulgarizada (no la de Wicksell y Knight), donde la retribución de los factores es simétrica y da lugar a la formulación:

(b1) $$Q = \frac{\partial Q}{\partial T} \times T + \frac{\partial Q}{K} \times K$$

siendo ***Q*** el producto final, ***T*** el trabajo y ***K*** "el capital" neoclásico. En la formulación de Sraffa es:

(b2) $$PY = wL + (1+r)PX$$

donde ***w*** es la tasa de salarios y ***r*** es la tasa de ganancia. Antes de llegar a (b2) había planteado Sraffa un sistema como:

(b3) $$PY = (1+r)PX$$

donde los salarios no aparecen explícitos[8] porque entran en el sistema "*en pie de igualdad con el petróleo para las máquinas o los alimentos para el ganado*"[9]. Sraffa recuenta ahora y le sale ***n*** ecuaciones en (b2) y ***n*+2** variables: los ***n*** precios, más ***w*** más ***r***. Dos grados de libertad: un exceso. Entonces añade Sraffa la ecuación:

---

[7] Para ello es necesario el concurso de un teorema de Markov que dice que si la matriz **A** (que en este caso es **A**=**XY**$^{-1}$) es irreducible, en efecto el vector de precios de **P**=**PA** es único y estrictamente positivo. Véase el artículo de S.N Afriat *Sraffa´s Prices*, dentro del libro colectivto *Sraffa on an Alternative Economic*, 2008, edit. Palgrave MacMillan.

[8] Pág. 22 de *PMPM.*

[9] Pág*. 25 de PMPM.*

(b4) $$PYI - PXI = 1$$

que empleará como *numerario*. Aunque Sraffa no lo aclara, tomar en un sistema de ecuaciones un numerario consiste en dividir todas las ecuaciones (no todas las variables) por lo que se toma como numerario. En el caso de (b2) quedaría:

(b5) $$\frac{P}{PYI - PXI} = \frac{w}{PYI - PXI} \times L + (1+r) \times \frac{P}{PYI - PXI} \times X$$

Ahora habría que llamar a estos precios relativos y salario relativo de otra manera, pero no lo hacemos siguiendo a Sraffa y el uso habitual. A la postre se trata simplemente de un problema de nomenclatura –de grafía- que es válido siempre que no se olvide el cambio efectuado a las variables monetarias por (b4) en (b2).

Ahora hay ***n***+**1** ecuaciones entre (b2) y (b4) y las ***n***+**2** variables (***n*** precios, más una tasa de salario ***w***, más una tasa de ganancia ***g***. El resultado es un grado de libertad, justo lo que Sraffa buscaba para dejar fuera del sistema económico el reparto entre salarios y ganancias, de tal manera que el sistema determine *sólo* el monto del excedente. Ya nos olvidamos –se olvida Sraffa- de tomar un precio como numerario. No hay inconveniente, pero siempre que se sea consciente del cambio respecto al capítulo de la producción de subsistencia, donde uno de los precios *sí* se tomaba como numerario. También hace Sraffa que ***L*I**=**1**, pero esta expresión, a diferencia del numerario (b4), no incluye una variable monetaria y lo consideramos como un dato del sistema al igual que los productos finales ***Y*** y los medios ***X***. Sraffa tampoco la considera, porque de hacerlo tendríamos ***n***+**2** ecuaciones y las ***n***+**2** incógnitas mencionadas y se perdería el grado de libertad. En cambio sí habrá que tenerla en cuenta cuando lleguemos a la mercancía-patrón y la razón-patrón, porque habrá una incógnita más.

C) Entramos ahora en el misterio de *la mercancía-patrón y la razón-patrón*. Lo de misterio lo es por varios motivos que se verán. Desde el punto de vista de la economía y su lógica, la mercancía-patrón es una respuesta al problema que no solucionó Ricardo como es el de encontrar una "mercancía" cuya utilización como numerario no afectara ni a los precios relativos ni a la distribución de la renta. En realidad son dos problemas diferentes, aunque relacionados. Ricardo centró el problema en el primero y Sraffa en el segundo. Razona el italiano el por qué no puede ser una sola mercancía la que le corresponda ese honor; nos dice que, en cambio, que sí lo podría ser un conjunto de mercancías que cumpliera un requisito: que "*las diferentes mercancías estén representadas entre sus medios de producción totales en las mismas proporciones en que lo están entre sus productos*"[10]. En cuanto a que esa mercancía-patrón pudiera (hay que decir que debería) cambiar su dimensión en relación a los datos de la

[10] Pág. 38 de *PMPM.*

realidad Sraffa no lo explica. Y no lo hace porque ahora con el sólo razonamiento económico no lo puede explicar. En efecto, el intento de sustituir toda la lógica matemática de su modelo tiene sus límites y no todo se puede convertir en lógica económica. Ese factor de reducción tiene un motivo: se llama autovalor y Perron-Frobenius. Lo asombroso de esta parte del libro y buena parte de él es que Sraffa construye su modelo económico sin muchos errores sin mencionar y –aparentemente– sin emplear una sola vez el teorema, el cual es imprescindible para entender y demostrar la existencia de: 1) la mercancía-patrón, 2) la razón-patrón, 3) los multiplicadores *todos* positivos de la mercancía-patrón, 4) un vector de precios estrictamente positivo en la producción simple; 5) la coincidencia entre esta *razón-patrón* y la *tasa máxima de ganancia*. La habilidad de Sraffa para explicar la lógica económica de todo esto sin recurrir al teorema es extraordinaria y es lo que le da a *Producción de*… todo su encanto y la consideración de alternativa a los fundamentos del análisis económico, y no un mero modelo matemático con variables económicas. Y a pesar de lo anterior, Sraffa, tal como señala Marco Lippi[11], los resultados obtenidos son correctos. Se podría afirmar que, en general, sin Perron-Frobenius no se pueden obtener las condiciones suficientes allí donde es necesario su concurso, pero que en cambio Sraffa pone con acierto las condiciones necesarias. Hay, no obstante, dos puntos concretos donde Sraffa se pasa de frenada, porque se equivoca al menos en dos puntos importantes: 1) sin teorema no hay seguridad de un vector de precios *positivos* de equilibrio, 2) y sin teorema no hay seguridad de que la tasa de ganancia coincida con la razón-patrón. De lo primero fue consciente Sraffa; de lo segundo no estoy seguro. La mercancía patrón es el conjunto de valores[12] $\boldsymbol{Y}_{\&}=\boldsymbol{YQ}$, $\boldsymbol{X}_{\&}=\boldsymbol{XQ}$ y $\boldsymbol{L}_{\&}=\boldsymbol{LQ}=\mathbf{1}$, donde $\boldsymbol{Y}_{\&}$ es la matriz diagonal de los elementos de la mercancía-patrón, $\boldsymbol{X}_{\&}$ es la matriz de $\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{n}$ elementos de la mercancía de patrón de medios de producción y $\boldsymbol{L}_{\&}$ es el vector de inputs de trabajo cuyos elementos son los correspondientes a la mercancía-patrón. Claro que el problema es encontrar esos multiplicadores $\boldsymbol{Q}$ *todos positivos* que nos den los resultados anteriores. La solución viene por el sistema de ecuaciones:

(c1)
$$u\, y_1 q_1 = x_{11} q_1 + x_{12} q_2 + \Lambda\ + x_{1n} q_n$$
…………………………………………….
$$u\, y_n q_n = x_{n1} q_1 + x_{n2} q_2 + \Lambda\ + x_{nn} q_n$$
$$\sum_1^n l_j q_j = 1$$

El factor $\boldsymbol{u}$ es el la reducción –o no- de las dimensiones del sistema. En Sraffa aparece como gratuito y no tiene lógica económica, pero sí que la tiene desde el punto de vista matemático… para asegurar un vector de precios positivo $\boldsymbol{P}$

[11] “Formal proofs were insufficient by results obtained by process were correct”, *Some observations on Sraffa and matematical proofs with an appendix on Sraffa´s convergence algorhitm,* en *Sraffa or an Alternative Economics*, 2008, pág. 247, edit Palgrave MacMillan*.* Se refiere el autor a la prueba de la convergencia del capítulo sobre el trabajo fechado, pero el problema de la insuficiencia puede ser generalizado.
[12] Pág. 44 de PMPM.

en (b2) y un conjunto de multiplicadores $\boldsymbol{q}_j$ en (c1) también positivos. La razón de ello es que ambas propiedades se derivan de la aplicación del teorema de Perron-Frobenius[13]. Aquí es donde Sraffa, no es que ponga el carro de las matemáticas detrás de los caballos de la economía, es que deja el carro desenganchado. El sistema (c1) se sintetiza de la forma:

(c2) $$uYQ = XQ$$

(c3) $$LQ = 1$$

Por otro lado, si en (b2) hacemos cero los salarios sale:

(c4) $$PY = (1+R)PX$$

Y si pos-multiplicamos (c4) por la inversa de ***Y*** se obtiene:

(c5) $$P = (1+R)PA$$

siendo $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$. Y la (c5) cumple todos los requisitos para que se pueda aplicar el teorema de Perron-Frobenius: ***A*** es cuadrada por definición, no reducible por construcción y no negativa porque todos los elementos de ***X*** son positivos (no tiene sentido económico medios de producción negativos) y porque también todos los elementos de la diagonal principal de ***Y*** son positivos porque son el resultado de la inversa de ***Y*** (que son los inversos de los elementos de la matriz original ***Y***). Cumplidos todos estos requisitos, el teorema -entre otras cosas- nos asegura un vector de precios estrictamente positivo ***P*** y un autovalor positivo ***u*** (el mayor de todos los valores absolutos del resto de los autovalores) que es igual a $\boldsymbol{u}=\mathbf{1}/(\mathbf{1}+\boldsymbol{R})$. Igualmente asegura el teorema en (c2) un conjunto de multiplicadores estrictamente positivos si pre-multiplicamos la ecuación por el inverso de ***Y*** y por las mismas razones anteriores. Con ello obtendríamos el autovalor ***u***, y con ello obtenemos que lo que era hasta entonces sólo la tasa máxima de ganancia ***R*** se convierta en la razón-patrón mediante $\boldsymbol{R}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{u})/\boldsymbol{u}$. Este hecho tiene además importancia en el recuento de variables, porque si ***R*** fuera *sólo* la tasa máxima de ganancia tendríamos una variable más; en cambio, al ser además la razón-patrón obtenido a partir del autovalor, producto a su vez de las propiedades de ***X*** y de ***Y*** (***X*** positiva estrictamente, ***Y*** positiva también estrictamente y sólo diagonal), no hay una nueva variable, sino una constante que sólo cambiará si cambian ***Y*** y/o ***X***.

Sraffa no cuenta nada de esto. Ello es posible porque identifica la tasa máxima de ganancia que surge de hacer cero los salarios en (b2) con el cálculo de la razón-patrón en (c1). De ello fue advertido por Besicovitch pero parece que Sraffa hizo caso omiso, al menos en el momento expositivo de su trabajo. El problema ya se ha señalado: que con meros razonamientos económicos no se puede asegurar un vector de precios positivos en (c4).

[13] Puede verse el teorema en Pasinetti, *Lecciones de teoría de la producción*, edit. FCE, 1983 *(Lezioni di teoria delle Produzione*, 1981).

Del conjunto de las ecuaciones siguientes:

(b2) $$PY = wL + (1 + r)PX$$

(c4) $$PY = (1 + R)PX$$

(b4) $$PYI - PXI = 1$$

(c6) $$LI = 1$$

se obtiene la ecuación que relaciona la razón-patrón, la tasa de salarios y la tasa de ganancia:

(c7) $$r = (1 - w)R$$

¡y el sueño de Ricardo se ve cumplido, porque salarios y ganancias se relacionan sin intervenir los precios!

Y al final sale el recuento: tenemos ***n***+**2** ecuaciones linealmente independientes (las ***n*** ecuaciones de ***PY***=(**1**+***R***)***PX*** no lo son) y ***n***+**4** incógnitas (n precios más una tasa de salarios más una tasa de ganancia más la tasa máxima de ganancia ***R***). Si contemplamos lo anterior vemos que hay una ecuación y 3 incógnitas (***r***,***w***,***R***), por lo que aparentemente habría 2 grados de libertad. Sin embargo eso es sólo la apariencia, porque la tasa máxima de ganancia ***R*** es además, en este modelo de producción, la razón-patrón ***R***. Esta no es una variable monetaria al no ser *sólo* esta tasa máxima de ganancia, sino que al obtenerse de una propiedad de la matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$ a partir del teorema de Perron-Frobenius, se convierte en una variable que depende *sólo* de las variables físicas del sistema que ya hemos visto en (c1), es decir, que depende sólo de ***Y***, ***X***, ***L***, y, en este contexto, suponemos dados (constantes) los valores de estas variables (que no lo serán en otros supuestos). Dicho de otra forma, ***R*** no es una variable deducible del conjunto de las cuatro ecuaciones anteriores, por lo que la ecuación del reparto del excedente ***r***(**1-w**)***R*** sólo tiene dos variables. Formalmente hay que tenerla en cuenta para el recuento de los grados de libertad, pero desde el punto de vista de la lógica económica del modelo, ***R*** (tasa máxima y razón-patrón a la vez) es una constante mientras no movamos las constantes físicas mencionadas. Sraffa no advierte de este hecho en ningún momento dado que nunca hace explícito el teorema, aunque la lógica económica que emplea en algunos momentos –en otros no– obliga a su utilización.

En el capítulo V del libro se enfrasca Sraffa en demostrar el carácter único de la mercancía-patrón y de la razón-patrón. Como lectura económica es interesante ver los razonamientos económicos de Sraffa, pero a nosotros no nos interesa porque ya hemos demostrado que es único porque el teorema de Perron-Frobenius ya nos asegura un único autovalor que da un vector de precios positivos siempre que la matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$ sea estrictamente

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

positiva, cuadrada y no reducible[14]. Quizá lo más interesante del capítulo sea la nota a pie de página donde dice que "*Para que la prueba sea completa, es necesario mostrar que los **p** que representan precios de productos básicos no puedan hacer negativos haciéndose infinitos*"[15]. Obviamos el tema de la diferenciación entre productos básicos y no básicos porque ahora no tiene importancia, pero sí es de resaltar lo de los precios negativos. Con ello reconoce Sraffa que no puede asegurar con meros razonamientos económicos la obtención de un vector de precios positivos de equilibrio. Y no lo puede por lo que ya hemos visto reiteradamente: porque no emplea el dichoso teorema. Lo cual demuestra lo consciente que era Sraffa de las consecuencias expositivas de su teoría al no querer saber nada de los señores Perron y Frobenius.

Ya hemos visto que Sraffa comete el error de creer que en la producción simple la tasa de ganancia y la razón-patrón coinciden. Ahora en capítulo V dice que "*como consecuencia inmediata de lo anterior, puede demostrarse que el valor de **R** al que corresponden todos los precios positivos es el mínimo de todos los **k** posibles valores de **R***[16]". Otro error que resulta increíble. Sraffa sigue sin hacer caso a sus amigos matemáticos. Quizá la apertura de la correspondencia que ahora se abre de Sraffa puede aclarar si es que no se fiaba de sus amigos o es que no quería utilizar el teorema de Perron-Frobenius para evitar meter en su modelo algo que no podía explicar a base de meros razonamientos económicos. En todo caso Sraffa confunde la razón necesaria con la suficiente. Lo que dice es verdad que con ello asegura que todos los precios son positivos con tal que la tasa de ganancia sea menor o igual que el menor de los excedentes relativos. Sin embargo, el teorema pone la condición necesaria para calcular una razón mayor que el menor de los excedentes relativos para obtener un vector de precios positivos de equilibrio en la producción simple. La explicación no puede ser otra que los precios de los productos finales no sólo dependen de los precios de los medios que emplea un sector (o proceso) directamente, sino que dependen también de los precios de los sectores indirectos en una marcha hacia atrás en la cadena de requerimientos. La suma de estos efectos nos da la suma de las matrices $\boldsymbol{A}$ tal como $\mathbf{I}+(\mathbf{1}+\boldsymbol{g})\boldsymbol{A}+(\mathbf{1}+\boldsymbol{g})^2\boldsymbol{A}^2+(\mathbf{1}+\boldsymbol{g})^3\boldsymbol{A}^3+\ \ldots\ +(\mathbf{1}+\boldsymbol{g})^{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}$ que surge de la ecuación $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{w}(\mathbf{1}+\boldsymbol{g})\boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}^{-1}(\mathbf{I}-(\mathbf{1}+\boldsymbol{g})\boldsymbol{A})^{-1}$ de determinación de los precios.

No debería haber duda de que Sraffa consiguió con la razón-patrón una medida invariante del valor, incluso aun cuando el no empleara el teorema de Perron-frobenius porque el error de creer que la tasa máxima de ganancia es automáticamente igual a la razón-patrón en la producción simple es fácilmente subsanable. Sin embargo, pasados 30 años de la publicación de *Producción de*… aún se pone en duda si el sistema-patrón (*Standard System*) tiene la

[14] No reducible significa que no puede convertirse en una matriz triangular por más cambios que hagamos entre filas y columnas. Si lo fuera, tampoco sería grave, porque se podría aplicar la versión débil del teorema, aunque ello tendría una consecuencia: ya no se podría asegurar que todos los precios **P** de equilibrio resultantes fueran positivos y podrían ser algunos cero (pero nunca negativos).

[15] Pág. 49 de *PMPM*.

[16] Pág. 51 de *PMPM.*

propiedad de la invarianza del valor en sí mismo[17]. Sraffa construye su mercancía-patrón porque "*la necesidad de tener que expresar el precio de una mercancía en términos de otra -que es elegida arbitrariamente como patrón- complica el estudio de los movimientos de precios que acompaña a una variación de la distribución*"[18]. Esta es la preocupación de Sraffa que vamos a suponer que es la misma preocupación que expone J. E. Woods en el texto mencionado. Hay que distinguir en general entre *sistema-patrón*, *mercancía-patrón* y *razón-patrón*, pero en el presente contexto vamos a suponer que identificamos las dos primeras a los efectos conceptuales para poder avanzar en la discusión sobre el tema. Hemos visto que la mercancía-patrón es una cesta de mercancías obtenidas a partir de los datos de la realidad, pero sometida a las ecuaciones:

(c8) $$uYQ = XQ$$

(c9) $$LQ = 1$$

donde ***Q*** es un vector columna de multiplicadores. Del conjunto de este sistema de ecuaciones se obtiene estos multiplicadores, de tal forma que la mercancía-patrón está formada por una cesta de mercancías tal como ***uYQ*** para los productos finales y ***XQ*** para los medios de producción. Sin embargo no tendría sentido decir si la mercancía-patrón es una medida invariante del valor puesto que eso sólo lo puede ser una constante (no una variable) obtenida, en todo caso, de esta mercancía-patrón. O si es una variable, que al menos no dependa de las variables monetarias del sistema, es decir, de los precios, salarios y ganancias (que sólo sobre estas tiene sentido hablar de "valor" en términos económicos). Si ahora pre-multiplicamos por la inversa de Y la ecuación matricial (c8) obtenemos:

(c10) $$uQ = Y^{-1}XQ$$

Ahora bien, $\boldsymbol{Y^{-1}X}$ es una matriz ***n***x***n*** (cuadrada) por construcción, no negativa porque ***Y*** hemos supuesto que es una matriz diagonal y ***X*** tiene positivos todos sus elementos puesto que no tiene sentido tener "menos i" mercancías. Por lo tanto en (c10) se puede aplicar el teorema de Perron-frobenius, el cual nos va a dar un conjunto de multiplicadores ***q*** todos positivos y –y esto es lo importante ahora– un autovalor ***u*** positivo (que es el mayor de todos los autovalores en términos absolutos posibles). Pasemos ahora a la ecuación:

(c11) $$\frac{1}{1+g_m} \times PY = PX$$

[17] "The Standard Industry is a surplus industry. So, in this case, the Standard System does not appear to posses the invariance property claimed for it by Sraffa", *The Production of Commodities. An Introduction on Sraffa*, J.E. Woods, 1990, edt. MacMillan, pág. 69.
[18] Pág. 37 de *PMPM*.

que ha surgido de hacer cero la tasa de salarios en la en la ecuación ***PY***=***wL***+(**1**+***g***)***PX*** de definición del sistema. Si ahora pre-multiplicamos (c10) por ***PY*** y pos-multiplicamos (c11) por ***Q*** queda:

(c12) $$uPY(Q) = PY(Y^{-1}XQ)$$

(c13) $$(\frac{1}{1+g_m} \times PY)Q = (PX)Q$$

Y ambas ecuaciones son la misma ecuación si hacemos que ***u***=**1**/(**1**+$\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$). Pero hemos obtenido antes el autovalor ***u*** como una medida de dependiente *sólo* de los valores ***Y***, ***X***, ***L***, es decir, *sólo* de las variables físicas del sistema, por lo que ahora la tasa de ganancia máxima que pasa a depender *sólo* del autovalor ***u*** al ser $\boldsymbol{g}_{\mathrm{m}}$=(**1**-***u***)/***u***, esta tasa máxima depende *sólo* también de las variables físicas del sistema y que llamamos razón-patrón ***R***:

(c14) $$\boxed{R = g_m = \frac{1-u}{u} = f(Y, X, L)}$$

La conclusión es doble: 1) la razón-patrón, como índice o subproducto de la mercancía-patrón *sí* es una medida invariante del valor porque sólo depende las variables *no monetarias* del sistema-patrón; 2) que eso sólo es posible demostrarlo en este contexto (producción simple) si se puede aplicar el teorema de Perron-Frobenius, lo cual es posible porque ***X*** es una matriz positiva y la inversa de ***Y*** lo es también, puesto que es una matriz diagonal (sus elementos son los inversos de la matriz original)

Recientemente han aparecido varios artículos que tratan de buscar métodos algorítmicos que permitan llegar a las conclusiones de Sraffa (precios positivos con supuestos iniciales sobre tasa de salarios y/o excedente positivo) a partir de una lectura literal[19] de su libro. El tema tiene un enorme interés para el desarrollo formal de la obra de Sraffa y para aclarar también el por qué Sraffa hizo caso omiso a muchas de las soluciones o cuestiones que le planteaban sus amigos matemáticos. Quizá lo tiene menos para un futuro desarrollo de los aspectos económicos de la obra del italiano.

