CON-TEXTOS KANTIANOS.
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 161-189
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775988

La Filosofía de la Aritmética de Kant[1]

CHARLES PARSONS

Universidad de Harvard, USA

(Traducción de Edgar J. Valdez[*])

El interés y la influencia de la filosofía de Kant en su conjunto han sido ciertamente lo suficientemente grandes como para que esto por sí solo sea suficiente para hacer que la filosofía de la aritmética de Kant sea de interés para los eruditos históricos. También es posible mostrar la influencia de Kant en varios escritores posteriores importantes sobre los fundamentos de las matemáticas, de modo que Kant tenga importancia específicamente como figura en la historia de la filosofía de las matemáticas. Sin embargo, mi propio interés en este tema ha sido animado por la convicción de que incluso hoy lo que Kant tiene que decir sobre las matemáticas, y la aritmética en particular, es de interés para el filósofo, no solo para el historiador de la filosofía. Sin embargo, no sé cuánto argumento será el siguiente para esto.

Kant no discute la filosofía de la aritmética en gran medida, por lo que es prácticamente imposible entenderlo sin utilizar otro material. Lo que he usado consiste principalmente en dos consideraciones: la integración de la filosofía teórica de Kant como un todo, y el conocimiento moderno sobre los fundamentos de la lógica y las matemáticas. La justificación para usar el segundo es doble: primero, creo que la experiencia muestra que uno no llega lejos en la comprensión de un filósofo a menos que uno trate de pensar los problemas por sus propios méritos, y en esto debe usar lo que sabe; segundo, si hoy se toma a Kant en serio como filósofo de las matemáticas, uno debe confrontarlo con este

[1] Una versión anterior de este ensayo fue escrita mientras el autor era George Santayana Becario en filosofia en Harvard University y presentada en conferencias en 1964 a la Universidad de Ámsterdam y la Netherlands Society for Logic and the Philosophy of Science. Estoy en deuda con J.J. de Iongh, J.F. Staal y G.A. van der Wal por sus útiles comentarios. También estoy agradecido a Jaakko Hintikka por enviarme dos ensayos no publicados sobre el tema de este ensayo. El equipo editor de CTK declina cualquier responsabilidad en la obtención de derechos de reproducción de los textos traducidos.

[*] Seton Hall University. E-mail de contacto: edgarjvaldez@gmail.com

[Received: 21 de abril de 2021
Accepted: 6 de noviembre de 2021]

conocimiento moderno, que, después de todo, en grandes aspectos muestra un progreso inmenso de la situación en su vida.

Me concentraré principalmente en una pregunta, que creo que debe responderse antes de avanzar con el tema: ¿Por qué Kant sostuvo que la aritmética depende de la intuición sensible, de hecho, que las proposiciones aritméticas de alguna manera se refieren a la intuición sensible? Esto, por supuesto, está estrechamente relacionado con la cuestión de por qué consideraba tales proposiciones como sintéticas en vez de analíticas. Al considerar esta pregunta, uno debe considerar muy pronto los puntos de vista de Kant sobre la lógica y su relación con la aritmética. Además, dado que la respuesta a la pregunta anterior es mucho más clara si la "aritmética" se reemplaza por la "geometría", también consideraremos los puntos de vista de Kant sobre la geometría.

Para aclarar nuestro problema, consideremos primero brevemente el concepto de intuición de Kant. La intuición es una especie de representación o, en el lenguaje de Descartes y Locke, idea. Tener intuiciones es una de las principales formas en que la mente puede relacionarse o ser consciente de los objetos. Lo más parecido a una definición en *La Crítica de la Razón Pura* ocurre en una clasificación de representaciones:

> Este [conocimiento] es o bien *intuición*, o bien *concepto* (*intuitus vel conceptus*). Aquella se refiere inmediatamente al objeto, y es singular, éste, mediatamente, por medio de una característica que puede ser común a muchas cosas. A320/B376-7[2]

En la frase inicial de la estética trascendental, Kant dice:

> Cualesquiera sean la manera y los medios por los que un conocimiento se refiera a objetos, aquella por la cual se refiere a ellos inmediatamente, y que todo pensar busca como medio, es la *intuición*. A16B33

Un pasaje en §1 de la edición de Jäsche de las lecciones de Kant sobre lógica se lee:

> Todos los modos de conocimiento, es decir, todas las representaciones relacionadas con un objeto con conciencia son *intuiciones* o *conceptos*. La intuición es una representación singular (*repraesentatio singularis*), el concepto una representación general (*repraesentatio per notas communes*) o representación reflejada (*representatio discursiva*).[3]

Las intuiciones se contrastan así con los conceptos, que se relacionan con los objetos solo de manera mediata, por medio de ciertas propiedades y por medio de intuiciones que los instancian y que se relacionan indiferentemente con todos los objetos que poseen las propiedades requeridas.