D) Nos adentramos en una de los objetivos de Sraffa: la crítica de la teoría del capital neoclásica. Para él el capital es mero *trabajo fechado*. Si no fuera porque el marginalismo no dice eso parecería un hecho tan obvio que no merecería más discusión. Y por increíble que parezca la visión neoclásica vulgar de considerar que "el capital" es un factor más, que tiene vida propia y que

[19] *Besicovtch, Srafffa and the existence of the Standard Commodity*, S. Neri, 2010, para este capítulo V del libro de Sraffa; *Some observations on Sraffa and mathematical proof with an appendix on Sraffa´s convergence algorithm*, M. Lippi, 2008, para el capítulo VI sobre la reducción del capital a trabajo fechado.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

merece una retribución de la misma manera que el trabajo se ha impuesto en los textos que estudian los cientos de miles de estudiantes de economía del planeta. Con sus propios criterios, podríamos decir que en pocos recursos referidos al conocimiento y su práctica puede haber peor asignación. Sraffa escribe una ecuación incompleta. Aquí ponemos la correcta:

(d1
$$P_t = wLY^{-1}\left[1+(1+r)A+\ldots+(1+r)^{t-i-1}A^{t-i-1}\right]+(1+r)^i P_{t-i}A^i$$

(d2)
$$P_t = \frac{(R-r)}{R}\times LY^{-1}\left[1+(1+r)A+\ldots+(1+r)^{t-i-1}A^{t-i-1}\right]+(1+r)^i P_{t-i}A^i$$

Esta ecuación surge de reemplazar los precios en una ecuación con los precios desfasados en el tiempo como la que sigue:

(d3)
$$P = wLY^{-1} + (1+r)PXY^{-1}$$

que surge de pos-multiplicar por $\boldsymbol{Y}^{-1}$ la ecuación (b2) de definición del sistema y llamando $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{XY}^{-1}$. Sraffa omite en su formulación el resto $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{i}\boldsymbol{P}_{t-i}\boldsymbol{A}^{i}$, aunque lo explica y lo justifica. Hasta ahí nada que objetar. Sin embargo, a continuación Sraffa se olvida de la ecuación y entra en una discusión a partir del término enésimo de la ecuación (d2)

(d4)
$$\frac{(R-r)}{R}\times(1+r)^n\times L_{an}$$

donde se puede entender que $\boldsymbol{L}_{an}=\boldsymbol{LY}^{-1}\boldsymbol{A}^{n}$. Entiende Sraffa -con buen criterio- que para entrar en una discusión de la relación entre precios, tasa de salario y tasa de ganancia a partir de la ecuación (d2) era mejor remitirse al término general de la ecuación y no presentar todo élla. Lo significativo de la relación entre el vector de precios (o de un precio cualquiera) y la tasa de ganancia $\boldsymbol{r}$ es que el efecto que tiene éste sobre el primero es variable debido a que el factor $(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{i}$ produce un aumento del precio ante un aumento de $\boldsymbol{r}$, pero ocurre lo contrario con el primer factor $(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})/\boldsymbol{R}$. El resultado lo expresa Sraffa con certeza cuando dice que "*Los términos del trabajo pueden ser considerados como los elementos constitutivos del precio de una mercancía cuya combinación en varias proporciones puede dar lugar, con la variación del tipo de beneficio, a complicados esquemas de movimientos de precios en varias alzas y bajas*"[20]. La lógica económica es casi evidente contemplando (d1) y (d2): un aumento de la tasa de ganancia (beneficios) tiende a aumentar los precios, pero dado que el excedente está limitado por las variables físicas $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ y estas se suponen que no varían, parte del reparto de la tarta ha de reflejarse en el otro componente de la misma que son los salarios. Y eso que no hay ninguna ecuación que refleje la demanda, porque entonces el efecto de contraposición sería aún más evidente. Para empezar la dependencia de la razón-patrón con

[20] Pág. 61 de *PMPM*.

la tasa de ganancia y de salarios ***w***=(***R***-***r***)/***R*** es debida a que toma como numerario el producto neto, es decir, ***PY*I-*PX*I=1**. Ahora bien, si en lugar de ese numerario hubiera hecho ***PX*I=1**, hubiera obtenido:

(d5) $$R = w + r$$

Y si ahora reemplazamos los salarios de (d5) en (d1) saldría:

(d6)
$$P_t = (R-r)\times LY^{-1}\left[1+(1+r)A+...+(1+r)^{t-i-1}A^{t-i-1}\right]+(1+r)^i P_{t-i}A^i$$

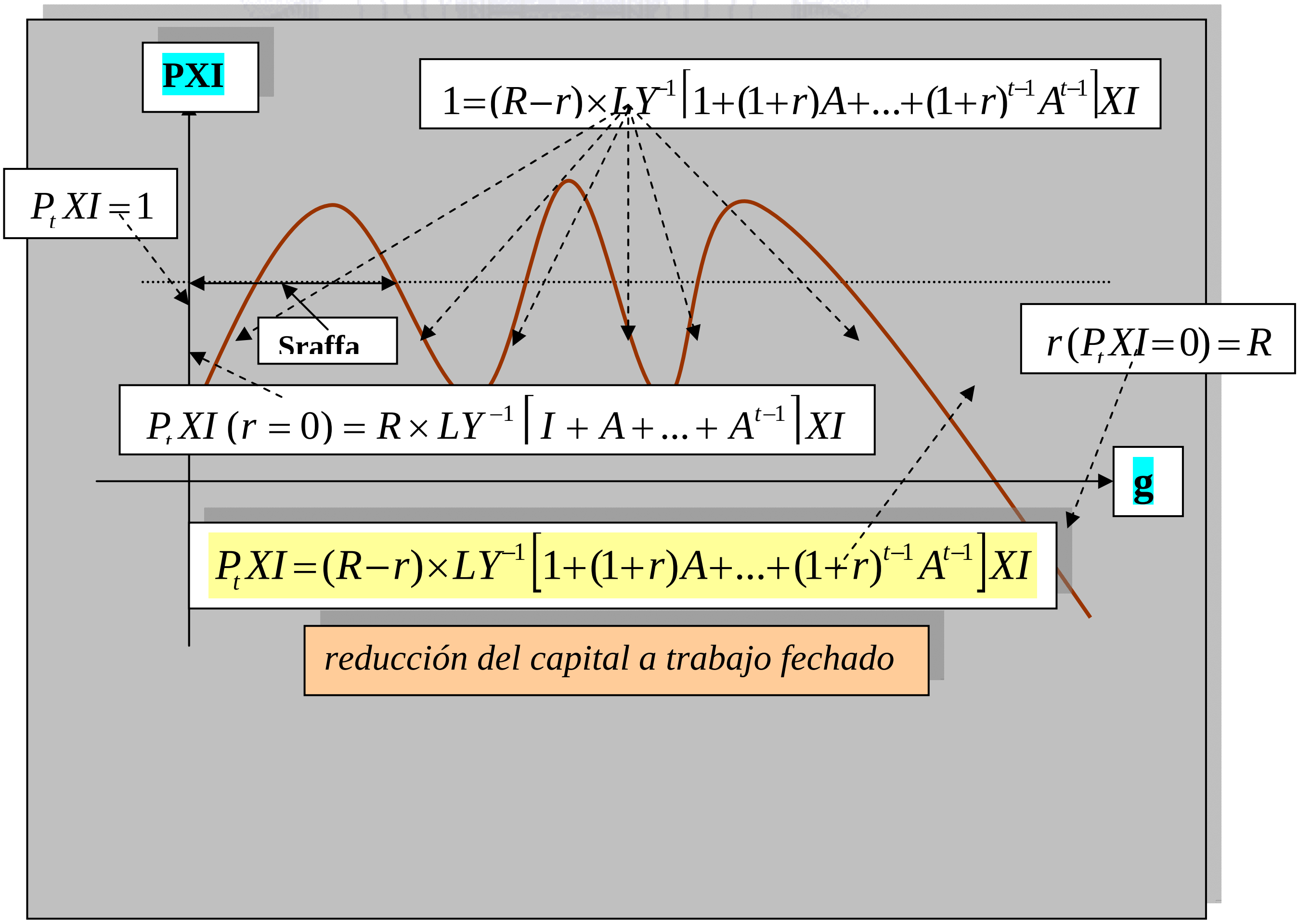
Ahora despreciamos el residuo queda y generalizamos a ***n*** períodos:

(d7) $$P_t = (R-r)\times LY^{-1}\left[1+(1+r)A+...+(1+r)^{t-1}A^{t-1}\right]$$

Y seguimos, porque pos-multiplicamos (d6) por ***X*I** y tomamos como numerario ***PX*I=1** y queda:

(d8) $$1 = (R-r)\times LY^{-1}\left[1+(1+r)A+...+(1+r)^{t-1}A^{t-1}\right]XI$$

que es un polinomio de grado ***n*** en ***r***, con ***n*** posibles[21] puntos de corte con la recta ***PX*I=1**.



(d9) $$P_t XI(r=0) = R \times LY^{-1}\left[1 + A + \ldots + A^{t-1}\right]$$

(d10) $$r\,(P_t XI = 0) = R$$

Comentábamos el gráfico de la pág. 63 que luego repite en otro capítulo de *PMPM* y en el que Sraffa coloca en el mismo eje tanto los precios ***P*** como la tasa de salario ***w***, lo cual resulta increíble puesto que se trata de dos variables diferentes. La conclusión a la que quiere llegar Sraffa aparece en la última página del epígrafe 49[22] cuando dice que "*si el salario se reduce en términos de cualquier mercancía (da igual que se trate de una mercancía que consiguientemente se elevará o descenderá respecto del patrón), el tipo de beneficio aumentará; para un aumento del salario sucederá lo contrario*". Sraffa llega a esa conclusión mediante razonamientos económicos, pero se puede acompañar del razonamiento formal que es la matemática. Traemos aquí a colación las ecuaciones (b2) y (c4):

(b2) $$PY = wL + (1+r)PX$$

(c4) $$PY = (1+R)PX$$

en la que la (b2) es la ecuación de definición del sistema de producción simple de Sraffa y la (c4) es la que resulta de hacer cero la tasa de salarios. Sin embargo aquí vamos a cambiar de numerario y tomamos ***PX*I** como tal, es decir:

(d11) $$PXI = 1$$

De (b2) y (c4) obtenemos:

(d12) $$P = \frac{w}{R-r} \times LX^{-1}$$

y que pos-multiplicando por XI y teniendo en cuenta (d12) sale:

(d13) $$1 = \frac{w}{R-r} \times LI$$

que despejado la tasa de ganancia queda:

(d14) $$\boxed{r = R - wLI}$$

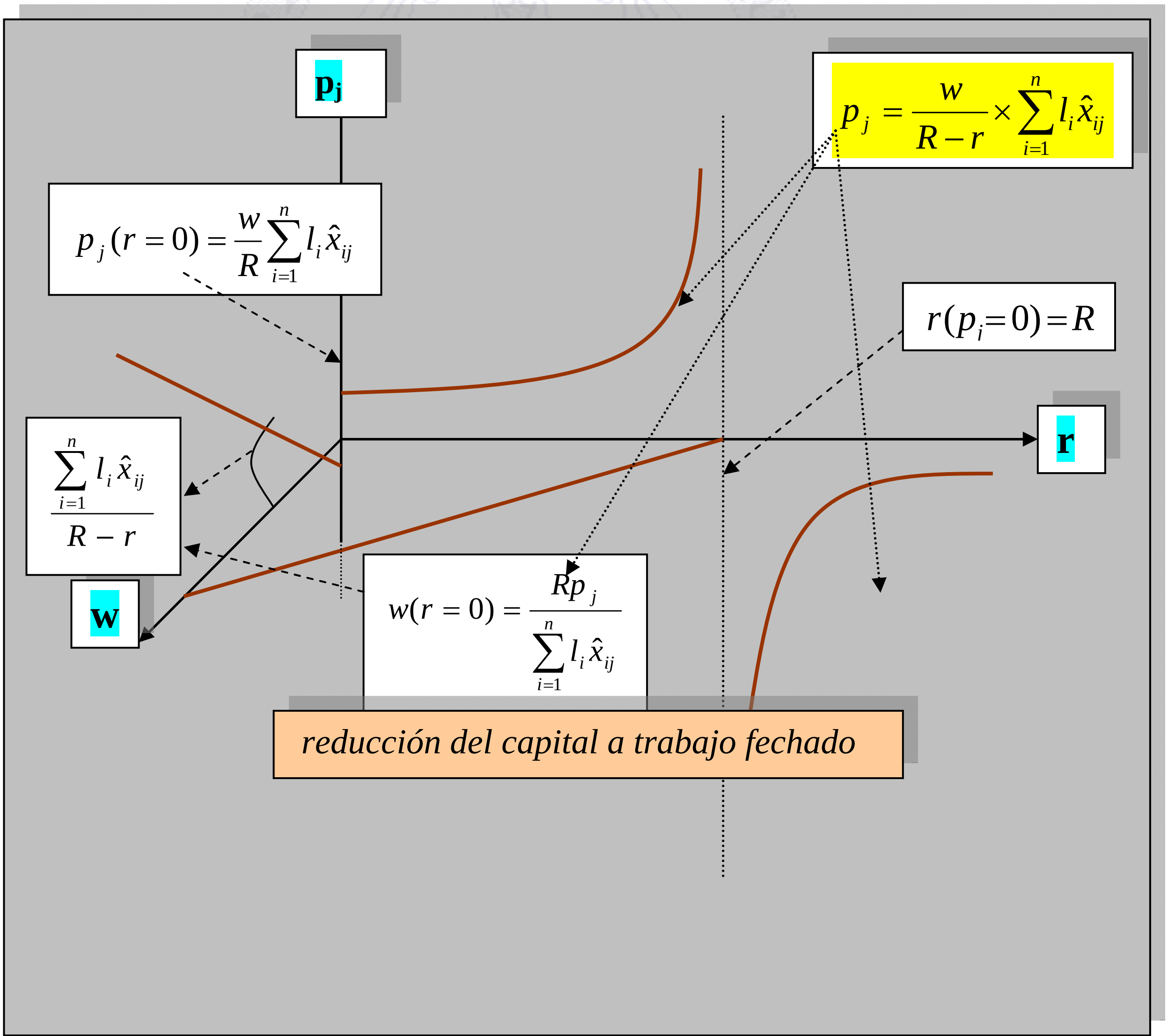
Y en efecto en (d14) se cumple lo que dice Sraffa porque si dividimos los dos términos de la ecuación entre un precio cualquiera tenemos:

[22] Pág. 64 de *PMPM.*

(d15) $$\boxed{\frac{r}{p_k} = \frac{R}{p_k} - \frac{w}{p_k} \times \sum_{i=1}^{n} l_i}$$

donde se comprueba la afirmación de Sraffa, porque la tasa de ganancia en términos de cualquier precio aumenta (disminuye) si la tasa de salario en términos del precio de esa misma mercancía disminuye (aumenta). Si Sraffa se refiriera, no a los precios como numerario, sino a las cantidades, el resultado sería el mismo.

El libro de Sraffa es una continua demoledora crítica de la teoría del capital neoclásica -incluso de la visión austríaca de "los períodos medios de producción" de la misma- y sus intentos de salvarla con los "*períodos medios de producción*"[23] o los de Samuelson con su "*función subrogada*"[24]. El gráfico anterior -que corresponde a la ecuación (d7) modificada- vemos que la relación de los precios (en ***PX*I**) no tiene una evolución monótona creciente respecto a los tipos de interés. En la (d7) la tasa de interés tiene diferentes valores para el mismo nivel de precios (***PX*I=1**, donde ***X*** es una matriz constante de medios).



[24] *Parable and Realism in Capital Theory: The surrogate Production Function*, 1982.

crucen de tal forma que $P_1 = P_2$, lo cual nos da una función polinómica de grado ***n*-1** tal como $L_1 Y_1^{-1}\left[I-(1+r)A_1\right]^{-1} = L_2 Y_2\left[I-(1+r)A_2\right]^{-1}$, donde pueden darse hasta ***n*-1** valores de ***r*** distintos de *retorno de las técnicas* para la misma tasa de salarios ***w*** (razón por la cual no está en la ecuación).

Damos arriba el gráfico correcto que Sraffa dibuja mal en la pág. 63 y que le lleva a decir que "*la línea del precio no puede cortar a la línea del salario más de una vez*", lo cual es un imposible lógico y económico porque ambas son dos variables distintas. El gráfico expresa la relación entre un precio cualquier respecto a la tasa de salario y a la tasa de ganancia según:

(d16)
$$p_j = \frac{w}{R-r} \times \sum_{i=1}^{n} l_i \hat{x}_{ij}$$

donde la variable ***x*** con sombrero es el elemento correspondiente a la inversa ***X***.

E) Quizá sea en el tema de *la producción conjunta* donde más se echa de menos el báculo de las matemáticas, quizá con la posible excepción del intento de demostración por parte de Sraffa de la unicidad de la razón-patrón. Este tipo de producción –que es la correspondiente al mundo real- se caracteriza porque una misma empresa (proceso) produce más de una mercancía y/o una misma mercancía puede ser producida por dos o más empresas (procesos). Sin embargo Sraffa intenta ir más allá y dice que "*una industria o proceso productivo queda caracterizado, no ya por la mercancía que produce, sino por las proporciones en que se utiliza y por las proporciones en que genera las diferentes mercancías*"[25]. En realidad, la ecuación de Sraffa de la producción simple (4) nos vale, pero con la notable diferencia de que ahora la matriz ***Y*** de productos finales no es simplemente una matriz diagonal de ***n*** elementos, sino una matriz cuadrada de ***n***x***n***, aunque no todos necesariamente positivos. La traemos a colación:

(e1)
$$PY = wL + (1+r)PX$$

La diferencia ahora es que cuando despejamos los precios en (e1) y obtenemos:

(e2)
$$P = wLY^{-1}\left[I-(1+r)A\right]^{-1}$$

en esta matriz de requerimientos $A = XY^{-1}$ ya no podemos asegurar que todos sus elementos sean positivos, porque tampoco lo podemos asegurar ahora de la inversa de ***Y*** al ser cuadrada no diagonal. Y con ello, tampoco tenemos asegurado un vector de precios resultante todos positivos. Ni siquiera que fuera

[25] Pág. 69 de *PMPM.*

como máximo alguno nulo. Tampoco los multiplicadores de ***A*** en el cálculo de los autovalores y autovectores. Ya no tenemos la inestimable ayuda de Perron-Frobenius. Por eso recurre Sraffa varias veces a lo largo del texto al sentido económico y dice que serán los propios empresarios los que desecharán las soluciones negativas en su gestión[26], lo cual me parece un criterio acertado. Sraffa explica todo esto con razonamientos económicos el capítulo VII de su libro y posteriores, y eso que ganamos todos los que entendemos que las matemáticas es un instrumento precioso, riguroso, que evita yerros lógicos, pero sólo un instrumento, al igual que el mejor de los Stradivarius no deja de ser una caja acústica de madera si no está en manos del artista que la toca.

La cosa se complica –creo que para bien– cuando a la producción conjunta la añadimos la diferenciación entre productos básicos y no básicos, siendo estos últimos los que nunca entran en la producción, ni directamente ni indirectamente. Sraffa da al menos dos definiciones de esta diferenciación entre bienes, pero creo que hay que quedarse con la expuesta. Si ello es así, ya no podemos asegurar que ***Y*** sea una matriz cuadrada porque en ella –en el modelo restrictivo de Sraffa de producción conjunta- el conjunto de los precios de productos básicos y no básicos puede ser mayor que el de sectores o procesos, con lo que en la ecuación (e1), ***Y*** tiene más filas que columnas, los precios son más que sectores o procesos y el resultado es una infinidad de soluciones posibles de (e1). La ecuación de producción conjunta *esrafiana* debería ser:

(e3) $$\underset{1xm}{P}\ \underset{mxn}{Y} = w \underset{1xn}{L} + (1+r)\underset{1xm}{P}\ \underset{mxn}{X}$$

donde ***m*** es mayor que ***n***. Una alternativa a la anterior si se quiere que la matriz ***X*** sea cuadrada es que los precios que pre-multiplican a ***X*** sean diferentes de los que pre-multiplican a ***Y***:

(e4) $$\underset{1xm}{P_y}\ \underset{mxn}{Y} = w \underset{1xn}{L} + (1+r)\underset{1xn}{P_x}\ \underset{nxn}{X}$$

Una generalización que no está en Sraffa y con salarios *pre-factum* de (e4) sería:

(e5) $$\underset{1xm}{P_y}\ \underset{mxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{L}\ \underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{P_x}\ \underset{nxn}{X}\right](I_d + \underset{nxn}{G})$$

siendo ***W*** y ***G*** dos matrices cuadradas, diagonales o no, e **I**$_d$ el vector diagonal de unos ***n***x***n***. También pueden separarse los bienes básicos de los no básicos mediante:

(e6) $$\underset{1xm}{P_N}\ \underset{mxn}{Y_N} + \underset{1xn}{P_t}\ \underset{nxn}{X} = \left[\underset{1xn}{L}\ \underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{P_{t-1}}\ \underset{nxn}{X}\right](I_d + \underset{nxn}{G})$$

[26] Pág. 68 de *PMPM.*

donde los productos no-básicos están representado por $\boldsymbol{Y}_N$ y por $\boldsymbol{P}_N$ sus precios, y donde seguimos manteniendo la diferencia de precios de la matriz ***X*** de medios cuando actúan en el período ***t*-1** que cuando actúan en el período ***t***. La cosa se puede aún generalizar más, porque también podemos hacer distintas la matriz de medios ***X*** y no sólo sus precios. Todo depende a dónde queramos llegar, pero a sabiendas que a más generalización menos capacidad explicativa y viceversa. Este es uno de los logros del modelo de Sraffa, fuera o consciente o no el economista italiano de ello.

Algunos críticos o epígonos de Sraffa –o simplemente estudiosos- como Schefold han puesto en duda la necesidad de esta diferenciación entre bienes básicos y no básicos. Sin entrar en ello, sí hay un aspecto interesante como resultado de esta diferenciación y es la afirmación de Sraffa de que los bienes básicos son determinantes en la formación de los precios, las tasas de salario y las tasas de ganancia, y los no básicos no. Nada que objetar a esta afirmación, porque el modelo matemático lo avala. Por ejemplo, si despejamos los precios conjuntos de la matriz de bienes básicos y no-básicos queda:

(e7) $$\underset{1xm}{P_y} = \left[w \underset{1xn}{L} + (1+r) \underset{1xn}{P_x} \underset{nxn}{X} \right] \underset{nxm}{Y^T} \left(\underset{mxn}{Y} \underset{nxm}{Y^T} \right)^{-1}$$

donde los precios de los productos no básicos (que están en $\boldsymbol{P}_y$ junto con los básicos) dependen ambos de los básicos $\boldsymbol{P}_x$. Otra cosa es la necesidad de que ***m*** sea menor que ***n*** para que la inversa que aparece en (32) tenga solución.

Una de las primeras consecuencias de la producción conjunta es que nos hemos quedado sin mercancía-patrón. En efecto, una condición necesaria de su existencia es la de que los mismos bienes que aparecen en el lado derecho de la ecuación (el lado de los medios) aparezcan en el lado izquierdo.

(e8) $$uYQ = XQ \quad \Rightarrow \quad uQ = Y^{-1}XQ$$

y el vector de precios por la izquierda:

(e9) $$PY = (1+R)PX \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+R} \times P = PXY^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+R} \times P = PA$$

donde ***A*** es la matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$, de la que ya hemos visto que no podemos garantizar la positividad de todos sus elementos (versión fuerte del teorema) o, al menos, la no negatividad (versión débil), porque tampoco se puede garantizar de la inversa de ***Y***.

Otra consecuencia originada por no poder emplear el teorema de los señores Perron y Frobenius es que ahora la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$ no coincide con la razón-patrón ***R***. Lo podemos comprobar con el siguiente sistema de ecuaciones:

(e10) $$P_N Y_N + PY = wL + (1+g)PX$$

(e11) $$P_N Y_N + PY = (1+g_m)PX$$

(e12) $$PY = (1+R)PX$$

(e13) $$PYI - PXI = 1$$

(e14) $$LI = 1$$

donde la (e10) es la ecuación de definición del sistema de producción conjunta; en la (e11) aparece la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_{m}$; ***R*** es la razón-patrón porque se ha obrado con tiento en (e10), de tal manera que la matriz de los productos básicos ***Y*** es diagonal y los precios ***P*** son los mismos que los que multiplican a los medios de producción ***X***. Pues bien, de las ecuaciones (e11) y (e12) sale:

(e15) $$P_N Y_N I = (g_m - R)PXI$$

(e15b) $$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_{Ni} y_{Nij} = (g_m - R) \times \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_k x_{kj}$$

Vemos en (e15) que para que el conjunto –en términos de valor– de los bienes básicos sea positivo ha de ocurrir que $\boldsymbol{g}_{m}$>***R***, es decir, que la tasa máxima de ganancia del sistema de producción conjunta de (e10) sea distinta de la razón-patrón del subsistema de (e12).

En el capítulo VII Sraffa hace todos los esfuerzos posibles para encontrar una mercancía-patrón y una razón-patrón para la producción conjunta y cree encontrarlo mediante cálculos sucesivos de diferentes mercancías-patrón y razones-patrón de tal manera que se tome "*el mínimo valor posibles de **R***"[27], obtenidos estos –se desprende de su razonamiento- "*si reconsideramos desde el punto de vista de sistemas simples*". Un conjunto de ecuaciones que recogieran el problema que plantea ahora Sraffa serían:

(e16) $$\underset{1xm}{P_N}\,\underset{mxn}{Y_N} + \underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{X_B} = w\,\underset{1xn}{L} + (1+g)\,\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{X}$$

(e17) $$\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{Z} = \underset{1xm}{P_N}\,\underset{mxn}{Y_N} + P\,\underset{nxn}{X_B} = w\,\underset{1xn}{L} + (1+g)\,\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{X}$$

La ecuación (e16) es la de una posible –pueden implementarse otras- ecuación de definición de un sistema con diferenciación entre productos ***m***x***n*** no-básicos $\boldsymbol{Y}_{N}$ y ***n***x***n*** básicos $\boldsymbol{X}_{B}$. La (e17) sería la equivalente a la (e16) pero adaptada para que pueda calcularse la mercancía-patrón y la razón-patrón ya que ***PZ***=***wL***+(**1**+***g***)***PX*** cumple los requisitos de la producción simple, con ***Z*** como matriz diagonal a determinar ***n***x***n***, con ***n*** elementos positivos –por lo que ahora

[27] Pág. 79 de *PMPM*.

se verá- en su diagonal principal. Del conjunto de ecuaciones (e16) y (e17) se elimina $\boldsymbol{wL}$+(**1**+$\boldsymbol{g}$)$\boldsymbol{PX}$ y se despeja el vector de precios $\boldsymbol{P}$ y se obtiene:

(e18) $$P = P_N Y(Z - X_B)^{-1}$$

siendo cada $\boldsymbol{p}_j$:

(e19) $$p_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} p_{Ni} y_{Nik} \tilde{n}_{kj} \quad \forall\ j = 1\ a\ n \quad con\ \ y_{ij} = 0\ \ si\ \ i <> k$$

siendo $\tilde{\boldsymbol{n}}_{kj}$ el elemento correspondiente a la inversa de ($\boldsymbol{Z}$-$\boldsymbol{X}_B$), es decir, $\tilde{\boldsymbol{N}}$=($\boldsymbol{Z}$-$\boldsymbol{X}_B$)$^{-1}$. En (e18) vemos que la condición *suficiente* para $\boldsymbol{p}_j$ sea mayor es que la suma $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} p_{Ni} y_{ik} u_{kj}$ sea mayor que cero, pero no es condición *necesaria* que cada $\boldsymbol{u}_{kj}$ sea mayor que cero, lo cual no está garantizado además porque son elementos de una matriz inversa. Si en (e17) hacemos cero la tasa de salarios se obtiene:

(e20) $$PZ = (1 + R)PX$$

donde $\boldsymbol{R}$=f($\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Z}$) sí es la razón patrón de (e20) –además de *la tasa máxima de ganancia*- porque tuvimos la precaución de que $\boldsymbol{Z}$ fuera diagonal y (e20) cumple los requisitos de la producción simple. Sólo hay que añadir a (e20) los numerarios $\boldsymbol{PZ}$**I**-$\boldsymbol{PX}$**I**=**1** y $\boldsymbol{L}$**I**=**1**. En definitiva, determinados los elementos de $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{R}$ es única porque depende de las matrices $\boldsymbol{Z}$ y $\boldsymbol{X}$ aplicando Perron-Frobenius al sistema $\boldsymbol{P}$=(**1**+$\boldsymbol{R}$)$\boldsymbol{PA}$, siendo $\boldsymbol{A}$=$\boldsymbol{XZ}^{-1}$. Creo que todo lo anterior puede adecuarse a lo que pretende Sraffa con el mínimo $\boldsymbol{R}$ de todos los posibles. Pero hay dos problemas: determinar $\boldsymbol{Z}$ y que sea independiente de los precios. De hecho existen infinitas matrices $\boldsymbol{Z}$ que cumplen (e17), con la única limitación que han de satisfacer la ecuación (e21) que surge de (e18) y (e20).

(e21) $$(1 + R)PX = P_N Y_N (Z - X_B)^{-1} Z$$

(e22)

$$\boxed{(1+R)\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_{ij} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n} p_{Nk}\, y_{Nku}\, \tilde{n}_{uv}\, z_{vj} \qquad \forall\, j=1\ a\ n \quad con \quad z_{vj}=0\ si\ v<>j}$$

donde $\tilde{\boldsymbol{n}}_{uv}$ son los elementos correspondientes a ($\boldsymbol{Z}$-$\boldsymbol{X}_B$)$^{-1}$. En el epígrafe (64) del libro[28] Sraffa explica un procedimiento para encontrar ese $\boldsymbol{R}$ mínimo por medio de la tasa de salarios $\boldsymbol{w}$ y su ecuación del reparto del excedente $\boldsymbol{r}$=$\boldsymbol{w}$(**1**-$\boldsymbol{R}$).

Aunque dé la impresión Sraffa de que no supiera el álgebra matricial, ello no es cierto. Toda la obra parece como si tuviera a la vista las ecuaciones de su sistema y sus posibilidades. Desde luego la ayuda de sus amigos

[28] Pág. 79 de *PMPM*.

matemáticos –que el agradece en el prólogo mencionándolos y agrandando el agradecimiento porque no menciona a ningún otro, ni siquiera economista- fue inmensa, especialmente en el tema de la mercancías-patrón y en el capital fijo. Sin embargo, a veces da la impresión de que desconfía tanto de éllas (las matemáticas) como de ellos, y ello le llevó a cometer errores. Ya hemos visto el de identificar tasa máxima de ganancia con razón-patrón en la producción simple. Ahora, en la conjunta, plantea la posibilidad de crear esa mercancía-patrón a base de "*eliminar completamente, mediante transformaciones lineales, las mercancías no-básicas del sistema, tanto del lado de los medios como de los productos*"[29]. En lenguaje matricial, lo que plantea Sraffa es reducir un sistema de ecuaciones a una matriz triangular, es decir, a una matriz de matrices, con matrices nulas por debajo de la diagonal principal. Con ello podríamos aplicar la versión débil del teorema de Perron-Frobenius a la matriz de requerimientos $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$ y obtener un vector de precios (y multiplicadores) *no negativos*. El problema es que ello no es siempre posible y no todas las matrices son reducibles. Una matriz reducida podría ser tal como:

(e23) $$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{con } \boldsymbol{A}_{21}=\boldsymbol{0}$$

donde $\boldsymbol{A}_{11}$ se supone cuadrada, irreducible y no negativa, por lo que se podría aplicar Perron-Frobenius a esta submatriz de $\boldsymbol{A}$. Pero cada elemento de $\boldsymbol{a}_{ij}$ de $\boldsymbol{A}_{21}$ representa el medio de producción $\boldsymbol{i}$ utilizado en producir una unidad del bien $\boldsymbol{j}$. Entonces, para las matrices triangulares (reducidas ya), eso supone que todos los $\boldsymbol{a}_{ij}$ tales que $\boldsymbol{i}>\boldsymbol{j}$ valen cero, lo que es tanto como decir que estamos en una economía donde hemos ordenado todos los sectores (sin excepción) de tal manera en la matriz $\boldsymbol{A}$ cuyo sector (el correspondiente al $\boldsymbol{i}$) es mayor que el correspondiente sector al $\boldsymbol{j}$, este sector $\boldsymbol{j}$ no ha utilizado (no ha comprado) nada del sector $\boldsymbol{i}$. Eso puede ocurrir con algunos sectores, pero no es probable que, mediante transformaciones lineales en la matriz $\boldsymbol{A}$ de requerimientos, se pueda encontrar una economía de $\boldsymbol{n}$ productos y $\boldsymbol{n}$ sectores que permita eso. Más sorprendente es lo de eliminar las mercancías no-básicas "*tanto del lado de los medios como de los productos*", cuando, por definición de mercancías no-básicas -que el propio Sraffa define- son aquellas que nunca entran como medio, por lo que no hay nada que eliminar.

Veamos otra forma de abordar el tema de la mercancía-patrón y de la razón-patrón para el caso de una economía de producción conjunta y diferenciada entre productos básicos y no básicos (que no es la misma cosa). Una ecuación que definiera este modelo sería:

(e24) $$\underset{1xm}{P_N}\,\underset{mxn}{Y_N}+\underset{1xn}{P_y}\,\underset{nxn}{Y}=(\underset{1xn}{L}\,\underset{nxn}{W}+\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{X})(I+\underset{nxn}{G})$$

Además de la generalización que hemos hecho respecto a (e16) en $\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{n}$ tasas de salarios $\boldsymbol{W}$ y en $\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{n}$ tasas de ganancia $\boldsymbol{G}$, lo distinto y significativo aquí es

[29] Pág. 77 de *PMPM*.

que los precios $\boldsymbol{P}_y$ de los productos ***Y*** que van a ser medios de producción en el ciclo siguiente ya son distintos de los precios ***P*** de los medios ***X*** que lo han sido en el período que estamos considerando. Para valorar si es posible construir la mercancía-patrón a partir de (e24) ha de medirse esta con la ecuación que surge de hacer cero la tasa (única) de salarios en la ecuación ***PY***=(**1**+***g***)(***wL***+***PX***), es decir, con:

(e25) $$PY = (1+R)PX$$

de la que surge la ecuación:

(e26) $$\frac{1}{1+R} \times P = PA$$ siendo $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{XY}^{-1}$

donde ya hemos dejado preparado (e25) para poder aplicar *Perron-Frobenius* y obtener así un vector ***P*** de precios estrictamente positivo porque suponemos que ***A*** es irreducible, además de ser cuadrada por construcción y positiva porque suponemos a su vez que ***Y*** es una matriz diagonal. Pues bien, si hacemos los salarios cero también en nuestra ecuación de definición del sistema (e24) queda:

(e28) $$P_N Y_N + P_y Y = PX(I + G_m)$$

donde ahora $\boldsymbol{G}_m$ sería la matriz de tasas de ganancia máximas. Si ahora comparamos (e28) que es una ecuación que intenta reflejar una realidad (aunque borrosa) con la ecuación (e25) que es una construcción meramente teórica que intenta describir una propiedad de esta construcción teórica, podemos establecer la igualdad:

(e29) $$(1+R)PX = PX(I + G_m)$$

eso nos lleva a que también tenemos que establecer la igualdad:

(e30) $$P_N Y_N + P_y Y = PY$$

Antes de seguir con (e30) vamos a obtener un paso decisivo por medio de (e29). En esta ecuación aún estamos lejos de la (e26) que es la que nos permite obtener el vector de precios ***P*** (todos positivos) y un razón-patrón ***R*** (el autovalor mayor de ***A***) mediante Perron-Frobenius independientemente de cualquiera de las variables monetarias de salarios y ganancias. Para llegar a (e26) establecemos a su vez la ecuación:

(e31) $$PX(I + G_m)I = (1+g_m)PXI$$

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

Lo que hemos hecho con la ecuación anterior es obtener un escalar de tasa de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_m$, no de una manera arbitraria, sino a partir de los datos de la realidad, es decir, de las ***n***x***n*** tasas de ganancia máximas $\boldsymbol{G}_m$. Para ello hemos sumado el valor el valor de los medios de producción con sus tasas de ganancia para obtener una sola tasa $\boldsymbol{g}_m$ que será una media aritmética de las ***n***x***n*** tasas de $\boldsymbol{G}_m$. En efecto, $\boldsymbol{g}_m$ valdrá según (e31):

(e32) $$g_m = \frac{PXG_m I}{PXI}$$

Ahora, con la tasa (única) obtenida en (e30) y (e31), establecemos la ecuación:

(e33) $$(1+R)PX = PX(I+g_m)$$

Igualdad que sólo es posible si la razón-patrón ***R*** obtenida como una propiedad de la matriz ***A*** de requerimientos mediante Perron-Frobenius a través de la ecuación (e26) es igual a la tasa de ganancia $\boldsymbol{g}_m$ obtenida al hacer cero los salarios en la ecuación (e24) de definición del sistema más la conversión de las múltiples tasas de ganancia $\boldsymbol{G}_m$ en una sola $\boldsymbol{g}_m$ por medio de (e32). Cosa, por cierto, que no hemos demostrado aquí que sea posible más allá de la reproducción simple *esrafiana*. Con todo lo anterior, ya tenemos que el vector de precios ***P*** que hay en (e30) es un dato independiente de los valores monetarios presentes en la ecuación, es decir, independientemente de los precios $\boldsymbol{P}_N$ y $\boldsymbol{P}_y$. Por ello, de los 3 vectores de precios que están presentes en (e30), sólo dos son variables a determinar en función del vector de precios ***P*** y de las variables físicas $\boldsymbol{Y}_N$ e ***Y***, que son los productos finales de los bienes no-básicos y de los básicos, respectivamente. Traemos aquí esta ecuación:

(e30) $$\boxed{\underset{1xm}{P_N}\ \underset{mxn}{Y_N} + \underset{1xn}{P_y}\ \underset{nxn}{Y} = \underset{1xn}{P}\ \underset{nxn}{Y}}$$

En lo anterior, la expresión $\boldsymbol{P}_N\boldsymbol{Y}_N+\boldsymbol{P}_y\boldsymbol{Y}$ forman en su conjunto los precios de la mercancía-patrón de un sistema de reproducción simple con producción conjunta y con diferenciación de bienes básicos y no básicos. Parecería pues por (e30) que hubiéramos podido trasladar la ansiada mercancía-patrón de la producción simple *esrafiana* a otra más compleja. El problema es que en (e30) tenemos un sistema de ***n*** ecuaciones con ***m***+***n*** precios a determinar, es decir, con ***m*** precios de productos no-básicos de $\boldsymbol{P}_N$ y con ***n*** precios de productos básicos en $\boldsymbol{P}_y$. Dicho de otra forma, *los precios de la mercancía-patrón de un sistema de producción conjunta con diferenciación explícita entre bienes básicos y no básicos puede construirse a partir de la suma de los valores de ambos tipos de bienes*. Más precisamente, existen una infinidad de mercancías-patrón, tantas como grados de libertad. En (e30) vemos que de no existir los bienes no-básicos $\boldsymbol{Y}_N$ quedaría la ecuación $\boldsymbol{P}_y\boldsymbol{Y}$=***PY***, lo cual sólo es posibles si $\boldsymbol{P}_y$=***P***, y estaríamos en la producción simple *esrafiana*. Podemos considerar pues el caso de esta producción simple como un caso particular del caso más general posible de la producción conjunta obtenida a partir de Sraffa. El economista italiano desarrolló la lógica económica de todo esto como se puede leer en el capítulo VIII de su obra. Es más, en una nota a pie de página[30] establece estos grados de libertad para el caso ***n***, es decir, para el caso de que ***m***-***n***=***n***, con lo cual Sraffa sólo concibe la idea de que los bienes no-básicos ***m*** distintos fueran el doble de los básicos, puesto que si despejamos lo anterior queda ***m***=**2*n***. Tiene su valor didáctico, pero en aras del realismo resulta inaceptable. Con lo anterior se subsana el error de Sraffa. Si en (e30) despejamos los precios $\boldsymbol{P}_{\mathrm{y}}$ de los productos finales que van a ser medios en el siguiente ciclo queda:

(e31) $$P_y = P - P_N Y_N Y^{-1}$$

(e31b) $$p_{yk} = p_k - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_{Ni} y_{Nij} \hat{y}_{jk} \qquad k = 1 \;\; a \;\; n$$

que nos da los precios $\boldsymbol{P}_{\mathrm{y}}$ de los productos básicos de la mercancía-patrón de productos conjuntos en función de los precios de la mercancía-patrón ***P*** de la producción simple (e26) obtenidos con Perron-Frobenius, y de los precios de los no-básicos $\boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}$, que han de considerarse datos del sistema.

F) Todo lo referente a los capítulos de la producción conjunta nos dice Sraffa que son "*fundamentalmente una introducción a la discusión sobre el Capital Fijo y de la Tierra*"[31]. Creo que lo mejor es no hacer caso de ello porque el texto de Sraffa sobre la producción conjunta tiene en sí mismo enjundia suficiente más allá de los siguientes capítulos, incluso a pesar del erróneo gráfico de la pág. 90, que es el mismo que el de la pág. 63 ya mencionado. En la historia del Capital Fijo tuvo un papel fundamental el matemático amigo de Sraffa Besicovitch[32]. La historia de sus esfuerzos para resolver los problemas que le planteaba directamente el propio Sraffa es muy interesante, pero damos el resultado final con la siguiente ecuación:

(1)

$$p_{Mkj} M_{(k)j} + \sum_{i=1}^{n} p_i Y_{ij} = (1+r)\left[p_{M\,(k-1)j} M_{(k-1)j} + \sum_{i=1}^{i=n} p_i X_{ij} \right] + w l_j \quad desde\ j = 1\ a\ n$$

siendo $\boldsymbol{p}_{\mathrm{Mkj}}$ el precio del bien $\boldsymbol{M}_{\mathrm{(k)j}}$ de *duración mayor de un año* que se ha obtenido o valorado en el momento ***k*** desde que entró en el proceso productivo desde el sector[33] o proceso ***j***. $\boldsymbol{M}_{\mathrm{(k-1)j}}$ sería el mismo bien que entró a principios del año ***k*-1** como medio de producción y que se ha convertido $\boldsymbol{M}_{\mathrm{(k)j}}$ en el año con su nuevo precio de compra $\boldsymbol{p}_{\mathrm{Mkj}}$. Sraffa lo expresa con claridad: "*Este punto*

[30] Pág. 76 de *PMPM*.
[31] Pág. 67 de *PMPM.*
[32] A. Roncaglia: *Sraffa and the Theory of Prices*, 1978 [*Sraffa e la teoria dei prezzi, 1975*]
[33] "El método aquí propuesto se basa en las ecuaciones para los distintos procesos que corresponden a las sucesivas edades de las máquinas", pág. 95 *PMPM.*

de vista implica que la misma máquina, a edades diferentes, debería ser tratada como otros tantos productos diferentes, cada uno con su precio”[34]. Para el conjunto de los ***j*** procesos o sectores la ecuación resultante es:

(2)
$$\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{Y}=w\,\underset{1xn}{L}+(1+r)\,\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{X}+\frac{r(1+r)^{t}}{(1+r)^{t}-1}\times\underset{1xs}{P_M}\,\underset{sxn}{M}$$

La existencia del capital fijo se deriva de que hay bienes que se utilizan a lo largo del período considerado de reproducción del sistema y que, sin embargo, duran más de ese período. Aparecen pues estos medios tanto en el lado derecho de la ecuación (2) como en la izquierda, salvo con dos excepciones: al comienzo del período que entra como medio y no sale aún como producto final, y al final de su vida útil, que aparece como producto final, pero que ya no se empleará como medio (la chatarra). El modelo de Sraffa pretende –y lo consigue– que todos los bienes de capital ***M*** aparezcan en el lado derecho y no en el izquierdo (pero a distintos precios) merced a un proceso de eliminación de las cantidades que aparecen en los dos lados de la ecuación. En el modelo de Sraffa los productos finales de un bien de capital fijo son los mismos que los del comienzo del período siguiente, salvo que estos últimos aparecen actualizados al tipo de ganancia ***r***. Este es el primer reduccionismo: que Sraffa emplea el mismo tipo que utiliza para el reparto del excedente entre salarios y ganancias y el tipo que se utiliza en la teoría de la capitalización (o su inversa, la actualización). Es verdad que a Sraffa le sirve para proseguir su ataque a la teoría neoclásica del capital, pero el precio pagado por ello es su alejamiento de la realidad, porque no es aceptable que la misma tasa se emplee para cosas tan diferentes y para actores tan diferentes como son la lucha por el reparto del excedente y para el cálculo de las amortizaciones del capital fijo. Pero el trabajo de Sraffa es valiosísimo porque su esquema puede ser generalizado y resuelto sus deficiencias. Otro problema es que el tiempo empleado ***t*** en el cálculo de las depreciaciones es el mismo para todos los bienes de capital fijo, sea cual se el grupo de edad en que se hallen y sean cuales sean sus características. Tal es así que la fórmula conocida en el mundo financiero de cálculo de las anualizaciones es para Sraffa la misma, sean cuales sean los bienes y sus edades, es decir, es un escalar:

(3)
$$Anualización\rightarrow\frac{r(1+r)^{t}}{(1+r)^{t}-1}\times\underset{1xs}{P_M}\,\underset{sxn}{M}$$

El problema de la presentación de Sraffa es que toda la complejidad del capital fijo lo recoge en un modelo de tal manera que: 1) en un sólo escalar (f3) del cálculo de las anualizaciones del capital (amortización) para todos los bienes de todas las edades; 2) en una matriz ***M*** sólo hay dos variables: el número de máquinas de que entraron al mismo tiempo en el proceso productivos (número de filas, es decir, ***s***) y el *número* de máquinas, es decir, ***n*** es el mismo que el de procesos, que corresponde al número de columnas ***n***, puesto que ***M*** es cuadrada; 4) el precio (o valor que llama Sraffa) de cada $\boldsymbol{m}_{ij}$ corresponde a

[34] Pág. 94 de *PMPM*.

todas las máquinas que tienen la misma edad (***i***) en la empresa procedente de cada sector (***j***); 5) Sraffa hace coincidir la amortización técnica con la financiera al no distinguir entre el tiempo de las edades de las diferentes máquinas agrupadas con el tiempo del período de amortización. Pero todo es subsanable si hacemos entrar en el escenario al menos 4 variables: las dos mencionadas más *el tiempo* correspondiente a las diferentes *amortizaciones* de las diferentes máquinas y *el número* de máquinas que entran en el proceso, que no tiene porqué coincidir con el número de procesos, empresas o sectores ***n*** (número de columnas de la matriz ***M***). De momento no distinguimos entre número de máquinas y procesos (como en la producción simple). De acuerdo con lo anterior, la fórmula del cálculo de los precios del modelo de Sraffa con bienes de capital fijo quedaría:

$$\underset{1xm}{P_y}\ \underset{mxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{L}\ \underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{P_x}\ \underset{nxn}{X}\right]\times(I_d + \underset{nxn}{G}) + \underset{1xs}{P_M}\ \underset{sx\tilde{n}}{\frac{r(1+r)^{\tilde{n}(s)}}{(1+r)^{\tilde{n}(s)}-1}} \times \underset{\tilde{n}xn}{M} \tag{4}$$

En efecto, en (4) hay varias diferencias notables respecto a (f2), además de las que no afectan al tema del capital fijo, como es el de los salarios *pre-factum* y matrices ***n***x***n***, tanto para salarios como para las ganancias. En primer lugar ahora ya no tenemos un escalar para el cálculo de las anualizaciones del desgaste del capital fijo, sino una matriz ***s***x***ñ*** tal como $\boldsymbol{r}(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\tilde{n}(s)}/((\mathbf{1}+\mathbf{r})^{\tilde{n}(s)}\text{-}\mathbf{1})$, donde ***s*** representaría *el número de máquinas de la misma edad de permanencia en la empresa* y ***ñ*** indicaría *el tiempo de vida útil* de estas máquinas. Además, al hacer ***ñ***(**s**) queremos indicar que este tiempo ***ñ*** depende de las diferentes edades de las diferentes máquinas ***s***, aunque se deja libre la forma funcional concreta de esa dependencia. La segunda diferencia es que ***M*** ahora es una matriz ***ñ***x***n***, donde cada elemento ***m*** de ***M*** representa a la vida útil de cada máquina según proceda de los diferentes sectores o procesos ***n*** de la economía (una máquina por sector).

Podemos aún mejorar el modelo y establecer la ecuación matricial:

$$\underset{\tilde{n}xn}{M} = \underset{\tilde{n}xu}{U}\ \underset{uxn}{V} \tag{5}$$

donde la nueva variable ***u*** sería *el número de máquinas* que entran en el proceso, distinto del número de procesos ***n,*** con ***U*** como la matriz donde cada elemento ***u*** de ***U*** sería el tiempo de vida útil ***ñ*** de cada maquina ***u***, y ***V*** representaría el número de máquinas ***u*** que entran en cada proceso ***n***, porque ahora se supone diferente el número de máquinas y de procesos. La fórmula completa quedaría:

$$\underset{1xm}{P_y}\ \underset{mxn}{Y} = \left[\underset{1xn}{L}\ \underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{P_x}\ \underset{nxn}{X}\right]\times(I_d + \underset{nxn}{G}) + \underset{1xs}{P_M} \times \underset{sx\tilde{n}}{\frac{r(1+r)^{\tilde{n}(s)}}{(1+r)^{\tilde{n}(s)}-1}} \times \underset{\tilde{n}xu}{U}\ \underset{uxn}{V} \tag{6}$$

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

En resumen, en (6), en lo que respecta al capita fijo, ahora trabajamos con cuatro variables: ***s*** como *el número* de máquinas agrupadas según sus distintas edades desde que entraron en la empresa, ***ñ*** como el *tiempo* de vida útil de cada máquina, ***u*** como el *número* de máquinas que entran en el proceso y ***n*** el *número* de procesos. Con ello hemos resuelto casi todos los problemas que dejó Sraffa sin solucionar o que simplificó en exceso. Sólo nos queda uno: la forma funcional que relaciona el tiempo ***ñ*** de vida útil de las máquinas con la edad de las mismas ***s***.