---

[2] Las referencias a La Critica de la Razón Pura serán a la traducción de Caimi 2007. Todas las demás traducciones de referencias a Kant son del traductor.
[3] JL 9:91

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 161-189
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775988

Lo que se entiende por llamar a una intuición una representación singular parece bastante claro. Solo puede tener un objeto individual. Los objetos con los que se "relaciona" un concepto son evidentemente aquellos que se incluyen en él, y estos pueden ser cualquiera que tenga la propiedad que representa el concepto, de modo que un concepto solo en casos excepcionales tendrá un único objeto. Hasta ahora, la distinción corresponde a la que existe entre términos singulares y generales.

Uno podría pensar que el criterio de "relación inmediata con los objetos" por ser una intuición es solo una formulación oscura de la condición de singularidad. Pero evidentemente significa que el objeto de una intuición está de alguna manera directamente presente en la mente, como en la percepción, y que la intuición es, por lo tanto, una fuente, en última instancia, la única fuente de conocimiento inmediato de los objetos. Por lo tanto, el hecho de que la matemática se base en la intuición implica que se trata de un conocimiento inmediato y, por lo tanto, aunque sintético a priori, no requiere el argumento justificado elaborado que hacen los Principios (A87/B120). Por el criterio de inmediatez, la concepción de intuición de Kant se parece a la de Descartes, mientras que por el criterio de singularidad y su insistencia en un factor conceptual no intuitivo en todo el conocimiento, la teoría de la intuición de Kant difiere de la de Descartes.

Que lo que está inmediatamente presente en la mente son objetos individuales parece ser un axioma de la epistemología de Kant, o también se podría decir metafísica, ya que va con la convicción de que los objetos, las existencias primarias, son en primera instancia objetos individuales. Así, lo que satisface el criterio de inmediatez de la intuición también satisfará el criterio de singularidad.

No parece que lo contrario deba ser cierto. La idea de una representación singular formada a partir de conceptos nos parece bastante natural. Tal representación se relacionaría con un solo objeto, si es que tiene alguno, pero apenas parece inmediato. Al asociarlo con una descripción definida en vez de con un término general, lo distinguiríamos de un concepto bajo el cual cae exactamente un objeto (aunque sea necesariamente). Para Kant, sin embargo, el pasaje de A320/B376-7 parece permitir que tal representación sea un concepto; esto también podría ser sugerido por el hecho de que la idea de Dios se llama un concepto; en ninguna parte se sugiere que sea una intuición. Sin embargo, Kant nunca comenta, hasta donde yo sé, sobre las implicaciones de la posibilidad de representaciones singulares no inmediatas para el concepto de intuición.

Esta omisión puede respaldar una teoría que ha sido desarrollada por Jaakko Hintikka según la cual el criterio de singularidad es el único criterio definitorio: una intuición es simplemente una representación individual.

> En Kant y sus predecesores inmediatos, el término "intuición" no tenía necesariamente nada que ver con la apelación a la imaginación ni a la evidencia perceptiva directa. En forma de paradoja, quizás podamos decir que las "intuiciones" que Kant contempló no eran

> necesariamente muy intuitivas. Para Kant, una intuición es simplemente cualquier cosa que represente o represente un objeto individual a diferencia de los conceptos generales.[4]

Muchos de los pasajes que cita Hintikka también mencionan el criterio de inmediatez, y no está claro por qué Hintikka piensa que no es esencial. La razón principal, que consideraremos más adelante, es que esta suposición respalda una teoría de Beth y Hintikka para explicar la noción de Kant de "construcción de conceptos en intuición" y el análisis resultante de la demostración matemática. Otro parece ser la ausencia del criterio de inmediatez en la *Lógica* y el hecho de que Kant hace comentarios sobre conceptos que parecen excluir conceptos esencialmente singulares y esto implica que todas las representaciones singulares son intuiciones.[5]

Hintikka también señala que la parte de la estética trascendental donde Kant argumenta que el espacio es una intuición argumenta esencialmente que la representación del espacio es singular. Sin embargo, ha abierto la Estética al establecer el criterio de inmediatez (A16 / B33 citado anteriormente) y en la prueba de intuición sí dice que el espacio es *dado* (B39, también A25). Además, en los argumentos a favor de la misma tesis en la Disertación Inaugural de 1770, Kant apela a la inmediatez: inmediatamente después de argumentar que el espacio es una intuición pura porque es un "concepto singular", Kant dice de las proposiciones geométricas que "no pueden derivarse de cualquier noción universal del espacio, pero solo como se *vio* en el espacio mismo como si fuera algo concreto" (15c, énfasis de Kant). Más tarde dice: "La geometría hace uso de principios que caen bajo la mirada de la mente."

Me parece que la evidencia textual para el punto de vista de Hintikka no es suficiente para superar las declaraciones claras y el énfasis en el criterio de inmediatez, a pesar de que el punto de vista alternativo debe suponer que Kant al discutir estos asuntos no tuvo en cuenta la posibilidad de representaciones singulares no inmediatas.[6] Pero la teoría de Hintikka realmente se apoya o cae en la interpretación del papel de la intuición en las matemáticas.

[4] In Kant and his immediate predecessors, the term "intuition" did not necessarily have anything to do with appeal to imagination or to direct perceptual evidence. In the form of a paradox, we may perhaps say that the "intuitions" Kant contemplated were not necessarily very intuitive. For Kant, an intuition is simply anything which represents or stands for an individual object as distinguished from general concepts. "Kant's 'new method of thought' and his theory of mathematics, p. 130. Hintikka discute en detalle esta tesis en un artículo "On Kant's notion of intuition (*Anschauung*)," en Terence Penelhum y J.H. MacIntosh (eds) Kant's First Critique (Bemont, Calif., 1969). La misma idea parece ser la base del análisis de la teoría de Kant de la prueba matemática en E.W. Beth "Über Lockes 'allgemeines Dreieck'" en *Kant-Studien* 48 (1956-1957), 361-380.

[5] "Es una mera tautología hablar de conceptos generales o comunes." *Ak* 9:91

[6] Se podría atribuir a Kant la opinión de que no existen tales representaciones. La clasificación que Kant hace en A320 / B376 y en Logik §1 es de *Erkenntnisse*, que Kemp Smith traduce como "modos de conocimiento", pero que en muchos contextos se traduciría de manera más precisa aunque inelegamente como "piezas de conocimiento". Entonces, la relación de una representación con su objeto es aquella a través de la cual uno puede *conocer* su objeto, y podría sostenerse que la intuición en el sentido completo es la única representación singular que puede proporcionar tal conocimiento. Esta visión tendría la consecuencia quizás vergonzosa de que un objeto que de alguna manera no se percibe no se conoce realmente como un individuo.

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 161-189
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775988

Una tesis sobre la intuición que es de gran importancia para Kant es que nuestra mente puede adquirir intuiciones de objetos reales solo si se ve *afectada* por ellos. No me atreveré a decir cuál es este “afección”, pero implica para el sujeto una cierta pasividad, de modo que nuestras percepciones no están a la vista debido a nuestra propia actividad mental, y también a una cierta exposición a la contingencia en nuestras relaciones con objetos. Por lo tanto, no percibimos objetos a menos que afecten físicamente nuestros órganos sensoriales.

Un giro particular y muy importante de la filosofía de Kant es que la naturaleza de nuestra capacidad de ser afectados por los objetos, nuestra *sensibilidad*, ya determina ciertas características de nuestras intuiciones. Se dice que son la forma de nuestra intuición en general. Entre ellos se encuentra la *espatiotemporalidad*. Debe entenderse que esto significa que la naturaleza de la mente determina que los objetos que intuimos deben ser espaciales y temporales, y de hecho intuidos como tales. La intuición que juega un papel en las matemáticas, que no es el resultado directo de la afección de nuestra mente por los objetos, expresa una percepción intuitiva que tenemos de nuestras formas de intuición y, en ese sentido, sigue siendo una intuición de sensibilidad. Aparentemente, también es intuición sensible en el sentido de ser intuición del sentido *interno*.