Si no nos sentimos satisfechos y aún sospechamos de reduccionismo el modelo podemos suponer que el tipo de interés –que ya hemos supuesto diferente de las distintas tasas de ganancia $\boldsymbol{g}_{ij}$ que hay en ***G***– ***r*** dependa del tiempo de vida útil ***ñ*** de cada máquina porque fuera así cuando se negoció el tipo de interés financiero, y de tal forma que hubiera ***ñ*** tipos de interés diferentes. Es decir, ahora (3) quedaría:

(7) $$\boxed{Anualizaci\acute{o}n \rightarrow \underset{1xs}{P_M} \times \underset{sx\tilde{n}}{\frac{r_{\tilde{n}}(1+r_{\tilde{n}})^{\tilde{n}(s)}}{(1+r_{\tilde{n}})^{\tilde{n}(s)}-1}} \times \underset{\tilde{n}xu}{U}\ \underset{uxn}{V}}$$

Para acabar este epígrafe doy una ecuación aún más general que la (6) porque esta (8) están separados los bienes básicos de los no básicos:

$$\underset{1xm}{P_y}\ \underset{mxn}{Y_t} + \underset{1xn}{P_t}\ \underset{nxn}{X_t} = [\underset{1xn}{L}\ \underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{P_{t-1}}\ \underset{nxn}{X_{t-1}}] \times (I_d + \underset{nxn}{G}) + \underset{1xs}{P_M} \times \underset{sx\tilde{n}}{\frac{r_{\tilde{n}}(1+r_{\tilde{n}})^{\tilde{n}(s)}}{(1+r_{\tilde{n}})^{\tilde{n}(s)}-1}} \times \underset{\tilde{n}xu}{U}\ \underset{uxn}{V}$$

que es una ecuación creo equilibrada entre lo que puede dar en el campo teorético, a la vez que se acerca valiente a la contrastación empírica.

Caso particular I

Visto lo anterior vamos a dar un ejemplo de cómo se puede llegar al resultado de Sraffa por otro procedimiento formal pero que, por serlo, no es tan diferente en cuanto a su contenido a lo dicho anteriormente. Ello nos podrá posibilitar las condiciones o restricciones con las que trabaja Sraffa. La primera ecuación que definiría el inicio del capital fijo sería (9):

$$1.... \rightarrow \sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} + \sum_{i=1}^{m} p_{(M)ij1} M_{ij1} = (1+g)\left[wl_j + \sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij}\right] + a_1 \sum_{i=1}^{m} p_{(M)ij0} M_{ij0}$$

donde $\boldsymbol{M}_{ijk}$ es la matriz de capital fijo que incorpora ***m*** mercancías (con ***i*=1** a ***m***) en ***n*** procesos (con ***j*=1** a ***n***) y con ***s*** períodos de renovación del circulante por período de renovación del fijo (con ***k*=1** a ***s***) por cada mercancía. $\boldsymbol{M}_{ij0}$ sería la primera máquina del fijo correspondiente a la mercancía ***i*** del proceso ***j***. De forma análoga son $\boldsymbol{X}_{ijo}$ e $\boldsymbol{Y}_{ijo}$ los productos finales y medios de producción correspondiente a la mercancía ***i*** del proceso ***j*** en el primer ciclo de renovación del circulante. El coeficiente $\boldsymbol{a}_1$ es la parte del valor de la máquina que se desgasta, es decir, que se incorpora como medio de producción. La segunda ecuación sería como sigue:

$$2.... \rightarrow \sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} + \sum_{i=1}^{m} p_{(M)ij2} M_{ij2} = (1+g)\left[wl_j + \sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \right] + a_2 \sum_{i=1}^{m} p_{(M)i1} M_{ij1}$$

donde $\boldsymbol{M}_{ij1}$ es la nueva matriz de capital fijo y $\boldsymbol{a}_2$ es *el coeficiente de depreciación* del capital fijo $\boldsymbol{M}_{ij1}$, que ahora entra como medio de producción en este segundo ciclo. La ecuación del período de amortización ***k*** sería:

$$k.... \rightarrow \sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} + \sum_{i=1}^{m} p_{(M)ijk} M_{ijk} = (1+g)\left[wl_j + \sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \right] + a_k \sum_{i=1}^{m} p_{(M)ik-1} M_{ijk-1}$$

La última ecuación que recorre el ciclo del circulante es:

$$s.... \rightarrow \sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} = (1+g)\left[wl_j + \sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \right] + a_s \sum_{i=1}^{m} p_{(M)ijs-1} M_{ijs-1}$$

donde ya no se produce ningún medio de capital fijo (de vida plurianual).

Ahora vamos a proceder a sumar todas las ecuaciones, sumando todos los valores de los ciclos y cancelando los capitales físicos del lado izquierdo con los del lado derecho. Para ello, los valores concretos de los coeficientes de *uso del capital fijo* $\boldsymbol{a}_k$ que llevan el siguiente ciclo son como sigue (10):

momento medio (input) capital utilizado resto capital fijo

$$0...... \rightarrow X \rightarrow \sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ij0} \rightarrow (1-a_0)\sum p_{(M)i} M_{ijo}$$

$$1..... \rightarrow a_0 \sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ij0} \rightarrow \sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ij1} \rightarrow (1-a_1)\sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ij1}$$

$$2..... \rightarrow a_1 \sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ij1} \rightarrow \sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ij2} \rightarrow (1-a_2)\sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ij2}$$

………………………………………………………………………………

$$k..... \rightarrow a_{k-1} \sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ijk} \rightarrow \sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ijk} \rightarrow (1-a_k)\sum_{i=1}^{m} p_{(M)i} M_{ijk}$$

……………………………………………………………………………..

$$s-1\ldots \rightarrow \quad a_{s-1}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)i}M_{ijs-1} \rightarrow \sum_{i=1}^{m} p_{(M)s}M_{ijs} \quad \rightarrow \quad (1-a_{s-1})\sum_{i=1}^{m} p_{(M)i}M_{ijs}$$

$$s\ldots\ldots.. \rightarrow \quad a_{s}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)i}M_{ijs} \quad \rightarrow \quad cero\ (chatarra)$$

En el transcurso del ciclo productivo se supone que el capital utilizado es consumido y desaparece[35], por lo que queda en el sistema los restos del capital fijo. Con ello queda en el lado de los medios de producción estos restos como capital fijo total por cada bien y/o servicio, cuya suma es:

(11) $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s} p_i y_{ijk}(1-a_k)$$ para ***j*=1** a ***n***

Y para llegar al resultado de Sraffa, ahora ha de establecer la relación:

(12) $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s} p_i M_{ijk}(1-a_k) = \frac{r(1+r)^t}{(1+r)^t - 1}\times\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} p_i M_{ijk}$$ para ***j*=1** a ***n***

Hasta ahora hemos estado hablando de *ciclo interno del proceso de incorporación del capital fijo* y hemos establecido el número de ciclos en ***s*** que en el modelo de Sraffa se corresponde con las máquinas de la misma edad (que se han incorporado al sistema al mismo tiempo). También podríamos hablar de número de máquinas que se incorporan en un ciclo (por ejemplo, un año) del proceso productivo, aunque en el caso del capital fijo que nos ocupa ha de suponerse que estos bienes son plurianuales, es decir, de vida superior a un año (o período convencional) porque de lo contrario serían tratados como circulante con el resto de los bienes y servicios que satisfacen necesidades directas y aunque aquellos lo hagan de forma indirecta. El tratamiento formal es el mismo.

Caso particular II

Un caso particular del anterior sería aquel que todas *las tasas de amortizaciones unitarias* $\boldsymbol{a}_k$ fueran iguales a lo largo del ciclo de la maquinarias (que también hay que suponer que todas la maquinaria tiene el mismo ciclo de desgaste). Es decir, si hacemos:

(13) $$a_1 = a_2 = \ldots.. = a_{\tilde{n}} = a$$

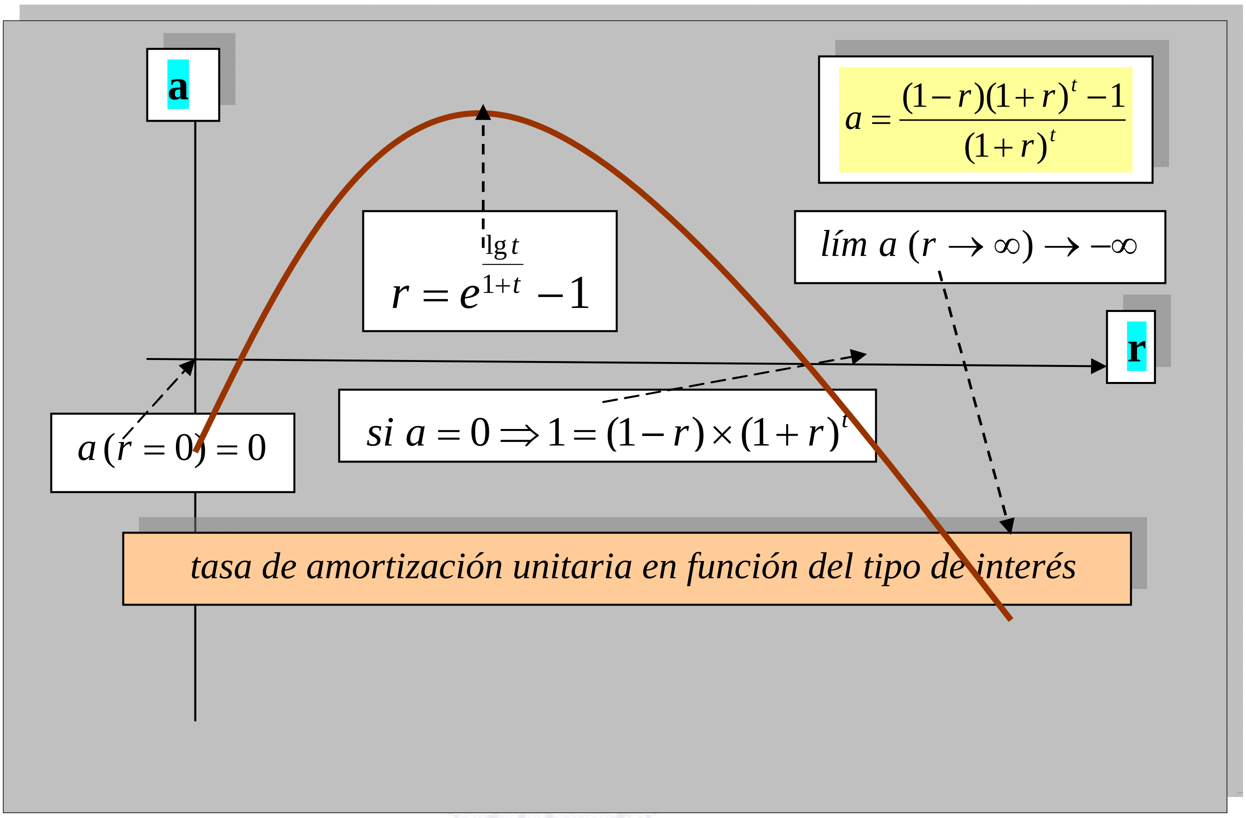
[35] Coincide esta idea con la ya tradicional "depreciación evaporación" en el uso del capital fijo, que recoge, por ejemplo, Kurz y Salvadori en *Theory of Production*, pág. 262, edit. Cambridge University Press, 1995. Cuando redacté por primera vez este epígrafe había pasado por alto la referencia de Kurz, por lo que me alegré de que ambos llegáramos a resultados análogos con desconocimiento previo por mi parte.

la expresión (12) quedaría:

(14) $$(1-a) = \frac{r(1+r)^{ts}}{(1+r)^t - 1}$$

con lo que **a**, que en este caso es ya *tasa de amortización constante*, quedaría:

(15) $$a = \frac{(1-r)(1+r)^t - 1}{(1+r)^t}$$



(16) $$1 = (1-r)\times(1+r)^t$$

que es un polinomio de grado ***t*+1**, aunque sólo con dos monomios. La función (15) tiene un máximo:

(16) $$r = e^{\frac{\lg t}{1+t}} - 1$$

y es crecientemente decreciente para $r<e^{\lg t/(1+t)}-1$ y crecientemente decreciente para $r>e^{\lg t/(1+t)}-1$, dado que la primera derivada es positiva (si $t>(1+r)^{1+t}$) y la segunda negativa siempre, por lo que la función es siempre cóncava.

Este epígrafe del capital fijo es uno más de la potencialidad del sistema de Sraffa que, a pesar de las condiciones restrictivas de su planteamiento, este es susceptible de generalización y de corrección de sus limitaciones sin gran dificultad. Incluso yendo más que este epígrafe, basta comparar la sencilla ecuación matricial ***PY*I**=***PX*I** del capítulo I sobre un sistema de subsistencia y puede considerarse la (8) como una generalización de pasos sucesivos, *elevándose* (a lo Hegel) de los general a los particular, de los abstracto a lo concreto a partir de ese primer capítulo.

Caso general III

Vamos a intentar en este epígrafe desvelar lo que hay detrás del modelo de Sraffa sobre el capital fijo partiendo del caso más general posible con un modelo que no traicione lo que él hizo con la ayuda de Besicovitch. Supongamos que partimos de un sistema de ecuaciones con salarios *pre-factum* siguiente (17):

$$1....\rightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ij1} M_{ij1} = (1+r)\left[w\sum_{j=1}^{n} l_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \right] + (1+r)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ij0} M_{ij0}$$

$$2....\rightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ij2} M_{ij2} = (1+r)\left[w\sum_{j=1}^{n} l_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \right] + (1+r)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)i1} M_{ij1}$$

$$k....\rightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ijk} M_{ijk} = (1+r)\left[w\sum_{j=1}^{n} l_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \right] + (1+r)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ik-1} M_{ijk-1}$$

$$s-1\rightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ij(s-1)} M_{ij(s-1)} = (1+r)\left[w\sum_{j=1}^{n} l_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \right] + (1+r)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)i(s-2)} M_{ij(s-2)}$$

$$s\rightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i y_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ijs} M_{ijs} = (1+r)\left[w\sum_{j=1}^{n} l_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij} \right] + (1+r)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ij(s-1)} M_{ij(s-1)}$$

que es el sistema de ecuaciones que expone el italiano en su pág. 78, sólo que modernizada la nomenclatura. Hay que suponer ahora que el medio de producción $\boldsymbol{M}_{ijo}$ de comienzo del comienzo de la utilización del capital fijo (en el segundo miembro de la primera ecuación) es igual en términos de valor al último capital fijo $\boldsymbol{M}_{ijs}$ (en el primer miembro de la última ecuación), que es la chatarra. Es decir, hacemos que:

(18) $$\boxed{(1+r)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{(M)ij0} M_{ij0} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{ijs} M_{ijs}}$$

Si ahora sumamos todas las ecuaciones miembro a miembro desde **1** a ***s*** queda (19):

$$s\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_i y_{ij}+\sum_{k=1}^{k=s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{(M)ijk}M_{ijk}=s(1+r)\left[w\sum_{j=1}^{n}l_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_i x_{ij}\right]+(1+r)\sum_{k=1}^{k=s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{(M)ik}M_{ijk}$$

De la ecuación anterior restamos del último sumando del segundo miembro de la igualdad el segundo de la primera y teniendo en cuenta el supuesto de la igualdad *esrafiana* (18) queda:

$$\boxed{s\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_i y_{ij}=s(1+r)\left[w\sum_{j=1}^{n}l_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}p_i x_{ij}\right]+r\sum_{k=1}^{k=s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{(M)ik}M_{ijk}} \quad (20)$$

y dividiendo entre ***s*** toda la ecuación:

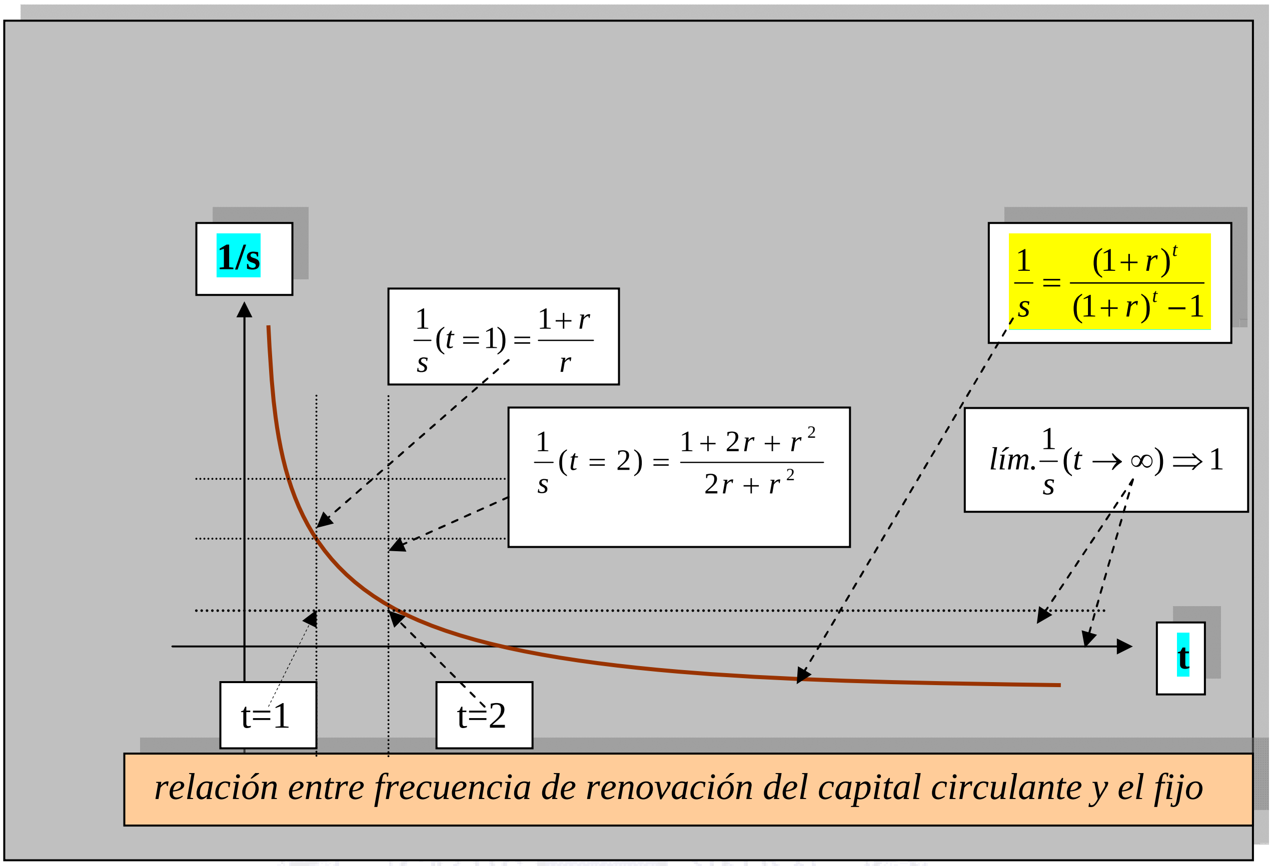
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_i y_{ij}=(1+r)\left[w\sum_{j=1}^{n}l_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}p_i x_{ij}\right]+\frac{r}{s}\times\sum_{k=1}^{k=s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{(M)ik}M_{ijk} \quad (21)$$

El último sumando de la ecuación es el mismo que el que utiliza Sraffa para el capital fijo aunque él llegara por otra vía diferente, por lo que podemos establecer la igualdad:

$$\boxed{\frac{r}{s}\times\sum_{k=1}^{k=s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{(M)ik}M_{ijk}=\frac{r(1+r)^t}{(1+r)^t-1}\times\sum_{k=1}^{k=s}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}p_{(M)ik}M_{ijk}} \quad (22)$$

Eliminamos ahora los términos comunes de los dos sumatorios a ambos lados de la igualdad queda:

$$\boxed{\frac{1}{s}=\frac{(1+r)^t}{(1+r)^t-1}} \quad (23)$$



relación entre frecuencia de renovación del capital circulante y el fijo

Pero **1/*s*** es la inversa del número de veces que se renueva el circulante por cada vez que lo hace el capital fijo, por lo que **1/*s*** *es la frecuencia de renovación del circulante por período completo de renovación del capital fijo*. Sraffa simplifica quizá en exceso y hace que ***t*** sea igual a ***s***, lo cual no es aceptable porque nada tiene que ver esa renovación del circulante con los años

de amortización del capital fijo. Aunque no encuentro un párrafo completo que exprese lo anterior con nitidez, creo que se desprende del conjunto del capítulo que Sraffa era consciente de ello. Y es que la cosa es intuitiva, porque si se quiere que el primer equipo de capital fijo $\boldsymbol{M_1}$ sea producido con el último capital fijo del anterior $\boldsymbol{M_s}$ forzosamente ha de llevar a lo dicho respecto a la relación entre la frecuencias de ambos, entre el capital fijo y el circulante. Sraffa siguió otro camino y lo que hace es igualar $\boldsymbol{M_1}$ con $\boldsymbol{M_s}$, considerando este último como la "chatarra", lo cual lleva a la misma conclusión anterior. El problema de establecer esta relación entre frecuencias de renovación es que ha de admitirse la igualdad entre la amortización técnica y la amortización financiera, lo cual es admisible; no lo es en cambio la igualdad de la variable temporal ***s*** de renovación del circulante con la igualdad de la variable temporal ***t*** de amortización. Aquí se considera que ambas variables son distintas y que una depende de la otra, con lo cual no se traiciona a Sraffa –eso pienso–, pero se subsana su modelo de alguna consideración restrictiva indeseable. Puede comprobarse que si hacemos ***t***=***s*** en (23) llegamos a la ecuación:

(24) $$1=(1-t)\times(1+r)^t$$

que es una ecuación sin sentido económico. Ahora, si de la ecuación (23) despejamos el tiempo ***t*** que define los años de amortización del capital fija queda la notable ecuación:

(25) $$t = \frac{\log_e \frac{s}{s-1}}{\log_e (1+r)}$$

que nos da bajo el sistema de amortización (o renovación del capital fijo) de Sraffa el número de períodos ***t*** de esta en función del número de años de renovación del capital fijo (el ciclo del capital fijo) y del tipo de interés aplicado a la amortización (técnica=financiera). Sraffa simplifica la cuestión y hace que este tipo de interés sea el mismo que la tasa de ganancia, tasa que es la que disputa el excedente con el salario. La relación entre ***t*** y ***s*** va a depender de la tasa de interés para que ambas variables puedan expresarse para valores concretos en números enteros (período de un año o de 12 meses). En el caso particular de que el período de amortización del capital fijo ***t*** fuera **1** (un año), de (25) se desprende que:

(26) $$r(t=1) = \frac{1}{s}$$

es decir, en el caso de una sola amortización (suponemos en un año), para poder enlazar un ciclo del capital fijo con el siguiente es necesario que el tipo de interés de las amortizaciones ***r*** sea igual a la frecuencia de la renovación del circulante por cada vez que se renueva el fijo ***s***. De (23) también se obtiene el tipo de interés ***r*** de las amortizaciones en función del número de años de renovación del circulante por período del capital fijo y del tiempo de amortización aplicado al capital fijo ***t***:

(27) $$r = \sqrt[t]{\frac{s}{s-1}} - 1$$

Podríamos decir que la brillante idea de Sraffa de situar la carga de amortización sólo en el lado derecho de las ecuaciones, es decir, de los costes, se ve mermada porque ha de suponer para ello que: 1) ha de haber una relación entre el capital fijo que se produce sin capital fijo en el primer período con el último capital fijo que entra como medio y que ya no produce ningún otro capital fijo (hablamos de una máquina en particular); 2) establece un único precio (valor contable) para todas las maquinarias de la misma edad; 3) iguala amortizaciones técnicas con financieras: 4) emplea la misma variable temporal para tres cosas: la que determina la frecuencia de la determinación del circulante, la que determina la amortización técnica del capital fijo y la que determina el período de amortización financiera. Sin embargo todas estas limitaciones o restricciones son fácilmente subsanables con tal de hacer variar sus supuestos por mor del realismo. Cosa distinta es la intención última de Sraffa cual es la crítica a la teoría del capital neoclásico, tanto austríaco como no austríaco. Entonces es preferible simplificar como lo hace Sraffa y siempre con la brillantez y profundidad de la lógica económica que le guía. Vemos una vez más la versatilidad de la economía de Sraffa, su capacidad para adaptarse a los problemas que estudia y la posibilidad de pasar de lo abstracto (teorético) a lo concreto (contrastable), sin renunciar a los supuestos de partida, sino adaptándolos, generalizándolos o eliminando restricciones. La economía de Sraffa es como revelar una fotografía tal como se hacía antaño, con líquidos reveladores y fijadores. Todo muy distinto a los modelos basados en el cálculo diferencial o el uso de las matemáticas para explicar a Ricardo o Marshall, sin que por ello suponga merma a las contribuciones de estos autores a la historia del análisis económico, especialmente del primero.

G) En el capítulo de *la Tierra* y su renta no entraré mucho en el tema estrictamente económico dado que, en este trabajo, lo sustancial son las matemáticas explícitas o implícitas en la obra capital de Sraffa. Es David Ricardo quien define con precisión lo que es renta cuando dice que "*Renta es siempre la diferencia existente entre el producto obtenido mediante el empleo de dos cantidades iguales de capital y de trabajo*"[36]. Sraffa lo matiza de esta manera: "*Puede decirse que los recursos naturales que son utilizados en la producción, tales como la renta y los depósitos minerales, y que por ser su oferta escasa permiten a sus poseedores la obtención de una renta, ocupan entre los medios de producción una posición equivalente a la de los productos "no básicos" entre los productos*"[37]. Pasinetti, que estudió el tema en 1974 en su obra *Crecimiento Económico y Distribución de la Renta*, da la siguiente ecuación para definir la renta *ricardiana*:

(g1) $$R = f(N) - N\frac{df}{dN}$$

siendo ***R*** la renta de la tierra buscada, f(***N***) la función de producción (del trigo o bien final), ***N*** el número de trabajadores (u horas de trabajo) y d***f***/d***N*** la productividad (marginal) del trabajo. Sraffa nos da a partir de su sistema de ecuaciones discretas la ecuación:

(g2) $$\underset{1xn}{P}\,\underset{nxn}{Y} = \underset{1x\tilde{n}}{P_t}\,\underset{\tilde{n}xn}{T} + w\,\underset{1xn}{L} + (1+r)\,\underset{1xm}{P}\,\underset{mxn}{X}$$

donde renta de la tierra es $\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{T}$, siendo $\boldsymbol{P}_t$ la renta unitaria y ***T*** una matriz diagonal ***n***x***n***, que representa las cantidades de las diferentes tierras según sus cualidades. Sraffa lleva los precios de los medios de producción desde **1** a ***m***,

[36] *Principios de Economía Política*, edt. FCE, 1973, pág. 54 (*On the Principles of Political Economy and Taxation*).
[37] Pág. 108 de *PMPM.*

en lugar de ***n***. Yo no entiendo por qué, por lo que haré que haré ***m***=***n***. Si ahora despejamos esta renta (unitaria) $\boldsymbol{P}_t$ y teniendo en cuenta que, como siempre, la ecuación que nos da la tasa máxima de ganancia es la que resulta de hacer cero los salarios en (g2), ambas ecuaciones quedan de la siguiente manera:

(g3) $$P = \frac{w}{g_m - r} \times L\,X^{-1}$$

(g4) $$\boxed{P_t = \left[PY - \frac{w(1+g_m)}{g_m - r} \times L\right] T^T (TT^T)^{-1}}$$

Porque la (g4) sale de sustituir los precios ***P*** en (g2), pero sólo en los del lado derecho de la ecuación, es decir, en los que pre-multiplican a los medios de producción ***X***. Este modelo recogido en (g4) recoge el agudo pensamiento de Ricardo cuando dice que "*dicho cereal no se encarece porque hay que pagar una renta, sino que debe pagarse una renta porque el cereal es caro*"[38]. Tomando derivadas, puede comprobarse que la renta (unitaria) $\boldsymbol{P}_t$ de la tierra aumentará si aumenta el precio de la cosecha (trigo) ***P***, la productividad de la tierra ($\boldsymbol{YT}^T(\boldsymbol{TT}^T)^{-1}$), la relación tierra/trabajo $\mathbf{1}/(\boldsymbol{LT}^T(\boldsymbol{TT}^T)^{-1})$ y la tasa de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_m$ (que es una medida, no hay que olvidarlo, del excedente); disminuirá, por el contrario, si aumentan la tasa de ganancia ***r***, los salarios ***w***. Esta forma de presentarse dos sistemas (el *ricardiano* y el *esrafiano*) que tratan de hablarnos sobre el mismo fenómeno económico ejemplifica quizá más que cualquier otro de los capítulos de Sraffa las diferentes visiones matemáticas –y creo que también de lógica económica- de la que hablábamos al comienzo del artículo. Para Ricardo, en versión Pasinetti, el instrumento formal (ecuación g1) es una guía lógica que ayuda al razonamiento económico, que evita cometer errores. De hecho Ricardo no utiliza ninguna fórmula en su obra. Nada que reprochar, porque aún no se había puesto de moda el uso de las matemáticas en la economía. Los historiadores del análisis económico constatan que es Antoine Augustin Cournot (1801-1877) el primero que utiliza las matemáticas en la economía. En cambio, en el modelo *esrafiano* de la renta de la tierra es ya un sistema de ecuaciones enclavado en la lógica económica de la renta de la tierra, donde se puede complicar y generalizar el modelo hasta tocar con los dedos la contrastación empírica. Nada de esto podemos hacer con el modelo Ricardo-Pasinetti de la renta diferencial de la tierra, tanto en su versión intensiva como extensiva. Por ejemplo, damos la siguiente ecuación generalizada de la renta:

(g5) $$P_t = \left[P_y Y - LW(1+F)(F_m - F)^{-1}(1+F_m)\right] T^T \left[TT^T\right]^{-1}$$

que se obtiene a partir de las ecuaciones de definición del sistema $\boldsymbol{P}_y Y + \boldsymbol{P}_t \boldsymbol{T} = (\boldsymbol{LW} + \boldsymbol{PX})(\mathbf{I} + \boldsymbol{F})$ y $\boldsymbol{P}_y \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{P}_t \boldsymbol{T} = \boldsymbol{PX}(\mathbf{I} + \boldsymbol{F}_m)$, donde los precios de los productos finales $\boldsymbol{P}_y$, las rentas unitarias $\boldsymbol{P}_t$, y los precios de los medios de producción $\boldsymbol{P}_x$ son distintos entre sí y con diferente número de bienes o rentas; donde hay ***s***x***n*** tipos diferentes de tierras, y donde ahora las tasas de salarios

---

[38] *Principios de Economía Política y Tributación*, pág. 56, edit, FCE, 1973.

W, de ganancias ***F*** y las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}$ son matrices diagonales con ***n*** términos (o no diagonales con ***n***x***n*** términos, a elegir), es decir, tantos como procesos. Hemos supuesto que los productos finales ***Y***, las tierras ***T*** y los medios de producción ***X*** son datos, aunque muy bien podrían considerarse, bajo otros criterios, variables. En términos aritméticos (g5) queda:

(g6) $$p_{tk} = \left[\sum_{i=1}^{m} p_{yi} y_{ik} - \sum_{j=1}^{n} \frac{w_j (1+f_{jj})(1+f_{mjj})}{f_{mjj} - f_{jj}} \right] \times \hat{x}_{jk}$$

donde los ***x*** con sombrero son los elementos de $T^T \left[TT^T \right]^{-1}$. Sraffa hace una afirmación que resulta, *prima facie*, sorprendente en el sistema esrafiano: "*Si no hubiera escasez, sólo se utilizaría un método, el más barato, sobre la tierra y no podría existir renta*"[39], que contradice el texto de Ricardo que hemos señalado antes. Pero como este artículo no discute sobre conceptos económicos -sólo los presenta- acabamos aquí el tema. En este capítulo más que en otro de los vistos o los que están por venir, se ve con diáfana claridad la diferencia –y la ventaja- del tratamiento con un instrumento formal (el álgebra matricial) respecto al otro (el cálculo diferencial).

H) Llega Sraffa al que se supone debiera ser uno de los capítulos estrella en su modelo, al capítulo de la elección de técnicas o -en el lenguaje de Sraffa (traducido por L. A. Rojo)- *desplazamientos de los métodos de producción*. Lo despacha el turinés en 8 ajustadas páginas y además entra en una discusión sobre los productos básicos y no básicos, que no parece sustancial al objetivo, puesto que los resultados son los mismos, aunque difieran en su relato formal (matemático). Tampoco se entiende el gráfico de la pág. 115 como veremos ahora, aunque puede ser un problema del ilustrador, porque la intención de que se corte dos veces los dos gráficos que relacionan precios con tasas de ganancia es certera. Vayamos a las ecuaciones. Partimos de una ecuación de definición de un sistema con bienes básicos y no básicos tal como:

(h1) $$\underset{1x1}{P_a}\,\underset{1xn}{Y_a} + \underset{1xn}{P_b}\,\underset{nxn}{Y_b} = \underset{1x1}{(1+g)} \left[\underset{1x1}{w}\,\underset{1xn}{L} + \underset{1xn}{P_b}\,\underset{nxn}{X} \right]$$

donde $\boldsymbol{P}_{\mathrm{a}}$ y $\boldsymbol{P}_{\mathrm{b}}$ son los precios de los productos no básicos y básicos, respectivamente, $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{a}}$ y $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{b}}$ los productos finales no básicos y básicos, ***g*** la tasa de ganancia, ***w*** la tasa de salario y ***X*** los medios de producción. El bien *no* básico $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{a}}$ es cualitativamente el mismo, pero es producido desde ***n*** métodos de producción diferentes (***n*** columnas). Es pues una generalización del problema planteado por Sraffa que habla de "*una mercancía*" desde dos métodos diferentes. Calculamos ahora como siempre la ecuación con la tasa máxima de ganancia resultado de hacer cero la tasa de salarios:

[39] Pág. 110 *PMPM.*

(h2) $$P_a Y_a + P_b Y_b = (1 + g_m) P_b X$$

Ahora, entre la (h1) y la (h2) sale:

(h3) $$P_b = \frac{w(1+g)}{g_m - g} \times LX^{-1}$$

Y tomamos como numerario los inputs de trabajo y la suma de los bienes de productos finales que, recordémoslo, en este modelo son iguales cualitativamente

(h4) $LI = 1$ y $Y_a I = 1$

Si ahora llamamos ***f*** a $\boldsymbol{LX^{-1}Y_b I}$ obtenemos:

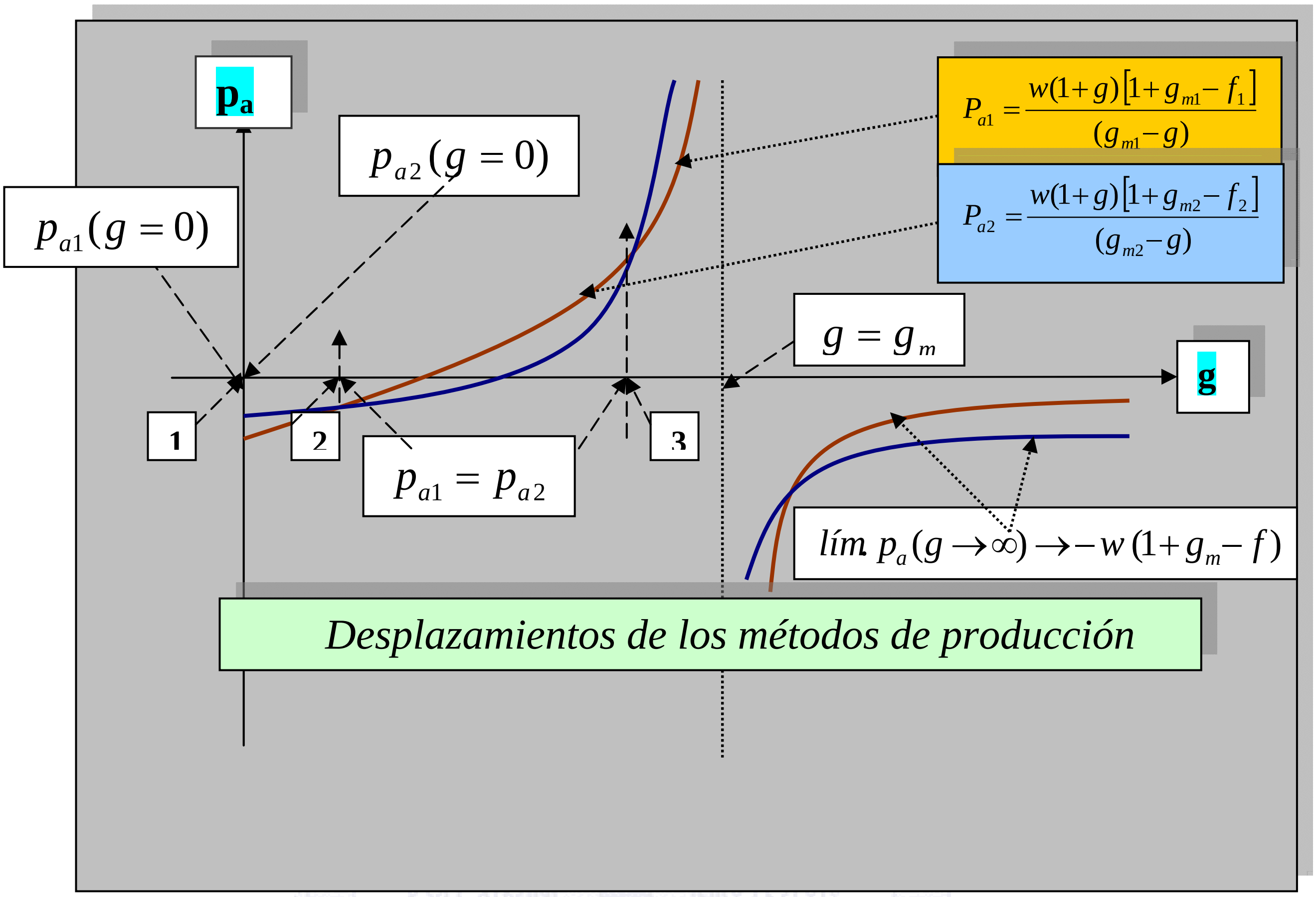
(h5) $$\boxed{P_a = \frac{w(1+g)[1 + g_m - f]}{(g_m - g)}}$$

donde el precio del producto no básico $\boldsymbol{p}_a$ depende de la tasa de ganancia. Supongamos ahora que tenemos dos técnicas o métodos de producción (Sraffa) definidos por dos ecuaciones tales como la (h5):

(h6) $$P_{a1} = \frac{w(1+g)[1 + g_{m1} - f_1]}{(g_{m1} - g)}$$

y otra como:

(h7) $$P_{a2} = \frac{w(1+g)[1 + g_{m2} - f_2]}{(g_{m2} - g)}$$



Ambas técnicas, al igualarse los dos precios, es decir, al hacer que sean $\boldsymbol{p}_{a1}$ = $\boldsymbol{p}_{a2}$. podrá ocurrir que ambas técnicas no se crucen, se crucen una vez o, a lo sumo, dos veces según las soluciones de la ecuación:

(h8) $$\boxed{\frac{1+g_{m1}-f_1}{g_{m1}-g}=\frac{1+g_{m2}-f_2}{g_{m2}-g}}$$

como puede verse en el gráfico.

Las funciones (h6) y (h7) son monótonas crecientes porque sus dos primeras derivadas son positivas:

(h9) $$\frac{dP}{dg}=\frac{w(1+g_m)\left[1+g_m-f\right]}{(g_m-g)^2}>0$$

(h10) $$\frac{d^2P}{dg^2}=\frac{2w(1+g_m)\left[1+g_m-f\right]}{(g_m-g)^3}>0$$

con puntos de corte en:

(h11) $$P_{a1}(r=0)=\frac{w\left[1+g_{m1}-f_1\right]}{g_{m1}}$$

(h12) $$P_{a2}(r=0)=\frac{w\left[1+g_{m2}-f_2\right]}{g_{m2}}$$

y con las asíndotas para ambas en:

(h13) $$lím.\, de\, P(g \to \infty) \to -w(1+g_m - f)$$

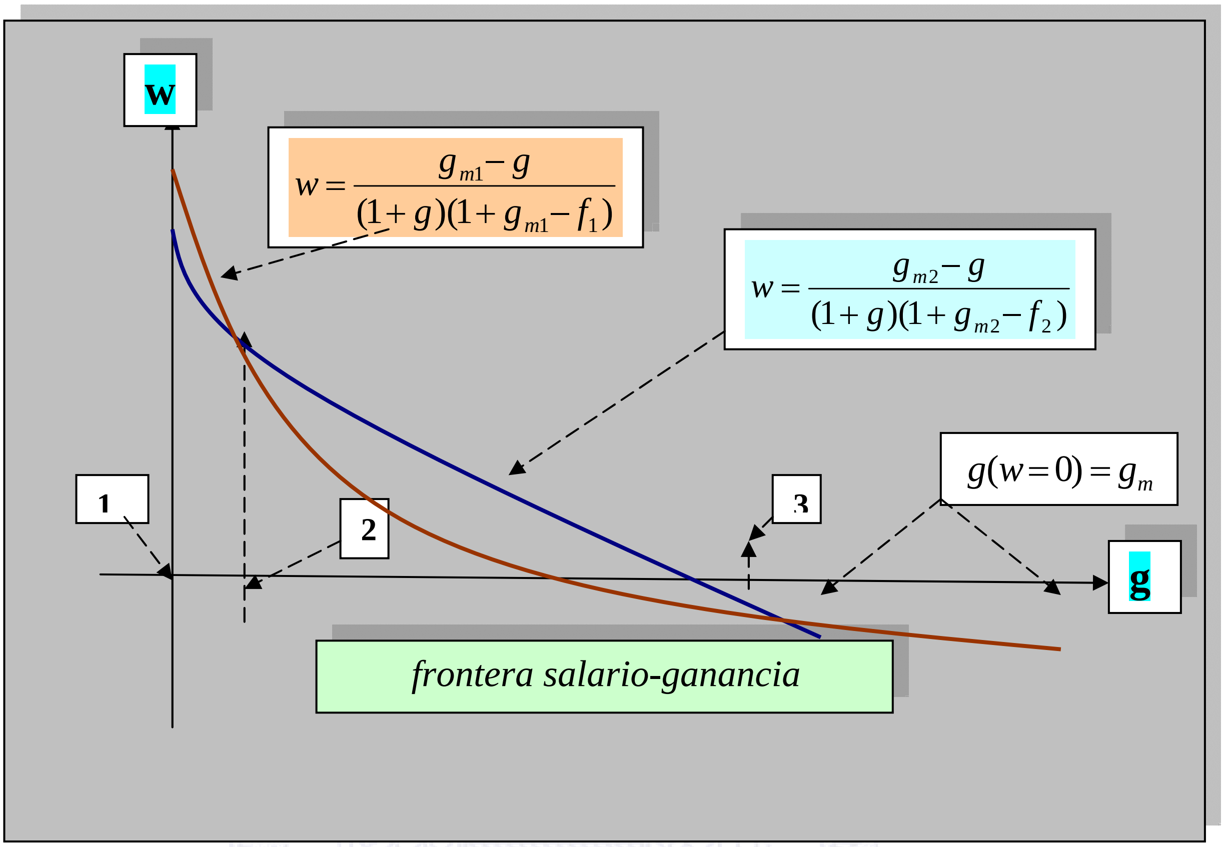
(h14) $$lím.\, de\, g\,(p_a \to \pm\infty) \to g_m$$

Y si ambas técnicas se cruzan dos veces –y esto es lo importante– significa que una de las técnicas es más rentable para una tasa de ganancia (entre los puntos 1 y 2 del gráfico), luego es rentable la otra técnica (entre los puntos 2 y 3), para luego ser más rentable de nuevo la primera (a partir de 3). La teoría del capital y relación entre precios y tasas de ganancia (uno de sus tópicos) queda por el suelo. El resultado de (h8) son los valores de las tasas de ganancia en las que se cruzan los dos métodos:

(h14) $$\boxed{g = \frac{g_{m2}\left[1-f_1\right]-g_{m1}\left[1-f_2\right]}{(g_{m1}-f_1)-(g_{m2}-f_2)}}$$

Sin embargo, donde se ha consagrado en la teoría del capital sus tópicos es en la llamada *frontera salarios-ganancia*, donde se relacionan ambas variables. La teoría neoclásica del capital dice que salarios y ganancias han de estar en relación inversa y monótona; también que ante un aumento de lo entendemos por *capital* (conjunto de medios de producción físicos) se ha de suponer *siempre* una disminución de su retribución, es decir, de la tasa de interés. Lo mismo para el trabajo y el salario.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231



Estos tópicos han sido ya rebatidos en la historia del análisis económico por Garegnani, Pasinetti, Robinson, Badhuri, Nuti, etc., y el propio Sraffa en la obra que comentamos. Sin embargo estas revisiones no han pasado a los manuales de economía y aún se sigue explicando esa cosa llamada “capital” como un factor de producción autónomo, independiente del trabajo y merecedor de una retribución según *el valor*[40] de su productividad marginal.

Vayamos a las ecuaciones y al gráfico. Si en (h14) se toma como numerario el precio de la mercancía no básica $\boldsymbol{p}_a$, es decir, se hace $\boldsymbol{p}_a=\mathbf{1}$, obtenemos la ecuación:

(h15)
$$w = \frac{g_m - g}{(1+g)(1+g_m - f)}$$

[40] En algunos artículos o libros de divulgación de bajo nivel se omite a veces la palabra valor. Supongo que es un descuido y no cabe atribuirlo a una mala intención porque es precisamente esta palabra la madre del cordero. En efecto, en los modelos más abstractos marginalistas (versión austriaca) se llega a la conclusión de que las rentas de los factores ha de pagarse de acuerdo con el valor de la productividad marginal del factor. El irresoluble problema que tiene este modelo es que para saber ese valor –que es el precio del producto final si hablamos de valor unitario- han de conocerse los costes y la función de producción, pero para conocer los costes ha de conocerse el precio de los factores, que es justamente lo que se trata de calcular, y con ello entramos en un círculo infernal o, con menos dramatismo, en un circo, en el circo de la inconsistencia marginalista de la cual no salimos.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

En el gráfico se puede ver cómo una técnica (la 1) es más rentable entre los niveles de tasa de ganancia 1 y 2, cómo lo es en cambio la segunda entre los puntos del gráfico 2 y 3, para volver a la primera a partir de 3. Las variables técnicas ***L***, ***X*** e ***Y*** están representadas en las tasas máximas de ganancia $\boldsymbol{g}_m$ porque estas son proporcionales al excedente, es decir, a $\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})$. Con esta formulación e interpretación formal del contenido del capítulo de Sraffa sobre los desplazamientos de los métodos creo que se puede seguir mejor y sin error los razonamientos económicos[41] de Sraffa, y ello a pesar de su erróneo gráfico y su mezcla en la discusión entre bienes básicos y no-básicos.