Como Hintikka enfatiza correctamente, esta conexión intrínseca entre intuición y sensibilidad no proviene directamente del concepto de intuición, sino que representa un carácter del hombre, o más generalmente de inteligencias finitas. Tal inteligencia deriva el contenido de su conciencia del exterior con la exposición resultante a la contingencia y la necesidad de conceptos para representar objetos no presentes. Por lo tanto, no solo la sensibilidad, sino también el pensamiento o la conciencia a través de conceptos (conocimiento a través de conceptos, B94), son características de las inteligencias finitas. La alternativa es un "entendimiento intuitivo" cuya actividad *crearía* los objetos de su conciencia. Su conciencia sería *solo* intuición; se llama "intuición intelectual" porque tiene la espontaneidad que para nosotros es característica del pensamiento y porque la unidad que con nosotros es el resultado de la síntesis de lo *dado* es porque ya está presente en la intuición. Parece claro que la intuición intelectual satisfaría el criterio de inmediatez.

II

Pasemos ahora a las opiniones de Kant sobre la lógica. Lo que debe sorprender con fuerza a una persona con entrenamiento moderno al considerar la perspectiva de Kant sobre la lógica es la limitación de su conocimiento y concepción de la misma. Kant aprendió y enseñó la tradición lógica establecida en un momento muy poco creativo en la historia del tema. Así, el análisis lógico formal que realiza está bastante limitado a las formas de proposiciones categóricas de la teoría del silogismo, con gestos hacia proposiciones hipotéticas y disyuntivas. Las inferencias que se cubren son los silogismos e inferencias inmediatas de la teoría aristotélica y algunas inferencias proposicionales como *modus* *ponens*. De la lógica proposicional como teoría desarrollada adicional, o de las posibilidades adicionales de la teoría de cuantificación, Kant no tenía idea.

Kant no solo tenía recursos técnicos muy limitados a sus órdenes; lo que es más sorprendente y más dañino para su posición de filósofo, estaba muy satisfecho con la lógica tal como la encontró. Técnicamente, en ningún caso podría haber ido mucho más allá del estado de la ciencia en su propio tiempo, y no era un matemático creativo. Pero lo que habría sido necesario para que Kant no estuviera satisfecho con la "lógica tradicional" podría haber sido solo una visión más profunda de sus propios descubrimientos.

Como es bien sabido, Kant atribuyó la falta de progreso en la lógica a la ausencia de cualquier necesidad. Sostuvo que la lógica se estableció como una ciencia y luego terminó de una vez por todas por Aristóteles. Esta es una visión falsa no solo de las posibilidades de descubrimiento en la lógica sino también de la historia del tema, que lejos de no ser "capaz de avanzar un solo paso" ni de "requerir volver sobre un solo paso" desde Aristóteles, había hecho ambos más de una vez. La opinión de Kant también fue influyente y sirvió para crear resistencia a puntos de vista más razonables tanto de la lógica misma como de su historia.

Por qué Kant debería haber pensado que la ciencia de la lógica es completable y completada es una pregunta que no intentaré responder aquí. No sé si un esfuerzo serio por responderla descubriría ideas interesantes de Kant, que no entendemos. En general, se puede decir que el punto de vista armonizó extremadamente bien con el lado más racionalista de la forma de pensar de Kant y con la creencia, que no fue el único gran filósofo en sostener, de que su propio trabajo terminó una parte importante de la filosofía. Kant ciertamente pensó que había fuentes inagotables de problemas, incluso problemas filosóficos, para que el intelecto humano luchara. Pero sostuvo que esta inagotabilidad se encontraba dentro de los límites fijados por una forma, cuyas propiedades básicas podrían describirse exhaustivamente. Esta forma pertenecería a la facultad humana del pensamiento mismo, que siempre y cuando tratara de "sí mismo y su forma" y no con objetos dados desde el exterior o con la forma en que podrían darse desde el exterior, estaba destinada a ser capaz no solo de estar en terreno seguro sino también de descubrir y analizar cada factor relevante. La razón y la comprensión son "unidades perfectas" (Axiii, A67 / B92). También encontramos un eco de la idea cartesiana de que el yo es mejor conocido que los objetos: “yo solamente me ocupo de la razón misma y de su pensar puro, cuyo conocimiento minucioso no tengo que buscarlo muy lejos de mí, porque lo encuentro en mí mismo.” (Axiv)

La lógica es, según Kant, la más general de todas las divisiones de conocimiento. Se aplica a todos los objetos de nuestro pensamiento en general, y todas las declaraciones verdaderas y las inferencias sanas deben conformarse a él. En particular y especialmente importante, la posibilidad lógica es el tipo de posibilidad más inclusivo. Si algo es posible en cualquier aspecto, es lógicamente posible; su concepto no implica una contradicción. En particular, al menos en lo que respecta a las declaraciones explícitas de Kant, la aplicabilidad de la lógica no está limitada por las formas de nuestra sensibilidad.