Aquí, la primera derivada de los salarios respecto a la tasa de ganancia de la función (h15) es:

(h16) $$\frac{dw}{dg} = -\frac{1+g_m}{(1+g)^2(1+g_m-f)} < 0$$

y la segunda:

(h17) $$\frac{d^2w}{dg^2} = \frac{2(1+g_m)}{(1+g)^3(1+g_m-f)} > 0$$

que nos da una función convexa siempre que $\mathbf{1}+\boldsymbol{g}_m>\boldsymbol{f}$.

En el caso de que no hubiera bienes no-básicos la cosa es más sencilla y la curva de la frontera salario-ganancia o es una recta (con salarios *post-factum* o es una curva convexa con salarios *pre-factum*. En efecto, si hacemos $\boldsymbol{p}_a\boldsymbol{Y}_a=\mathbf{0}$, tomamos como numerario en este caso ***PY*I=1** y siguiendo los pasos anteriores se obtiene:

(h18) $$w = \frac{R-r}{(1+r)f}$$

con un sólo punto de corte como máximo para dos técnicas:

(h19) $$\boxed{r = \frac{R_2 f_1 - R_1 f_2}{f_1 - f_2}}$$

Siguiendo la intencionalidad de este artículo que es demostrar la versatilidad del modelo *esrafiano* que permite *elevarse* de lo abstracto a lo concreto, damos

[41] En la pág. 118 de *PMPM* el traductor emplea la palabra *desplazamientos* para referirse al paso de una técnica a otra, tal y como hemos explicado. Creo que es una traducción desafortunada porque el término desplazamiento –por el contra de deslizamiento- se ha consagrado en castellano para indicar que las variables que no son objeto de estudio o de representación en un gráfico se mueven; con ello las curvas que representan la función también se mueven paralelamente a los ejes. No es el caso, porque ahora están presentes los dos métodos, al menos hipotéticamente en ese “libro de las técnicas” de la que habla Samuelson. La palabra que mejor indicaría este hecho económico tan relevante sería el de *traslado*.

a continuación una ecuación de un modelo más general con salarios *pre-factum* tal como:

(h20) $$\underset{1xs}{P_a}\underset{sxn}{Y_a} + \underset{1xn}{P}\underset{nxn}{Y} = \left\lfloor \underset{1xn}{L}\underset{nxn}{W} + \underset{1xn}{P}\underset{nxn}{X} \right\rfloor \times \underset{nxn}{(1+G)}$$

donde el número de bienes *no* básicos ***s*** se han obtenido de ***n*** sectores; donde los salarios están definidos por la matriz diagonal ***W***, es decir, donde hay ***n*** salarios diferentes (tantos como sectores); donde la matriz de medios ***X*** consta, como es habitual, de igual números de medios que de sectores ***n***, y donde la tasa de ganancia ***G*** es también una matriz diagonal con ***n*** tasas diferentes, al igual que los salarios. Los precios $\boldsymbol{P}_a$, y ***P*** quedan definidos en función de los productos y medios. Si ahora se hacen cero todas las tasas de salario ***W*** se obtiene, como es habitual, la ecuación que hace máxima la ganancia $\boldsymbol{G}_m$, con la salvedad que ahora $\boldsymbol{G}_m$ será también una matriz diagonal con ***n*** tasas máximas de ganancia *diferentes* posibles.

(h21) $$\underset{1xs}{P_a}\underset{sxn}{Y_a} + \underset{1xn}{P}\underset{nxn}{Y} = \underset{1xn}{P}\underset{nxn}{X} \times \underset{nxn}{(I_d + G_m)}$$

y de (h20) y (h21) se obtiene:

(h22) $$P_a = LW(I+G)(G_m-G)^{-1}(I+G)(I+G_m-X^{-1}Y)Y_a^T(Y_aY_a^T)^{-1}$$

que es una ecuación que muestra la misma relación funcional y teorética entre precios, salarios y ganancias que la (59), pero que se acerca con más decisión a la realidad o, al menos, a los datos que retratan borrosamente la realidad.

l) Remata Sraffa su extraordinario libro *Producción de mercancías por medio de mercancías* con 4 apéndices a modo de notas aclaratorias, como si no le merecieran simplemente una nota a pie de página. Una de ellas, que lleva el largo título de "*Nota sobre productos no básicos que se auto reproducen*", es algo más que una nota aclaratoria como se verá. Sraffa dice que "*consideremos una mercancía que entra en su propia producción en un grado desusadamente grande*". Párrafos más tarde aclara lo de *desusadamente grande* y sería aquella mercancía cuyo *producto neto relativo*[42], es decir, el cociente que surge dividir la diferencia entre el producto y el medio de producción, y el propio medio de producción, supera a la tasa de ganancia del sistema. Sraffa no lo dice con estas palabras, pero es lo que quiere decir. Pone un ejemplo -no pone muchos a lo largo de su obra- y dice que si se recogieran 110 unidades de habas de cada 100 sembradas, el sector de las habas no tendría problema mientras la tasa *general* de ganancia del sistema

[42] Este concepto no es de Sraffa sino de este modesto autor, por lo que pido disculpas por tal atrevimiento.

permaneciera igual o menor al 10%, que es justamente el producto neto relativo (o excedente relativo) de las habas[43]. El problema surge si la tasa general de ganancia sube por encima del 10% por una bajada, por ejemplo, de los salarios[44]. Y he dado una pista dos veces sobre el punto crucial y es el de que *la tasa general de ganancia* depende del conjunto del sistema; un segundo punto decisivo es que la mercancía protagonista -las *habas*- no puede influir en la tasa de ganancia general porque es una mercancía *no básica*, es decir, no es consumida como medio de producción por ningún otro sector de la economía, por lo que tampoco puede influir en los precios del resto del sistema y, por ende, en la tasa de ganancia[45] general, dado que, en el sistema *esrafiano*, en el sector de bienes básicos, tanto precios, tasa de ganancia y tasa de salarios se determinan conjuntamente y autónomamente, aunque con al menos un grado de libertad. Para terminar con el planteamiento de Sraffa, dice el autor que la subida de la tasa de ganancia general hasta llegar al 10% "*haría aumentar sin límite*" el precio de este producto (las habas del ejemplo). Y si se rebasara el 10% de tasa de ganancia general, sólo sería posible "*el reemplazamiento de las otras materias primas si se obtuvieran gratuitamente*". Lo cual tiene su lógica, porque el precio de las habas se haría infinito en términos relativos[46] dado que llegado a ese punto, los medios que emplean las habas como medio de producción deberían comprarse a precio cero, es decir, en forma de regalo. Es verdad que todo esto se hace difícil de seguir sin ayuda de las matemáticas por más que se empeñara el gran Sraffa en utilizar exclusivamente razonamientos económicos, cosa que hace, por cierto, magistralmente casi siempre.

Antes de entrar en los aspectos formales habría que aclarar que el caso planteado por Sraffa no es el caso extremo de un sector que no tuviera comunicación con el resto del sistema aunque compartiera las mismas tasas de ganancia y de salarios, porque, si bien este sector -el de las habas- no es suministrador de esos bienes al resto del sistema, si compra del resto del sistema -y se puede suponer que de todo el sistema- como medios de producción los productos finales de este. No es, por lo tanto, un sistema aislado. No estamos en el caso del *trigo ricardiano*, donde se vendía a sí mismo el trigo (igual que el caso de las habas) a la par que no utilizaba ningún otro medio ni compraba nada del resto del sistema (aquí está la diferencia). Para caracterizar formalmente lo que nos dice Sraffa en este apéndice hay que particionar en 4 trozos, tanto la matriz de productos finales del conjunto del sistema ***Y*** como de medios de producción ***X*** de la siguiente manera:

(i1)
$$Y = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & \Lambda & Y_{1,n-1} & Y_{1,n} \\ M & O & M & M \\ Y_{n-1,1} & \Lambda & Y_{n-1,n-1} & Y_{n-1,n} \\ Y_{n,1} & \Lambda & Y_{n,n-1} & Y_{n} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_{1,1} & \Lambda & X_{1,n-1} & X_{1,n} \\ M & O & M & M \\ X_{n-1,1} & \Lambda & X_{n-1,n-1} & Y_{n-1,n} \\ X_{n,1} & \Lambda & X_{n,n-1} & X_{n} \end{bmatrix}$$

43 (110 habas recogidas - 100 habas sembradas) / 100 habas sembradas = 10%

44 Aunque no parece posible que otra variable monetaria puede influir en la subida de la tasa de ganancia general

45 Tampoco puede influir este sector -el de las habas- el salario general del sistema, pero Sraffa centra inteligentemente en la tasa de ganancia en lugar del salario por lo que luego se verá.

46 Es decir, en términos de las mercancías suministradas.

Las matrices de productos finales ***Y***, de medios ***X***, de trabajo ***L*** y de precios ***P*** serán:

(i2) $$Y = \begin{bmatrix} Y_A & Y_B \\ Y_C & Y_D \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_A & X_B \\ X_C & X_D \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} La & Lb \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} P_a & P_b \end{bmatrix}$$

donde:

(Ab.3) $$Y_A = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & \cdots & Y_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n-1,1} & \cdots & Y_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \qquad Y_B = \begin{bmatrix} Y_{1,n} \\ \vdots \\ Y_{n-1,n} \end{bmatrix} \qquad Y_C = \begin{bmatrix} Y_{n,1} & \cdots & Y_{n,n-1} \end{bmatrix}$$

$$Y_D = Y_n$$

(Ab.4) $$X_A = \begin{bmatrix} X_{1,1} & \cdots & X_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n-1,1} & \cdots & X_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} X_{1,n} \\ \vdots \\ X_{n-1,n} \end{bmatrix} \qquad X_C = \begin{bmatrix} X_{n,1} & \cdots & X_{n,n-1} \end{bmatrix}$$

$$X_D = X_n$$

(Ab.5) $$L_A = \begin{bmatrix} L_{1,1} & \cdots & L_{1,n-1} \end{bmatrix} \qquad L_B = L_n \qquad P_a = \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & P_{n-1} \end{bmatrix} \qquad P_b = P_n$$

De estas matrices podemos establecer la ecuación que define el sistema que responde al problema planteado por Sraffa en su *apéndice B.*

(i6) $$\boxed{\begin{bmatrix} Pa & Pb \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Y_A & Y_B \\ Y_C & Y_D \end{bmatrix} = (1+g)\left[w\begin{bmatrix} L_a & L_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_a & P_b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_A & X_B \\ X_C & X_D \end{bmatrix} \right]}$$

La (i6) nos da las ecuaciones de precios, tanto la de los precios ***P***$_a$ de las ***n*-1** mercancías básicas, como la del precio ***P***$_b$ de la singular mercancía de la que habla Sraffa: las habas. Estas son:

(i7) $$P_a Y_A + P_b Y_C = (1+g) \times \left[wL_a + P_a X_A + P_b X_C \right]$$

(i8) $$P_a Y_B + P_b Y_D = (1+g) \times \left[wL_b + P_a X_B + P_b X_D \right]$$

De la (i7) se despeja el vector de precios ***P***$_a$ de bienes y servicios básicos y queda:

(i9) $$P_a = \left[w(1+g) L_a Y_A^{-1} - P_b \left[(1+g) X_C Y_A^{-1} - Y_C Y_A^{-1} \right] \right] \times \left[I - (1+g) A_a \right]^{-1}$$

siendo ***A***$_a$=***X***$_A$***Y***$_A^{-1}$ la matriz de requerimientos de las mercancías básicas. Viendo (i9) parecería que los precios de los bienes básicos ***P***$_a$ dependiera, entre otras variables, del precio del bien de autoabastecimiento no básico ***P***$_b$, es decir, de las habas de Sraffa. Pues no es cierto, porque el vector ***Y***$_C$ es cero, dado que es precisamente el vector fila que suministra -debiera suministrar-

© EMUI Euro-Mediterranean University Institute | Universidad Complutense de Madrid | ISSN 1578-6730
Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

medios de producción (las habas) a los otros sectores, es decir, al resto de las columnas excepto la última, que es justamente la de las habas y que se suministra así mismo ($\boldsymbol{Y}_D$). Si $\boldsymbol{Y}_C$ y $\boldsymbol{X}_C$ valen cero, la (i9) queda:

(i10) $$P_a = \left[w(1+g)L_a Y_A^{-1}\right]\times\left[I-(1+g)A_a\right]^{-1}$$

En (i10) se comprueba que los precios $\boldsymbol{P}_a$ de los bienes básicos dependen sólo de sus propios medios ($\boldsymbol{A}_a$=$\boldsymbol{X}_A\boldsymbol{Y}_A^{-1}$), de sus propios productos finales ($\boldsymbol{Y}_A$), de la tasa de salarios ***w*** y de la tasa de ganancias ***g***, que se determinan conjuntamente por este sistema de ***n*** ecuaciones con ***n*+1** incógnitas. En efecto, tenemos ***n*-1** precios, una tasa de ganancia ***g*** y una tasa de salario ***w***. Hay, por lo tanto, dos grados de libertad. Una de ellos se puede eliminar tomando un precio como numerario; el otro grado de libertad no se puede eliminar si se quiere respectar la filosofía que entraña la obra de Sraffa. Según esta, la distribución de la renta y riqueza -representada en el modelo por el conjunto de valores de tasa de ganancia y de salarios que satisfacen (i10)- no es resuelta técnicamente por ningún elemento del sistema, sino por la sociología, por las relaciones de conflicto de la sociedad o, simplemente, por la luchas de clases, según los gustos. Aquí no hay *productividades marginales,* ni *relaciones marginales de sustitución, ni costes marginales,* ni *utilidades marginales* que determinen precios, salarios y ganancias, niveles de producción y utilización de factores por sí solos, sino que es el conjunto del sistema, representado en esta ocasión por (i10), quien lo determina, aunque siempre con un grado de libertad.

Vayamos ahora a la ecuación (i8) y despejemos de ella el precio de la mercancía objeto de análisis de Sraffa y de este artículo: las habas. Sale que:

(i11) $$P_b = \frac{w(1+g)L_b + P_a\left[(1+g)X_B - Y_B\right]}{Y_D-(1+g)X_D}$$

dado que $\boldsymbol{Y}_D$ y $\boldsymbol{X}_D$ son dos escalares. De (i11) son destacables al menos tres cosas: 1) En primer lugar vemos que, a diferencia de la ecuación anterior de precios del sistema de mercancías básicas, aquí el precio de las habas, es decir, el de (sólo hay una) la mercancía *no básica con autoabastecimiento*, depende del resto de los precios del sistema $\boldsymbol{P}_a$; 2) Las tasas de salarios ***w*** y de ganancia ***g*** vienen dadas por el sistema anterior y no puede este sector (el de *las habas*) influir en ellas. Diríamos, emulando a la teoría de la competencia perfecta, que este sector es *ganancia-aceptante* y *salario-aceptante*; 3) Si nos fijamos en el denominador de (i11), se puede comprobar que tiende a cero si $\boldsymbol{X}_D$ tiende a $\boldsymbol{Y}_D$/(1+***g***), y si eso ocurre los precios tienden a infinito. Quedaría:

(i12) $$si \quad X_D \to \frac{Y_D}{1+g} \Rightarrow P_b \to \infty$$

con lo que se cumple lo que señala Sraffa en el apéndice para las mercancías no básicas que se autoabastecen (las habas del ejemplo) porque que se cumpla (i12) es como decir que el *producto neto relativo* o *excedente relativo* de este producto tiende a cero. Sraffa dice que eso no ocurriría para las mercancías básicas. Es verdad que, contemplada la ecuación (i10) de mercancías básicas no parece que eso pueda ocurrir, pero a mí la explicación que da Sraffa no me convence. Luego veremos el tema con más detenimiento. Si ahora sustituimos los precios del sistema de mercancías básicas $\boldsymbol{P}_a$ -es decir, la ecuación (i10)- en la ecuación de la mercancía que se autoabastece (i11) queda:

(i13) $$P_b = \frac{w(1+g)\left[L_b + L_a Y_A^{-1}\left[I-(1+g)A_a\right]^{-1} \times \left[(1+g)X_B - Y_B\right]\right]}{Y_D - (1+g)X_D}$$

Viendo (i13) en un primer momento resultaría sorprendente que el precio $\boldsymbol{P}_b$ de esta mercancía dependa de las mercancías básicas, teniendo en cuenta que hemos dicho que no suministra su producto al resto del sistema, aunque sí parece lógico que le influya la ***n***-ésima columna, es decir, la columna que representa las compras del sector de las habas al resto de los sectores. Sin embargo, el resto del sistema influye en el considerado por Sraffa, no sólo por las tasas de salario y de ganancia determinadas autónomamente por el sector de bienes básicos, sino que estos sectores lo hacen *indirectamente* en el de las habas porque todo el sistema es suministrador (las ***n*-1** filas de la matriz ***Y***, es decir, $\boldsymbol{Y}_A$) de los sectores que a su vez suministran al de las habas (columna ***n***-ésima de ***Y***, es decir, $\boldsymbol{Y}_B$). ¿Qué ocurriría si el resto del sistema dejara de vender productos al sector de las habas y tuviera éste que contentarse con utilizar su propio producto como *único* medio de producción (el caso del trigo ricardiano)? Ocurriría que la ***n***-ésima columna de ***Y*** hasta el elemento ***n***-ésimo sería cero, por lo que $\boldsymbol{X}_B$ y $\boldsymbol{Y}_B$ también lo serían, y (i13) quedaría en:

(i14) $$P_b = \frac{w(1+g)L_b}{Y_D - (1+g)X_D}$$

donde la determinación del precio $\boldsymbol{P}_b$ sólo depende del trabajo $\boldsymbol{L}_b$ utilizado en la siembra y recolección de las habas, de la cantidad de habas empleada $\boldsymbol{X}_D$ y de la cantidad $\boldsymbol{Y}_D$ cosechada. Aún así, no perdería este bien *el cordón umbilical* que le une al resto del sistema, porque éste le daría como datos las tasas de salario ***w*** y de ganancia ***g***. También puede considerarse, en este caso, que ambas tasas son independientes del resto del sistema: todo depende de las hipótesis de partida.

Puede generalizarse todo lo anterior porque quizá uno de los supuestos que resultan más molestos para la credibilidad del modelo *esrafiano* es el de la unicidad de la tasa de ganancia y de salarios. Hay que considerar que el modelo, tal y como él lo expuso, es un modelo pedagógico y sencillo, que es útil siempre y cuando, como todo modelo, al generalizarse sus supuestos o hipótesis no haga variar las conclusiones, cosa que ha ocurrido con los modelos *marshalianos* y marginalistas del equilibrio parcial (la paradoja de la agregación, la diferencia entre costes privados y sociales de Pigou, los efectos externos, los juegos no cooperativos, etc.). Afortunadamente en el caso de los modelos de origen *esrafiano* no ocurre esto. La razón es que, a pesar de la simplificación, parte Sraffa del conjunto de la economía, entendida esta como el estudio de las relaciones intersectoriales y de la distribución de la renta. A diferencia de la economía marginalista, en la economía *esrafiana* no sólo no es un problema la agregación, sino que es uno de sus presupuestos. Para acercarlos a la realidad sólo hay que relajar los supuestos y generalizarlos. Según esto, la ecuación:

(i15) $$P_a Y_A + P_b Y_C = \left[L_a W_a + P_a X_A + P_b X_C \right] \times (1 + G_a)$$

representaría, por ejemplo, al sistema económico, pero con ***n*-1** tasas de salario en la diagonal principal de $\boldsymbol{W}_a$; a su vez $\boldsymbol{G}_a$ representa las ***n*-1** tasas de ganancia, también en su diagonal principal. Si despejamos de (i15) los precios $\boldsymbol{P}_a$ de bienes básicos y recordando que $\boldsymbol{Y}_C$ e $\boldsymbol{X}_C$ valen cero según lo que hemos comentado en el texto principal, queda:

(i16) $$P_a = \left[L_a W_a (1 + G_a) \right] \times \left[Y_A - (1 + G_A) X_A \right]^{-1}$$

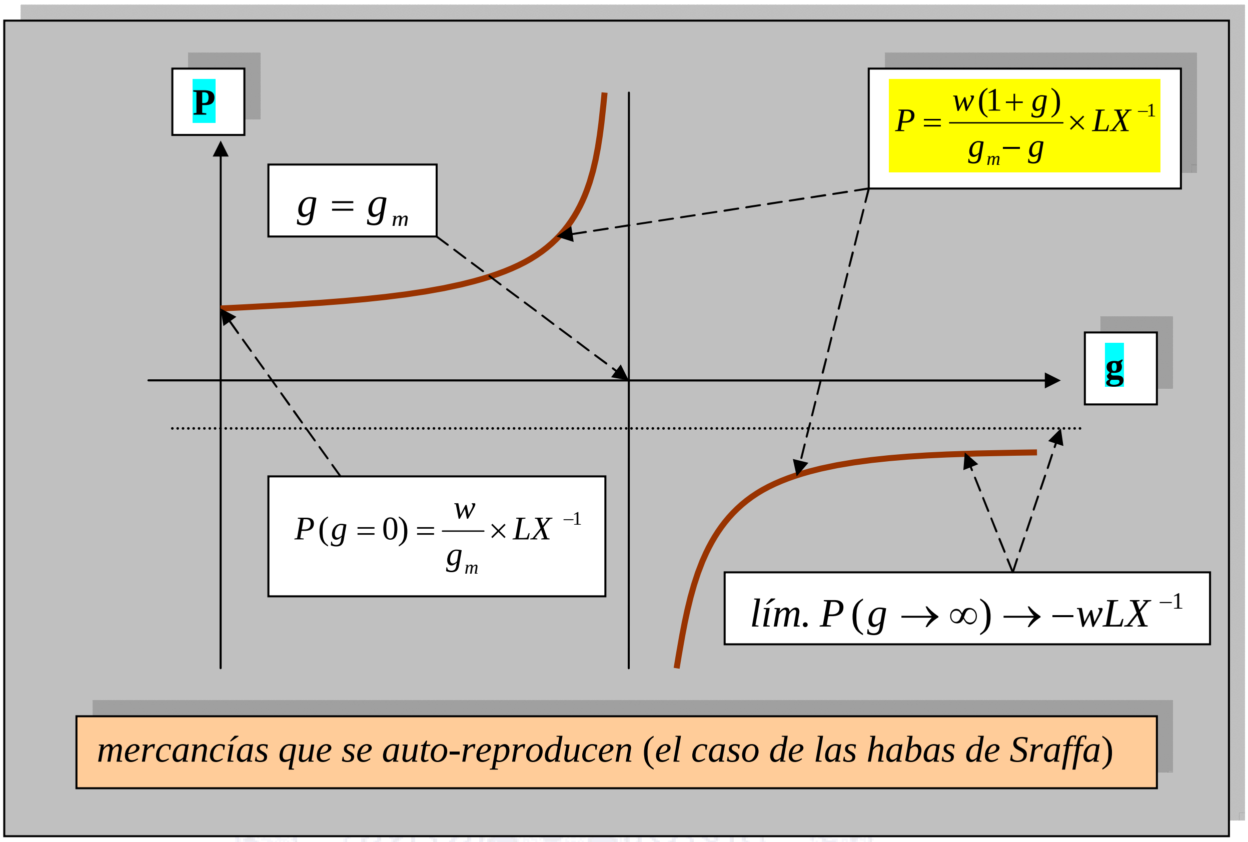
Por otro lado y con estos supuestos, la ecuación que define el precio de las habas vendrá de sustituir (i16) en la ecuación (i11) del texto principal y sale:

(i17) $$P_b = \frac{w(1+g)L_b + \left[L_a W_a (1+G_a) \times \left[Y_A - (1+G_a) X_A \right]^{-1} \right] \times \left[(1+g) X_B - Y_B \right]}{Y_D - (1+g) X_D}$$

¡Pobre agricultor! Es mejor que no sepa nunca que los precios de producción -mejor de intercambio- se determinan de forma tan compleja[47]. Las conclusiones son las mismas que las obtenidas en el texto principal y con los supuestos simplificados de tasas únicas de salario y de ganancia, pero ahora estamos tan cerca de la realidad que casi podemos sustituir los datos reales en el modelo.