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 161-189
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775988

La relación entre la lógica y las formas de intuición se puede ver mejor en contraste con la geometría: las formas de intuición proporcionan la base para ciertas verdades necesarias, en particular las de la geometría, en el sentido de que si las formas de intuición no fueran como son las verdades en cuestión no serían válidas, y si no tuviéramos una cierta comprensión de nuestras formas de intuición, no las conoceríamos. La aplicación de estas verdades, sin embargo, se limita a los objetos que afectan nuestros sentidos. Además, los principios son verdaderos para estos objetos solo como aparecen y no como son en sí mismos.

Estas limitaciones no se presentan para la lógica. En particular, hay estados de cosas que son lógicamente posibles pero que están excluidos por las formas de intuición, como la existencia de configuraciones espaciales contrarias a los teoremas de la geometría euclidiana; de modo que la geometría es una teoría más especial que la lógica, no solo en el sentido de que trata con un tipo de objeto más restringido, sino también en el sentido de que hace declaraciones sobre estos objetos que no son lógicamente necesarias, aunque son necesarias de otra manera.

La lógica tampoco está sujeta a la gran limitación del conocimiento basado en la intuición, la de aplicar solo a las apariencias. Cuando Kant dice que debe ser posible *pensar* en las cosas en sí mismas, implica primero que tal concepción no contradice las leyes de la lógica, y segundo que en las declaraciones que hacemos sobre ellas, las leyes lógicas siguen siendo un criterio negativo de verdad. Si no pudiera confiar en la lógica en este ámbito, la metafísica de las costumbres de Kant no podría despegar.

Ya en este nivel es posible ver con bastante claridad algunas razones por las cuales Kant debería haber considerado la geometría como sintética a priori y haber usado ideas como la de una forma de intuición para explicar cómo era posible tal ciencia. La geometría es una teoría más especial que la lógica primero en el sentido de que contiene primitivas no lógicas, segundo porque sus teoremas en general no pueden demostrarse simplemente mediante definiciones y lógica, como aparentemente pensó Leibniz. De hecho, esto es mucho más obvio para nosotros que en la época de Kant, dado que tenemos geometría no euclidiana y, en general, estamos menos tentados a sobrestimar el poder de la lógica, especialmente la lógica tradicional. Vale la pena señalar que los postulados de Euclides son lo que en realidad son supuestos de existencia, por lo que aquí las opiniones generales de Kant sobre la existencia implicarían que no podrían ser analíticos.

Que Kant debería encontrar geometría en la forma de nuestra intuición no es difícil de entender. Por un lado, la espatiotemporalidad es una propiedad característica de los objetos dados al sentido. Además, Kant enfatiza que el espacio era un individuo cuya noción se entendía de manera análoga a la ostensión, y la misma comprensión ostensiva sería necesaria para las primitivas particulares de la geometría. Por otro lado, Kant partió de la idea de que la geometría era un cuerpo de verdades necesarias con fundamentos evidentes.

Que los axiomas de la geometría se verifiquen empíricamente directamente es contrario a su necesidad; que deberían ser algún tipo de hipótesis de alto nivel es contrario a su evidencia.

La segunda observación que se debe hacer sobre los puntos de vista de Kant sobre la lógica es que él nunca sugiere una explicación convencionalista de la validez lógica. Es cierto que el carácter muy general de las verdades lógicas y analíticas va con su *desinformatividad*. Reflejan la naturaleza de la mente y de ciertos conceptos particulares, y aparentemente de ninguna manera cómo es el mundo por otra parte. Pero esta naturaleza y la forma en que conceptos particulares dan lugar a las verdades analíticas de que parecen ser algo dado, que de hecho será el mismo para todas las inteligencias discursivas, incluso si sus formas de intuición son bastante diferentes de las nuestras.

Kant no da mucha explicación de cómo es esto, y tal vez sintió alguna duda sobre la posibilidad de dar tal explicación. Si tratamos de aplicar la idea que podríamos obtener de la Deducción Trascendental a esta pregunta, nos encontramos con un dilema muy difícil. Es decir, la actividad esencial del entendimiento parece estar en relación con el material dado en la intuición, para llevarlo a la unidad expresada en un juicio objetivo. En otras palabras, las nociones de objeto, concepto, juicio obtienen todo su sentido de su aplicación a la experiencia. No obstante, el entendimiento tiene una mayor generalidad que la intuición: las formas de intuición no son lógicamente necesarias; y al operar lógicamente con una noción dada, no es necesario apelar a la intuición o incluso suponer que la noción tiene una intuición que le corresponde. De alguna manera, es posible que reconozcamos que lo que se puede dar en la experiencia no es toda la realidad posible, e incluso reconocer que, con la ayuda de la intuición, podemos conocer los objetos solo de una manera relativa, tal como aparecen. Todo esto apunta, incluso aparte de los requisitos de la filosofía moral de Kant, a la presencia en nosotros de concepciones más generales de objeto, concepto, juicio y *a fortiori* inferencia. Este dilema nos volverá a ocupar más tarde, ya que tiene una aplicación a los problemas de la aritmética.

III

Con respecto a la filosofía de la geometría de Kant, las dificultades no se refieren a por qué Kant pensó que la geometría era conocimiento intuitivo a priori, sino más bien si esto es cierto y cuál era precisamente la teoría por la cual propuso explicar cómo podría ser cierto. Cuando nos referimos a la filosofía de la aritmética de Kant, hay incluso menos dificultades en cuanto a por qué debería haber pensado proposiciones aritméticas a priori. Pero de ninguna manera es fácil ver por qué Kant las consideraba sintéticas, basadas de alguna manera en nuestras formas de intuición, en particular en la forma de intuición interna, tiempo, y como limitadas en su aplicación a las apariencias.

Será más claro por qué Kant consideró las proposiciones aritméticas como *sintéticas* si observamos que el concepto de proposición analítica de Kant probablemente tenía una extensión mucho más estrecha que el concepto correspondiente en la filosofía más reciente,

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 161-189
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775988

por ejemplo, en Frege y el positivismo lógico. Kant no formula su concepto con suficiente precisión para que podamos estar completamente seguros de esto. Pero parece bastante claro a partir de los ejemplos que cuando Kant habla del concepto del predicado de un juicio analítico *contenido* en el del sujeto, la situación es análoga a aquella en la que el concepto del sujeto se define por la conjunción del concepto del predicado con tal vez ciertos otros. Este sería un caso paradigmático donde la conexión de sujeto y predicado es "pensada por identidad" (A7/B11). Una versión idealizada de un juicio analítico sería una de las formas 'Todos *AB* son *A'* o 'Todos *C* son *A'* donde '*C'* se define como '*A* y *B'*. Esto se idealiza porque, según Kant, los conceptos fuera de las matemáticas en general no tienen definiciones en el sentido apropiado.

Parece cierto que otras formas tendrían que admitirse como analíticas, por ejemplo, 'Ningún *AB* no es *A'* o la proposicional 'Si *p* y *q*, entonces *p'*.[7] Kant dice (B15) que para que '7 + 5 = 12' sea analítico, se habría derivado del concepto de una suma de 7 y 5 por la ley de contradicción. Esto sería como si fuera demostrable a partir de definiciones por una lógica muy restringida, probablemente incluida en el aparato tradicional limitado a las órdenes de Kant, y es difícil ver cómo podría ser cierto de lo contrario.

Sin embargo, es una cosa decir que no hay razón para esperar esto y otra entender la razón específica de Kant para pensar que es falsa. Kant indica que la forma en que descubres que 7 + 5 = 12 es mediante un proceso como contar, de progresar de 7 a 12 mediante adiciones sucesivas de 1, en las cuales uno debe operar con una instancia particular de un grupo de objetos, que solo se puede dar en intuición.

> Se debe salir fuera de estos conceptos, procurando el auxilio de la intuición que corresponde a uno de los dos, por ejemplo, los cinco dedos, o bien (como Segner en su aritmética) cinco puntos, y agregando así, poco a poco, las unidades del cinco dado en la intuición, al concepto del siete. Pues tomo primeramente el número 7 y, tomando como ayuda, como intuición, para el concepto de 5, los dedos de mi mano, añado ahora poco a poco el número 7 en aquella imagen mía, las unidades que antes reuniera para formar el número 5, y veo así surgir el número 12. B15-6

Sin embargo, todavía no está claro por qué ese proceso no puede ser puesto en sí mismo en forma de un argumento puramente lógico o reemplazado por algo muy diferente que sí puede.