Quizá sea en este capítulo de las mercancías que se autoabastecen donde más se deja ver el perfecto maridaje entre la lógica económica desarrollada por Sraffa y el instrumental adecuado, cual es el álgebra matricial. Nada hay comparable a este capítulo en la visión marginalista, ni en la teoría desarrollada, ni en la lógica formal que la sustenta. Aquí no hay que hacer apenas supuestos restrictivos sobre comportamientos de los consumidores, ni de funciones de producción determinadas, ni de teoría de costes (rendimientos), ni procesos de optimización. Sraffa nos dejó en este capítulo de su obra la semilla de una teoría de los mercados. Es verdad que de una manera un tanto dicotómica (un sector vende o no vende a otro, que le compra o no le compra), pero con una relajación de los supuestos puede obtenerse una teoría de los mercados basados, no en los precios como variable estratégica tal y como hace el marginalismo, sino con las ganancias ocupando su lugar.

[47] Y hay que recordar que estamos en un sistema de reproducción simple y sin reducir a trabajo fechado los medios de producción del pasado.



Conclusiones

La obra de Sraffa no es simplemente un modelo económico más por importante que parezca, sino que es un modelo que afecta a los fundamentos del análisis económico. Sraffa innova una nueva forma de interactuar entre la lógica económica y el uso de las matemáticas que aúna en un mismo sistema los modelos hipotéticos-deductivos al modo de Ricardo y Marshall, con los modelos que permiten la contrastación empírica como el de las tablas Input-Output de Leontief. La versatilidad de su modelo hace que pueda atender a estas dos formas de utilización de las matemáticas. Pero no son sólo aspectos formales: es la lógica interna de *Producción de mercancías por medio de mercancías* la que permite pasar del simple modelo de producción de *subsistencia* a las complicaciones del *capital fijo* y los de *la producción conjunta*; más aún si no nos quedamos con lo avanzado extraordinariamente por Sraffa y generalizamos su modelo a múltiples salarios, ganancias y ganancias máximas, a la producción conjunta con un número de bienes y servicios producidos superior al de medios de producción empleados cualitativamente distintos; al capital fijo con más variables cualitativamente distintas que las que recoge Sraffa; a la reducción de trabajo fechado con matrices de requerimientos distintas cada año; si no suponemos iguales precios para los mismos bienes y servicios según que sean medios o productos; si no nos quedamos sólo con la búsqueda de los precios de equilibrio y dinamizamos el ciclo de la reproducción simple de Sraffa, etc. Leyendo el libro se nota el esfuerzo de Sraffa porque el uso del instrumento formal apareciera lo menos posible, que se quedara entre bambalinas, aunque él debía tener sobre la mesa mucho de las matemáticas que sus amigos Besicovich, Ramsey y Watson le enseñaron y desarrollaron a partir de los problemas que el propio Sraffa les planteaba. Pero la aplicación de las matemáticas tiene sus límites. Uno de ellos es la indeterminación en el cálculo de los precios en la producción conjunta cuando hay más bienes y servicios que medios de producción; otros, las complicaciones formales a los intentos de dinamizar el modelo *esrafiano*, la pérdida de la razón-patrón cuando salimos de la producción simple, la imposibilidad de garantizar soluciones de los precios de equilibrio fuera del sistema de producción simple (sin Perron-Frobenius). En definitiva, lo avanzado por Sraffa es extraordinario, pero lo que falta por desarrollar es más. Y sin el uso adecuado del instrumento formal, imposible.

Otra virtud resultante del uso del álgebra matricial como instrumentos formal es la de que el valor concreto de las variables monetarias del modelo –precios, salarios, ganancias- surgen de la resolución simultánea del sistema de ecuaciones, sin que haya que establecer diferencias entre variables explícitas y implícitas, endógenas o exógenas, como ocurre con el modelo keynesiano (que en Keynes es una virtud por más que Hicks y demás intérpretes hayan intentado y conseguido aguar su contenido[48] en el modelo IS-LM). El uso de este instrumental permite elegir sin cambiar de instrumento cuál es en cada momento la variable implícita y cuál es la explícita, a diferencia, por ejemplo, del modelo de renta de la tierra de Ricardo-Pasinetti que hemos visto.

Más virtudes. El álgebra matricial permite contar las variables del modelo y el número de ecuaciones, y con ello saber los grados de libertad en que nos movemos. Es verdad que esto puede quedar establecido con formulaciones tradicionales del campo de la teoría de las funciones, pero sin ninguna versatilidad. Con el álgebra y el teorema de Perron-Frobenius sabemos, además de calcular un vector de precios estrictamente positivo en la producción simple, que la razón-patrón no es una variable más, sino una consecuencia de la matriz de medios $\boldsymbol{X}$ y de productos finales $\boldsymbol{Y}$, por lo que no pone ningún grado de libertad al sistema. Por ello en la producción simple puede eliminarse la influencia de los precios en el reparto del excedente y construir la mercancía-patrón a partir de los datos de la realidad. En la conjunta la cosa se complica porque ya no podemos aplicar el teorema tantas veces mencionado y la tasa máxima de ganancia –el equivalente a la razón-patrón en la producción simple- es, en principio, una variable más, por más que se pueda establecer su relación proporcional al excedente relativo.

En definitiva, el modelo económico creado por Piero Sraffa, intentando responder a algunas de los problemas planteadas por David Ricardo, pero yendo mucho más allá, permite construir una imagen borrosa de la realidad, pero de *toda* la realidad, para ir aumentando el número de píxeles de esa fotografía casi hasta donde queramos, llegando hasta la misma contrastación de hipótesis, puesto que la información con la que se trabaja es la misma que

[48] Esta es la tesis de Pasinetti en *Growth and Income Distribution. Essays in Economic Theory*, 1974

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

en los modelos Input-Output de Leontief. Pero, a diferencia de este último, detrás –o delante, como se prefiera- de los datos estadísticos hay un modelo económico que puede reclamarse como una alternativa a los fundamentos microeconómicos-marginalistas de la teoría económica ortodoxa. Mayor versatilidad es imposible. Queda desarrollar su modelo, a veces de forma alternativa y a veces de forma complementaria, con el corpus de conocimiento de la economía más tradicional que, aun cuando la mitad al menos es un cadáver pendiente de enterrar, la otra mitad (los fisiócratas, Ricardo, Keynes, Kalecki, Marx, la teoría de los juegos, como ejemplos) resulta valiosa, y más aún si Sraffa pone los fundamentos.

Anexo 1: Tres tasas de ganancia máxima en Sraffa y su significado

I – Tres tasas

Cualquiera que haya leído la obra de Sraffa *Producción de mercancías por medio de mercancías* le resultará sorprendente el título que encabeza este artículo. Los más avezados en la obra del turinés entenderán que una de las tasas máximas sea la razón-patrón ***R*** en la producción simple porque esta, dada las características *esrafianas* de esta producción, la tasa máxima de ganancia coincide con la razón-patrón. Entonces, ¿cuál es la tercera tasa máxima que emplea, utiliza o se deduce de la obra de Sraffa? Lo más sorprendente es que el propio Sraffa no reconocería estas tres tasas porque él cometió el error de identificar una de ellas con una de las otras dos. Estas tres máximas de ganancia son: la de *la razón-patrón* en la producción simple, la de *la tasa máxima de ganancia* en la producción conjunta y *la del recuento de los excedentes relativos*. Esta es la tercera tasa en cuestión y que veremos que es ¡sorprendentemente! distinta de las otras dos. Veamos una por una.

Razón patrón (***R***)

Es ya muy conocida y es el icono de la producción simple junto con *la mercancía-patrón*. Surge como una propiedad de la mercancía-patrón. Se define esta como aquella cesta de mercancías tal que el producto final de cada mercancía está en relación a la suma de esas mismas mercancías empleadas por el conjunto de los sectores (o procesos) en igualdad con el resto de las mercancías. Dicho de otra forma, que los excedentes relativos de todas las mercancías sean iguales entre sí. Es una cesta virtual porque sólo una casualidad imposible de considerar sería que tal circunstancia se diera en el mundo real. Pero que sea virtual no quiere decir que no surta efecto en el mundo de la teoría económica abierta por Sraffa. Su principal virtud: que, a la postre, le permite al italiano establecer una relación entre salarios y ganancias que no depende de las variaciones de los precios. Con ello, el sueño de Ricardo se ve cumplido a los 150 años de su muerte. La razón-patrón ***R*** se define a partir de las 4 ecuaciones siguientes:

(1) $$PY = (1+r) \times PX + wL$$

(2) $$PY = (1+g_m) \times P\,X$$

(3) $$PYI - PXI = 1$$

4) $$LI = 1$$

Y sin embargo esta razón-patrón ***R*** ¡no está… aún! en ninguna de este sistema de ecuaciones, en las que ***Y*** es la matriz ¡diagonal! ***n***x***n*** de productos finales, ***P*** el vector de precios **1**x***n***, ***r*** la tasa de ganancia, ***w*** la tasa de salarios y ***L*** el vector de inputs de trabajo **1**x***n***. La razón de ello es que en la ecuación (2) surge sólo de hacer cero la tasa de salario ***w*** en (1). Sraffa creía que $\boldsymbol{g}_m$ era la razón-patrón ***R*** y lo razona desde el punto de vista económico en el capítulo V de su obra que trata del "carácter único del sistema patrón". Dice Sraffa en ese capítulo que "*puede demostrarse que el valor de **R** al que corresponden todos los precios positivos es el mínimo de todos los k posibles*"[49]. Veremos que la frase de Sraffa es totalmente desafortunada porque es falsa, a pesar de lo cual, su obra avanza genialmente hasta el mismo apéndice B de los productos que se auto-reproducen. Nos quedamos de momento con esto y avanzamos por nuestra parte que la razón-patrón se obtiene del sistema de ecuaciones:

(5) $$uYQ = XQ$$

(5bis)[50] $$LQ = 1$$

---

[49] Pág. 51 de *PMPM*. En Oikos-Tau. Tal es así que Sraffa, según criterio de Bertram Schefold, nunca conoció el teorema de Perron-frobenius. Dice Schefold en *Joint Production: Triumph of Economic over Mathematical logic*?: "Perron published his theorem in 1909, Frobenius his in 1912 in Germany. Several others proofs were published around 1950, but neither Sraffa nor his mathematicians took notice of them", pag. 175, Routledge, 2009. Sin embargo, Kurz y Salvadori recogen lo contrario en *Sraffa and the mathematicians: Frank Ramsey and Alister Watson* cuando dicen que "As regards the second remark, as reported by Sraffa, we do not know,of course, what was at the back of Ramsey's mind. However, had the starting point of his remark been the Perron-Frobenius Theorem, then things would have been crystal clear. Yet in this case he could have been expected to draw Sraffa's attention to the existence of this theorem, which is a most powerful tool to solve the kind of problems Sraffa was interested in. There is no evidence to this effect; on the contrary, Sraffa's papers would seem to imply that none of his mathematical friends referred him to this theorem". Parece pues que, a pesar de los esfuerzos de sus amigos –especialmente del sufrido Ramsey- y a pesar de que el teorema dejaba claro el problema ("cristal clear"), Sraffa no lo tuvo en cuenta. El problema es que no parece que fuera consciente de las consecuencias de esta omisión a lo largo del texto, porque ello le obligó a un esfuerzo explicativo que, a pesar de sus errores formales, dio como resultado un libro (*Producción de*…) de economía y no sólo un mero modelo matemático a la manera de Von Neumann. No ha bien que por mal no venga.

[50] La ecuación **LQ**=**1** es una genialidad más de Sraffa porque permite añadir una ecuación al sistema de (5) cuando lo necesitaba sin añadir ninguna nueva variable. En efecto, los inputs $\mathbf{l}_i$ de trabajo se consideran constantes y el vector de multiplicadores **Q** ya han aparecido en (5). La necesidad de una nueva ecuación se derivaba de que en (5) hay **n** ecuaciones, pero sólo **n-1** variables: el autovalor **u** y los **n** multiplicadores $\mathbf{q}_j$. Al añadir la ecuación (5bis) a las **n** ecuaciones de (5), el número de ecuaciones se iguala con el de incógnitas y el sistema tiene –o puede tener- solución. Además, como subproducto de este proceder, se incorporan los inputs de trabajo que, de lo contrario, no hubieran jugado ningún papel, lo cual dejaría al sistema patrón y a la propia mercancía patrón (5) bajo sospecha.

junto con (2). En (5), $\boldsymbol{u}$ es el autovalor máximo de la matriz $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1}$ y $\boldsymbol{Q}$ es el vector columna $\boldsymbol{n}$x**1** de multiplicadores que sirven para construir la mercancía-patrón que es el sistema (5) de $\boldsymbol{n}$ ecuaciones. El sistema (5) se ha obtenido previamente de $\boldsymbol{uY}=\boldsymbol{X}$, siendo $\boldsymbol{u}=\mathbf{1}/(\mathbf{1}+\boldsymbol{R})$, que es la definición de razón-patrón, la matriz $\boldsymbol{A}$ de requerimientos sale de post-multiplicar $\boldsymbol{uY}=\boldsymbol{X}$ por $\boldsymbol{Y}^{-1}$. Pues bien, si ahora pre-multiplicamos por los precios $\boldsymbol{P}$ la (5) y pos-multiplicamos la (2) por los multiplicadores $\boldsymbol{Q}$ queda:

(6) $$uP\,(YQ\,)=P(\,XQ\,)$$

(7) $$(PY)Q=\left(1+g_m\right)(PX\,)Q$$

Y los sistemas de ecuaciones (6) y (y) son el mismo si hacemos que $\boldsymbol{u}=\mathbf{1}/(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}_\mathrm{m})$, o de otra manera, $\boldsymbol{g}_\mathrm{m}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{u})/\boldsymbol{u}$. Sraffa no nos dice nada de esto porque en ningún momento emplea –aunque lo conociera porque tuvo 3 magníficos matemáticos que le asesoraron[51]- el teorema de Perron-Frobenius. Este teorema nos dice que, dada una matriz $\boldsymbol{A}$ (en este caso concreto, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1}$) cuadrada, positiva e irreducible (versión fuerte del teorema) existen dos autovectores de $\boldsymbol{A}$ (una por la izquierda y otro por la derecha) y un autovalor -que es el máximo de los autovalores-, tal que es el único de los autovalores que haces que esos dos autovectores (en este caso, los precios y/o los multiplicadores) sean estrictamente positivos. Sraffa no sólo no habla de todo esto, sino que no lo emplea, y construye su razón-patrón como el menor de lo $\boldsymbol{k}$, es decir, el menor de los excedentes relativos posibles. Al sostener la igualdad $\boldsymbol{g}_\mathrm{m}=(\mathbf{1}-\boldsymbol{u})/\boldsymbol{u}$ merced al teorema mencionado, llegamos a que $\boldsymbol{g}_\mathrm{m}=\boldsymbol{R}$, es decir, a la razón-patrón, cosa que cree llegar Sraffa mediante el que hemos llamado *método del recuento de los excedentes relativos*. Y con ello estamos ya en la razón-patrón $\boldsymbol{R}$ como –además- *tasa máxima de ganancia* $\boldsymbol{g}_\mathrm{m}$. Sraffa plantó la semilla -que era lo importante- aunque la plantara en lugar equivocado. Llegado a ese punto de igualdad entre excedente y tasa máxima, la razón-patrón deja de ser una variable monetaria para convertirse en una variable que depende sólo de los medios $\boldsymbol{X}$, de los productos finales $\boldsymbol{Y}$ y de los inputs de trabajo $\boldsymbol{L}$ (merced al numerario $\boldsymbol{L}\mathbf{I}=\mathbf{1}$)

Tasa de ganancia máxima ($\boldsymbol{g}_\mathrm{m}$)

Esta tasa surge también de hacer cero la tasa de salarios en la ecuación de definición del sistema, pero en el sistema de producción conjunta. Este sistema lo caracteriza Sraffa como aquel en el que "*dos mercancías son producidas conjuntamente por una sola industria*"[52]. Es el caso más simple, pero a partir de él podemos decir que un sistema de producción conjunta es aquel en el que $\boldsymbol{n}$ industrias, sectores o procesos producen hasta $\boldsymbol{m}$x$\boldsymbol{n}$ posibles productos finales. La ecuación que define el sistema de producción conjunta –versión Sraffa- es similar a de la producción simple:

---

[51] Besicovitch, Ramsey y Watson. Es el propio Sraffa quien hace reconocimiento a estos matemáticos.

[52] Pág. 67 de *PMPM.*

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

(8) $$PY = wL + (1+r)PX$$

pero con la notable diferencia de que, en este caso, la matriz ***Y*** *no* es una matriz diagonal, sino una matriz con posibles ***n***x***n*** elementos positivos. Ello da lugar a una matriz de requerimientos ***A***=***XY***$^{-1}$ en la que ya *no* podemos asegurar que todos sus elementos $\boldsymbol{a}_{ij}$ sean todos positivos, razón suficiente para que ya no se pueda aplicar el teorema de Perron-Frobenius, con lo cual no tenemos autovalor que de lugar a precios estrictamente positivos o, alternativamente, unos multiplicadores todos positivos. Sraffa no emplea estos argumentos al no considerar el teorema y recurre para ello al método del menor de los excedentes relativos. Es verdad que con ello llega también a un vector de precios estrictamente positivo, pero se equivoca al considerarlo como condición necesaria para obtener el vector positivo cuando en realidad es una condición suficiente. Por eso no es errónea lo que dice Sraffa en el comienzo del capítulo VIII: "*tan pronto como consideramos en detalle la construcción de un sistema patrón con productos conjuntos, resulta obvio que puede que algunos de los multiplicadores tengan que ser negativos*"[53]. De (8) –al igual que de (1) – se obtiene la ecuación de precios:

(9) $$P = wLY^{-1}\left[I-(1+g)A\right]^{-1}$$

pero donde, al estar en la producción conjunta, ya no podemos asegurar que todos los elementos de ***A=XY***$^{-1}$ sean positivos; tampoco podemos de los ***LY***$^{-1}$. El resultado es que ya no se puede garantizar que todos precios sean positivos en (9).

Ahora, al hacer cero los salarios y tomar como numerario[54] el valor de los medios de producción, es decir, al hacer ***PX*I**=**1** (primer numerario) en (8) y ***L*I**=**1** (segundo numerario) obtenemos:

(10) $$PXI = \frac{w}{g_m - g} = 1$$

Y si ahora despejamos la tasa de salarios de (10) en (9) queda:

(11) $$P = (g_m - g)LY^{-1}\left[I-(1+g)A\right]^{-1}$$

que en términos de tasas de ganancia máximas $\boldsymbol{g}_m$ (tercer numerario) queda lo habitual:

[53] Pág. 71 de *PMPM.*
[54] En este caso la tasa de ganancia de la producción conjunta $\mathbf{g}_m$ no es comparable a la de la producción simple no sólo por los supuestos sobre la matriz **Y** de productos finales ya comentado, sino porque también en la producción simple se ha tomado como numerario el productos neto, es decir, **PYI-PXI**, mientras que en la producción conjunta se ha tomado **PXI**.

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

(11bis) $$\frac{P}{g_m} = (1 - \frac{g}{g_m}) \times LY^{-1}\left[I - (1+g)A\right]^{-1}$$

donde los precios se determinan en función de la tasa máxima de ganancia en este modelo de producción conjunta y donde, como queda dicho, no se pueden asegurar que todos sean positivos. Esta es la diferencia con la producción simple.

Tasa de ganancia-recuento (***k***)

Ya ha salido antes, pero la cuestión es que Sraffa nunca utilizó a Perron-Frobenius y creyó que su método de recuento de los excedentes relativos era equivalente al del teorema. O al menos hay que suponer que conocía el teorema y no lo quiso utilizar para evitar que su obra se deslizara hacia un mero modelo matemático a la manera del de Von Neumann o los de equilibrio general a la manera de Walras. Para Sraffa la razón-patrón es igual al mínimo de los excedentes relativos de todas las mercancías. Es decir:

(12) $$k = menor \;\; k_i = \frac{Y_i - \sum_{j=1}^{n} X_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} X_{ij}} \quad \forall i = 1 \; a \; n$$

Sraffa razona que si la tasa de ganancia es menor o a lo más igual que esta tasa basada en el recuento de los excedentes relativos, los precios no podrán ser negativos en la producción simple. Para la producción conjunta ya queda dicho que Sraffa, con acierto, razona que ya no se puede asegurar que todos los precios sean positivos por los efectos indirectos de las diferentes proporcionalidades de los medios en relación a los productos todos aquellos que intervienen en la producción, sea de forma directa y/o indirecta. Veremos que esto es sólo una verdad a medias. Resulta sorprendente que ningún crítico o historiador de Sraffa se haya dado cuenta de este hecho. El caso es que no afecta a las conclusiones económicas de Sraffa en toda su obra, pero sí en la base formal de su sistema.

Relación entre estas tres tasas

La pregunta que surge llegado este punto es: ¿Qué relación guardan estas tres tasas? ¿Pueden compararse o pertenecen a supuestos diferentes que no admiten comparación? Veamos un sistema de ecuaciones que nos van a permitir comparar la tasa de ganancia máxima y la razón-patrón. Damos el sistema de ecuaciones para posterior explicación:

(13) $$P_N Y_N + PY = wL + (1+g)PX$$

(14) $$P_N Y_N + PY = (1+g_m)PX$$

(15) $$PY = (1+R)PX$$

(16) $$PYI - PXI = 1$$

(17) $$LI = 1$$

En este sistema hay bienes no-básicos representados por la matriz $\boldsymbol{Y}_N$ de dimensiones $\boldsymbol{m}$x$\boldsymbol{n}$ y sus respectivos precios $\boldsymbol{p}_m$ representados por el vector $\boldsymbol{P}_N$ de dimensión **1**x$\boldsymbol{m}$. El resto de las ecuaciones ya han sido comentadas, y especialmente el hecho de que, a pesar de estar en la producción conjunta por existir bienes no-básicos "desgajados" de los básicos, la matriz $\boldsymbol{Y}$ de productos finales es, en este caso, una matriz diagonal[55] (como en la reproducción simple). Del conjunto de las ecuaciones anteriores obtenemos:

(18) $$P_N Y_N I = (g_m - R)PXI$$

Y en (18) se aprecia claramente que si se quiere que el valor del conjunto de los bienes de consumo (no-básicos, dicho con más propiedad) $\boldsymbol{P}_N \boldsymbol{Y}_N \mathbf{I}$ sea mayor que cero, ha de ocurrir que la tasa de ganancia $\boldsymbol{g}_m$ sea mayor que la razón-patrón $\boldsymbol{R}$, es decir, que:

(19) $$si \quad P_N Y_N I >= 0 \Rightarrow g_m >= R$$

En (19) vemos la ventaja de la razón-patrón $\boldsymbol{R}$ sobre la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$, porque, sin necesidad de que el sistema haga desaparecer los salarios (criterio de la tasa máxima), se puede obtener un vector de precios positivos porque eso nos lo asegura la razón-patrón, que es a la vez una medida del excedente y la tasa máxima de ganancia. No es pues necesario llevar la tasa de ganancia g a su máximo $\boldsymbol{g}_m$ para dar con un vector de precios todos estrictamente positivos. En el caso de que fueran cero los productos no básicos habríamos llegado al paraíso esrafiano de la producción simple porque, recordémoslo, en este modelo propuesto, la matriz de productos finales no es diagonal, sino que puede tener todos sus elementos un valor positivo.

Ahora vayamos a la tasa de ganancia basada en el recuento de los diferentes excedentes relativos y que hemos visto en (12):

(20) $$k = el \; menor \, de \; todos \, los \; k_i = \frac{Y_i - \sum_{j=1}^{n} X_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} X_{ij}} \quad \forall i = 1 \; a \; n$$

55 Este supuestos es fundamental y único para poder encauzar en un mismo sistema de ecuaciones la razón-patrón y la tasa máxima de ganancia. Si **Y** no fuera diagonal como en la producción conjunta típicamente esrafiana, entonces ya no tenemos mercancía-patrón; aún así se puede concebir la mercancía-patrón, pero con el inconveniente señalado por el propio Sraffa de que algunos de los multiplicadores fueran negativos.