Hubo un intento de hacer precisamente esto con lo que Kant estaba en condiciones de familiarizarse, por Leibniz en los *Nouveaux Essais*.[8] Leibniz trabajó con '2 + 2 = 4' pero el tipo de argumento es suficiente para cualquier fórmula de suma. Asumió como axioma la sustitutividad de la identidad, que Kant probablemente habría considerado analítica. Leibniz tomó como definiciones

[7] Cf. los ejemplos de "verdades de la razón" dados por Leibniz, Nouveaux Essais, IV, ii, §1.
[8] *Ibid*. IV, viii, §10.

2=1+1,

3=2+1,

4=3+1,

que es aproximadamente lo que se hace en las formalizaciones modernas. Entonces la prueba es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
2+2 &= 2+1+1 &&\text{(def. de “2”)}\\
&= 3+1 &&\text{(def. de “3”)}\\
&= 4 &&\text{(def. de “4”)}
\end{aligned}
$$

La objeción moderna estándar a este argumento es que Leibniz debería haber insertado paréntesis, para que vaya

$$2+2=2+(1+1)=(2+1)+1=3+1$$

y por lo tanto asume una instancia de asociatividad. No podemos excluir la posibilidad de que Kant lo supiera cuando estaba trabajando en la *Crítica de la razón pura*, ya que aparece en el libro *Prüfung der kantischen Kritik der reinen Vernunft*, vol. I (Königsberg, 1789), del alumno de Kant, Johann Schultz, profesor de matemáticas en Königsberg.

Poniendo gran peso en la evidencia de los escritos de Schultz y otros discípulos de Kant, Gottfried Martin ha presentado la hipótesis de que Kant preveía una base axiomática de la aritmética similar a las axiomatizaciones clásicas de la geometría.[9] Él ve que la afirmación de que la aritmética es sintética se base en primera instancia sobre el punto lógico de que las proposiciones aritméticas como '7 + 5 = 12' no pueden ser probadas por mera lógica a partir de definiciones como las que usa Leibniz. Una base axiomática del tipo que respondería a las ideas de Martin se da en el *Prüfung* de Schultz. Sin mencionar explícitamente a Leibniz, Schultz señala que el tipo de prueba de una identidad aritmética que Leibniz da se basa en el supuesto de asociatividad. Él da, para ' 7 + 5 = 12 ', un argumento que también se basa en la conmutatividad, y parece, erróneamente, pensar que esta

[9] *Arithmetik und Kombinatoril bei Kant* (Diss. Freiburg 1934), ed. ampliada Berlin 1972; *Kant's Metaphysics and Theory of Science*, Manchester, 1953, cap. I; *Klassische Ontologie der Zahl, Kant-Studien* Ergänzunsheft 70, Köln, 1956, §12.

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 161-189
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775988

suposición es inevitable. Pero, por supuesto, la conmutatividad debe usarse tarde o temprano en aritmética.[10]

Schultz da dos axiomas, la conmutatividad y la asociatividad de la suma. No afirma ni niega la independencia de las leyes correspondientes de multiplicación y de la ley distributiva. También da dos "postulados" que vale la pena citar en su totalidad.

1. De varios quanta homogéneos dados, para generar el concepto de un quantum por su conexión sucesiva, es decir, transformarlos en un todo.

2. Aumentar y disminuir cualquier quantum dado en todo lo que uno quiera, es decir, hasta el infinito.[11]

El segundo postulado implica que Schultz no está pensando específicamente en la aritmética de los enteros sino también en cantidades continuas. En cualquier caso, el primer postulado es la base para suponer que se *define* la función de suma; es decir, dados los números m, n, en realidad existe un número m + n.

Si aceptamos que esto realmente da la concepción de Kant, todavía quedaría la cuestión de cómo la intuición entra en la base de estos axiomas y postulados. Sobre esto, Schultz tiene, de hecho, algo que decir. Pero al transferir la concepción a Kant nos enfrentamos inmediatamente con la dificultad de que él explícitamente dice que la aritmética no tiene axiomas.