La ecuación (20) en términos matriciales puede expresarse como:

(21) $$PY = P(I + K)X$$

siendo ***K*** la matriz diagonal formado por los ***n*** excedentes relativos $\boldsymbol{k}_{ii}$. Ahora, si comparamos (21) con (15) se obtiene:

(22) $$PY = P(I + K)X = (1 + R)X$$

Y si en (22) no tomamos los ***n*** diferentes excedentes relativos $\boldsymbol{k}_{ii}$ sino el menor de todos ellos, es decir, ***k***, de acuerdo con (20), lo que tenemos es:

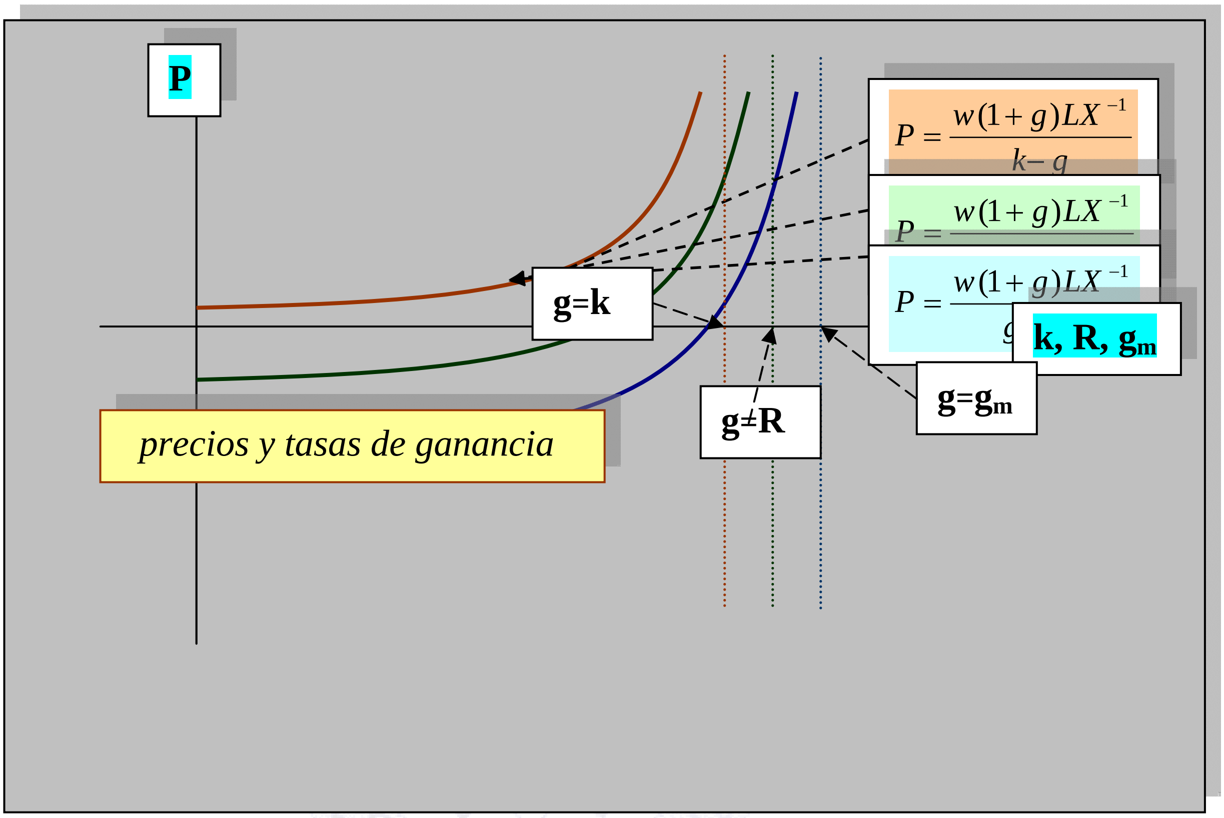
(23) $$P(I + k)X =< (1 + R)PX \;\Rightarrow\; k =< R$$

Y el resultado de unir (23) a (19) queda la notable:

(24) $$\boxed{k =< R <= g_m}$$

que es la relación que queríamos obtener. Nos dice que la tasa de de ganancia máxima $\boldsymbol{g}_m$ es mayor que la razón-patrón ***R*** y que esta lo es de la tasa-recuento ***k*** (Sraffa), aunque podría haber algún caso extremo en que fueran iguales. En el método de recuento de Sraffa resultó válido como condición *suficiente* porque nos asegura precios positivos, pero falla como condición *necesaria* porque es demasiado exigente, puesto que no es necesario tomar el menor de todos los excedentes relativos para tal fin, sino que basta con la razón-patrón ***R*** (en la producción simple) como medida del excedente y como tasa máxima $\boldsymbol{g}_m$; el método de la tasa de ganancia máxima falla si podemos aplicar la razón-patrón (en el caso especial de producción simple con bienes no-básicos) porque cuando llevamos la tasa de ganancia ***g*** a la tasa máxima de ganancia $\boldsymbol{g}_m$ –y por tanto traspasamos el límite de la razón-patrón ***R***– algunos de los precios pueden hacerse negativos antes de llegar a esa tasa máxima. Sólo la razón-patrón nos asegura precios positivos sin partir del mínimo de los excedentes relativos y sin llegar al máximo de la tasa de ganancia. Cuando, por las características del sistema que hemos definido con nuestros conceptos, reglas y ecuaciones, no podemos aplicar Perron-Frobenius, tenemos que recurrir a lo que decía Sraffa, es decir, a que serán los propios empresarios y/o actores de la escena económica los que evitarán llegar a extremos como precios negativos o precios tendentes al infinito (las habas del apéndice B del libro de Sraffa).

Parecería por la discusión anterior y las variables implicadas que estamos muy alejados de la realidad y que hubiéramos sacrificado ésta en aras de lo explicativo porque: 1) empleamos tasas unitarias para salarios y ganancias; 2) porque la mercancía-patrón es una construcción virtual. Pues nada de eso. La realidad está inserta en el modelo porque, sin dejar de serlo, podemos hacer las cosas siguientes: 1) podemos arribar a las tasas unitarias mediante ecuaciones de tipo $\boldsymbol{wLI}=\boldsymbol{LWI}$ y $\boldsymbol{wLI}+(\mathbf{1}+\boldsymbol{g})\boldsymbol{PXI}=\boldsymbol{LWI}+\boldsymbol{PX}(\mathbf{I}+\boldsymbol{G})\mathbf{I}$; 2) podemos partir de salarios *pre-factum* en lugar de los *post-factum* habituales *esrafianos*, es decir, incluir en las tasas de ganancia todos los costes, es decir, hacer que $\boldsymbol{PY}=(\boldsymbol{LWI}+\boldsymbol{PXI})(\mathbf{I}+\boldsymbol{G})$; 3) porque podemos hacer que $\boldsymbol{Y}_N$ no sea cuadrada, con $\boldsymbol{m}$x$\boldsymbol{n}$ mercancías distintas de $\boldsymbol{n}$ sectores (o procesos) sin que varíen las conclusiones; 4) porque la matriz $\boldsymbol{W}$ tampoco tiene que ser cuadrada, puesto que no requerimos su inversa; 5) porque podemos tomar $\boldsymbol{n}$ tasas máximas de ganancia mediante $(\mathbf{1}+\boldsymbol{g}_m)\boldsymbol{PX}=\boldsymbol{PXI}(\mathbf{I}+\boldsymbol{G}_m)$; 6) porque $\boldsymbol{g}_m$ es dependiente de $\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X})$, es decir, de los valores físicos de medios, productos e inputs de trabajo (merced al numerario[56] $\boldsymbol{LI}=\mathbf{1}$).



Anexo 2: Perron-Froebenius y una pista para el teorema del punto fijo

Los tratamientos sobre el equilibrio general competitivo de *Debreu*, *Arrow* y *Hahn*, etc., suelen estructurarse de forma axiológica, enumerando las hipótesis formales para llegar a las conclusiones. Nada más alejado del interés de Sraffa. El italiano parte, camina y concluye en el mundo de las proposiciones económicas, aunque se tenga que atener a la disciplina de las matemáticas o, al menos, utilizarlas como mero instrumento para no errar en las conclusiones. Ambos métodos tienen sus ventajas e inconvenientes, además de que siempre se ha de distinguir entre el método de investigación y el de exposición. Visto el desarrollo de su libro, Sraffa fue sacando a la luz sus conclusiones sin tener un

[56] Tomar un numerario es una manera de decir que una ecuación –todas si hay más de una- han sido divididas por la expresión del numerario. En este caso, que hemos divido todas las ecuaciones entre **LI**. También lo hemos tomado otros numerarios compatibles con el anterior puesto que en ningún caso se repiten las variables.

conjunto axiomático de hipótesis que le iluminaran al final del túnel. Por eso tuvo que rectificar, por ejemplo, su consideración sobre los bienes básicos y no básicos cuando abordó la producción conjunta y/o se vio contrariado con su propia definición, aun cuando ésta la tuviera *in mente* desde el principio. También demuestran estos avances y titubeos con las consideraciones en el *apéndice B* de su libro *Producción de mercancías por medios de mercancías* cuando convirtió -en mi opinión con acierto- en un apéndice lo que en un principio debía ser sólo una nota a pie de página. A pesar de ello, hay que agradecer a Sraffa que fuera mostrando sus resultados a medida que los descubría, porque ello ha resultado mucho más pedagógico. Ha sido y es una de las tareas de sus epígonos: matizar sus hipótesis si son incoherentes con sus fines, solucionar sus errores y desarrollar su obra. Lástima que esos desarrollos -aún muy insuficientes- no hayan llegado a los manuales universitarios de economía y sólo han quedado para tesis doctorales o artículos con los que aumentar algún currículo. Siguiendo con el contenido de lo que veníamos comentado, no tiene Sraffa un desarrollo axiomático que nos permita cerciorarnos de que su sistema parte, conduce y llega a un equilibrio, aunque no tenga sentido llamarle en principio *competitivo*. Mi opinión es que tampoco es incompatible con él, porque las cantidades de medios, productos e inputs de trabajo están dadas. De hecho sí se puede afirmar que Sraffa trabaja siempre -e incluso cuando reduce el capital a trabajo fechado- con un conjunto de ecuaciones que implican un equilibrio. Ello es posible por dos cosas: 1) las variables *no* están fechadas; 2) el vector de precios de productos finales es el mismo que el vector de medios. Sin embargo, Sraffa ni siquiera hizo en su libro consideración o mención alguna al respecto, aún cuando los avances sobre los aspectos formales de los equilibrios competitivos se estaban produciendo al mismo tiempo que el desarrollaba su obra[57]. Las razones pueden ser varias, además quizá del desconocimiento que tuviera sobre estos tratamientos axiológicos. Una razón profunda es la absoluta diferencia que tiene la consideración de los precios entre los análisis mencionados y lo que pretendía Sraffa: para los primeros, los precios son la guía de la asignación de los recursos y baremo de la escasez, mientras que para el italiano los precios son meros *coeficientes* de intercambio. Empleo el término *coeficiente*, consciente de que Sraffa no emplea un término ni parecido (podría ser *ratio*, por ejemplo), porque probablemente su temor a sufrir un rechazo -por si no bastaba ya el sufrido- por parte de sus compañeros de profesión que fuera total. Sraffa los llama *precios de producción*, a pesar de que no tiene una teoría de los costes ni trabaja con funciones de producción explícitas. En realidad el nombre le debió importar poco. El norte de Sraffa, como ya he señalado en otros artículos, era doble: el estudio del excedente, su distribución y sus límites, y el mayor -y definitivo- ataque a la teoría de la producción neoclásica-marginalista. Sin embargo, al centrarse en estas dos cuestiones, creo que no se dio cuenta de que su modelo se acercaba a los desarrollos del equilibrio general de la época, que -y esta es una opinión muy personal- y compartía con ellos lo que supone un ataque a la teoría del capital y, en general, del mercado competitivo de la economía, por la necesidad de hacer explícitos los teóricos del equilibrio competitivo los supuestos vaporosos y paradójicos en los que se sustentaban la microeconomía de entonces (de *Marshall*) cuando se pasaba del análisis

[57] Véase la Introducción histórica de la obra de Arrow y Hahn *Análisis General Competitivo.*

Publicación asociada a la Revista *Nomads. Mediterranean Perspectives* | ISSN 1889-7231

parcial al general. En concreto, Sraffa no menciona nunca nada referido al teorema[58] de *Perron-Frobenius.* Cuando Sraffa plantea la ecuación:

(1) $$PY = (1+R)PX$$

como hemos visto que surge a su vez de la ecuación de definición de su sistema al hacer cero la tasa de salarios, está planteando una relación de equilibrio no demostrada, porque los precios son los mismos en el lado izquierdo de la ecuación (productos finales ***Y***) de los del lado derecho (medios de producción ***X***). Ya hemos comentado que las preocupaciones de Sraffa son otras, pero la visión actual, para poder propiciar el avance de sus modelos, deber ser también otra. Si llamamos como siempre ***A*** a la matriz de requerimientos tal que ***X***=***AY***, por lo que ***A***=***XY***$^{-1}$, la (1) se transforma en:

(2) $$P = (1+R)PA$$

Hemos visto que ***R*** surge de la resolución de un sistema de ecuaciones tales como ***YQ***=(**1**+***R***)***XQ*** y ***LQ*****I**=**1**, siendo ***Q*** el vector ***n***x**1** de multiplicadores, por lo que ***R***=*f*(***L***,***Y***,***X***), y *no de los precios* **P**. Si ahora reemplazamos los precios ***P*** de la ecuación (2) en el lado derecho de la misma ecuación de forma reiterada, llegaríamos a una función tal como:

(3) $$P = (1+R)^n PA^n$$

Esta aplicación transforma precios (el conjunto ***P***=dominio de definición de la aplicación) en (**1**+***R***)^{n}***PA***^{n} (conjunto imagen). Parecería que fuéramos bien para llegar al terreno del teorema de Kakutani, pero no es así porque dado que ***R*** ha de ser mayor que cero, el conjunto imagen es mayor que el conjunto dominio y todo se va al garete. Eso no ocurrirá si hacemos directamente que (2) sea:

(4) $$P = \frac{1+r}{1+R} PA$$

con tal de que ***r***<=***R***. Y tras sucesivas sustituciones de ***P***:

(5) $$P <= \left(\frac{1+r}{1+R}\right)^n PA^n$$

Se ha añadido la posibilidad del menor porque ello es imprescindible para aplicar Kakutani, por lo que (5) es una construcción (una aplicación) inspirada en (3), pero no deducida estrictamente de (3). Falta aún una cosa para acotar el conjunto de precios ***P***, objeto de la aplicación: dividir cada precio por la suma de todos ellos:

[58] *Sraffa and the mathematicians: Frank Ramsey and Alister Watson* , por Kurz y Salvadori.

(6) $$P_{Fi} = \frac{P_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$$

o en términos matriciales:

(6 bis) $$P_F = \frac{1}{PI} \times P$$

por lo que (5) quedaría:

(7) $$P_S <= \left(\frac{1+r}{1+R} \right)^k P_F A^k$$

Con (7) tenemos una posible aplicación que cumple el teorema de Kakutani si: ***r***<=***R***, si $\boldsymbol{A}^{k+1}$<$\boldsymbol{A}^{k}$ para ***k***=**1** a ***n*** y $\boldsymbol{P}_{\mathrm{Fi}}$>=**0** para ***i***=**1** a ***n***. De (7) se puede decir que es una correspondencia continua (semicontinua por arriba) que proyecta puntos de un conjunto cerrado, acotado y convexo (los precios $\boldsymbol{P}_{\mathrm{F}}$) en un subconjunto del anterior (los precios $\boldsymbol{P}_{\mathrm{S}}$), también convexo, tal que tiene un punto fijo[59], es decir, que ocurre que:

(8) $$\boxed{P_F <= \left(\frac{1+r}{1+R} \right)^k P_F A^k}$$

Dicho de otra manera, que existe un vector $\boldsymbol{P}_{\mathrm{S}}$ en la imagen del conjunto correspondiente mediante la transformación (7) que hace que ***S***=***R***, es decir, que $\boldsymbol{P}_{\mathrm{S}}$= $\boldsymbol{P}_{\mathrm{F}}$. Hay que demostrar rigurosamente que (7) es una aplicación continua, cerrada, acotada y convexa. Sólo unos apuntes al respecto. La aplicación es continua[60] si trabajamos con número reales para los precios y la función es continua; es acotada por (6), es decir, porque hemos tomado como numerario la suma de los precios originales, con lo cual la suma de los precios transformados en (6) vale **1**; es cerrada porque el signo de (7) es *menor o igual*, con lo cual todos los puntos de acumulación de $\boldsymbol{P}_{\mathrm{F}}$ pertenecen al dominio de definición; por último es convexa porque una combinación lineal del lado derecho de la aplicación (7) pertenece a su vez al dominio de definición si la combinación lineal se hace con dos coeficientes tales como ***m*** y **1**-***m***, para ***m*** tal que **0**<=***m***<=**1**.

Hay que pensar que no hubiéramos llegado a *Kakutani* si no hubiéramos partido de Perron-Froebenius para obtener un ***R*** independiente de los precios, lo cual implica que ***A*** ha de ser cuadrada, no negativa y reducible (versión débil

[59] Para la definición de teorema del punto fijo véase la pág. 136 del libro anterior mencionado de Arrow y Hahn.
[60] La condición necesaria -pero no suficiente- para que una función sea continua es que su dominio de definición y su imagen pertenezcan al conjunto de los números reales. Este hecho no se suele resaltar en los manuales de matemáticas, que suelen recaer la responsabilidad de la continuidad de las funciones en la forma de éstas.

del teorema) para obtener un conjunto de precios (autovector de ***A***) no negativo, con el añadido posterior que ha de ser productiva, es decir, que se cumpla que $\boldsymbol{A}^{k+1}<\boldsymbol{A}^{k}$ si se quiere que ***R*** sea mayor que cero[61].

Bibliografía

Afriat, S.: "Sraffa´s Prices", Universitá degli Studi di Siena, quaderni 474. www.econ-pol.unisi.it/quaderni/474.pdf

Barceló, A. y Sánchez, J.: "Teoría económica de los bienes autorreproducibles", Edit. Oikos-Tau, 1988.

De Lorenzo, Javier: "Fundamentos y enigmas en la matemática. De Kant a Frege", 2010, U. de Valladolid.

Garegnani, P.: "El capital en la teoría de la distribución", 1982, ed. Oikos-Tau ("Il capitale nelle teorie delladistribuzone", 1982)

Garegnani, P.: "Heterogeneous Capital, The Production Function and the Theory Distribution", 1970

Garegnani, P.:"Professor Samuelson on Sraffa and the Clasical Economists", The European Journal of the History of Economic Thought, 2007.

Gehrke, Ch.y Kurz, D.: "Sraffa on von Bortkiewicz". Está en la red: http://www.newschool.edu/cepa/events/papers/050509_Bortkiewicz.pdf

Kurz, Pasinetti, Salvador y otros: "Piero Sraffa: The Man and the Scholar", Routledge, 2008.

Kurz y Salvadori: "Sraffa and the mathematicians: Frank Ramsey and Alister Watson", en "Piero Sraffa´s Political Economy, edit Routledge,

Kurz, D. Heinz: "Critical Essays on Piero Sraffa´s Legacy in Economics", 2000, Cambrigde University Press.

Kurz, D. Heinz; Salvadori, Neri: "Theory of Production", 1997.

[61] El teorema de Perron-Frobenius asegura un autovector de precios positivo (si es **A** es reducible), pero no asegura que el autovalor máximo sea menor que uno. Esto lo asegura la productividad del sistema.

Kurz, Schefold, Salvadori: "Sraffa or an alternative economics", 2008, edt. Palmagrave Macmillan.

Marx, Carlos: "El Capital", en el FCE, traducción de Wenceslao Roces.

Meek, R.: "Mr. Sraffa´s Rehabilitationof Classical Economics", 1961.

Mendoza, Gabriel: "La transformación de valores en precios de producción", 1997
http://www.izt.uam.mx/economiatyp/numeros/numeros/10/articulos_PDF/10_2_La_transformacion.pdf

Mora Plaza, A.: "Sobre la transformación de valores a precios":
http://www.eumed.net/ce/2009b/amp2.htm
http://revistas.ucm.es/cps/15786730/articulos/NOMA1010140379A.PDF

Mora Plaza, A.: "Notas sobre el teorema fundamental marxiano"
http://www.eumed.net/ce/2009b/amp.htm
http://econpapers.repec.org/article/ervcontri/y_3a2009_3ai_3a2009-10_3a22.htm

Morhisima, M.: "La teoría económica de Marx" (*Marx´s Economics, 1973*), 1977, pág. 15, edit. Tecnos.

Moseley, F.: "El método lógico y el problema de la transformación".
http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm

Murga, Gustavo: "Piero Sraffa".
http://marxismo.cl/portal/index.php?option=com_content&task=view&id=100&Itemid=1

Neri, Salvador: "Besicovitch, Sraffa and the existence of Standard Commodity", 2010:
http://host.uniroma3.it/eventi/sraffaconference2010/abstracts/pp_salvadori.pdf

Okishio, N.: "A mathematical note on marxian theorems", 1963.

Pasinetti. L.: "Critical of the neoclassical theory of growth and distribution". Está en la red:
http://www.unicatt.it/docenti/pasinetti/pdf_files/Treccani.pdf

Pasinetti, L.: "Structural Change and Economic Growth: a theoretical essay on the dynamics of Wealth of Nations", 1981, Cambridge University Press.

Pasinetti, L.: "Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth", 1961/2.

Pasinetti, L.: "Switches of technique and the rate of return in Capital Theory", 1969.

Pasinetti, L.: "Crecimiento económico y distribución de la renta" ("*Growth and Income Distribution*", 1974), 1978, Alianza Editorial.

Pasinetti, L.: "Lecciones de teoría de la producción" ("*Lezioni di teoria della produzioni*", 1975), 1983, FCE.

Peris i Ferrando, J.E: "Análisis de la resolubilidad de modelos lineales de producción conjunta", 1987, en internet: http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/3829/1/Peris%20Ferrando,%20Josep.pdf

Pivetti, M.(coordinador): "Contribuciones para una biografía intelectual", 2008, edit. Universidad Nacional Autónoma de México.

Potier, J.P.: "Piero Sraffa", 1994, edicions Alfons Magnànim.
Roncaglia, Alessandro: "Piero Sraffa", Edit. Palgrave MacMillan, 2009.

Roncaglia, Alessandro: "Sraffa and the Theory of Prices", 1978 [*Sraffa e la teoria dei prezzi*, 1975]

Samuelson, Paul: "Understanding the Marxian notion of Exploitation", 1971.

Sánchez Choliz, Julio: "La razón-patrón de Sraffa y el cambio técnico", 1989, Investigaciones Económicas, 2ª época, Vol. XIII. ftp://ftp.funep.es/InvEcon/paperArchive/Ene1989/v13i1a7.pdf

Schefold, Bertram: "Mr. Sraffa on Joint Production", 1971

Steedman, I.: "Marx, Sraffa y el problema de la transformación" (*Marx after Sraffa, 1977*), 1985, F.C.E.

Subiza Martínez, B.: "Juegos matriciales y su aplicación a la teoría Perron-Frobenius", U. de Alicante; http://www.ine.es/revistas/estaespa/112_3.pdf

Solow, R.: "The interest rate and transition between techniques", 1967.

Sraffa, Piero: "Produción de mercancías por medio de mercancías" (*Production of commodities by means commodities, 1960*), 1975, Oikos-Tau.

Vegara, J. M.: "Economía política y modelos multisectoriales",1979, edit. Tecnos.

Varios: "Matemáticas avanzadas aplicadas a la Economía", UNED, 2001.

Woods, J. E.: "The Production of Commodities. An Introduction to Sraffa", 1990, edit. MacMillan,.