> Pero en lo que respecta a la magnitud (*quantitas*), es decir, a la respuesta a la pregunta ¿cuán grande es algo?, no hay para ella axiomas en sentido propio, aunque varias de estas proposiciones sean sintéticas e inmediatamente ciertas (*indemonstrabilia*). (A163-4/B204)

Considera dos posibilidades, las reglas de igualdad, que afirma que son analíticas (un axioma apropiado debe ser sintético) y las identidades aritméticas elementales, como '7 + 5 = 12', a las que parece referirse al final de nuestra cita, que de hecho son sintéticas e indemostrables, pero que se niega a llamar axiomas porque son singulares.

Esta posición se reafirma en una carta de Kant a Schultz del 25 de noviembre de 1788[12], en la que comenta sobre el manuscrito del volumen I del *Prüfung*. Allí da una razón, que mencionaré más adelante, sobre por qué la aritmética no debería tener axiomas. Él dice que la aritmética tiene *postulados*, "juicios prácticos inmediatamente ciertos". El tono general de su discusión sugiere que podría considerar la directiva general para llevar a cabo la suma, bajo el supuesto de que esto siempre se puede hacer, como un postulado, es decir,

[10] Ni Leibniz ni Schultz parecen mencionar el hecho de que para probar fórmulas que involucran *la multiplicación*, como '2 · 3 = 6', uno también necesita instancias de la ley distributiva.

[11] 1. Aus mehrern gegeben gleichartigem Quantis *durch ihre succesive Verknüpfung* den Begriff von einem Quanto zu erzeugen, d. i. sie in *ein Ganzes* zu verwanderln. 2. Ein jedes gegebenes Quantum, *um so viel, als man will*, d.i. *sie ins Unendliche zu vergrössern, und zu vermindern* (*Prüfung*, I, 221).

[12] *Ak* X 554-558.

que podría aceptar el primer postulado de Schultz. Pero lo que parece tener específicamente en mente es lo que en otras partes llama fórmulas numéricas, es decir, 7 + 5 = 12.

Sin embargo, no podemos estar seguros de que el material matemático de la versión publicada del *Prüfung* estuviera presente en el manuscrito sobre el que Kant estaba comentando. Porque parece de la carta, como señala Martin[13], que el manuscrito sostenía que las proposiciones aritméticas eran analíticas y, por lo tanto, está claro que fue revisado considerablemente *después* de que Schultz recibió la carta de Kant. El hecho de que en la versión publicada el análisis axiomático se use para apoyar la conclusión de que la aritmética es sintética no prueba que no estaba presente en el manuscrito, aunque la suposición de que los *postulados* estaban allí es un poco tensa. Pero que Schultz podría haber argumentado que las leyes conmutativas y asociativas eran analíticas no es en absoluto imposible. (Leibniz argumentó esto al menos para la conmutatividad.[14])

Aun así, a menos que uno acepte la idea bastante improbable de Martin de que Kant aportó el análisis axiomático a Schultz *después* de la carta, es difícil escapar a la conclusión de que Schultz entendió el problema matemático en al menos un aspecto mejor que el propio Kant: Kant no parece haber tenido una visión alternativa del estado de tales proposiciones como las leyes de suma conmutativas y asociativas. Difícilmente puede haber negado su verdad, y parece que, si son indemostrables, deben ser axiomas; si son demostrables, deben tener una prueba de que no da ninguna indicación.

Si al hablar del carácter axiomático de la aritmética, Martin quiere decir que, según Kant, la aritmética debe hacer uso de proposiciones que no pueden deducirse por lógica y definiciones, entonces no puede haber desacuerdos con él. Pero si quiere decir que Kant tenía en mente establecer la aritmética como un sistema axiomático del cual el de Schultz es una instancia muy primitiva y que es en la verificación de leyes como la conmutativa y asociativa donde la aplicación principal de la intuición en la aritmética debe ser encontrada, entonces las palabras reales de Kant van en contra de él.

Incluso si el punto de vista de Martin sobre el asunto es bastante correcto en lo que va, no puede satisfacernos. En primer lugar, no responde a la pregunta de por qué la aritmética debería depender de la intuición, excepto en el sentido, completamente ligado al nivel primitivo de la axiomática en el tiempo de Kant, de que hasta donde se puede ver la alternativa obvia es insuficiente. En segundo lugar, se traslada a la aritmética consideraciones que estaban vigentes en geometría, mientras que nuestro sentido original de dificultad surgió de la diferencia entre las dos. Y hay muchas indicaciones, en particular

[13] *Arithmetik und Kombinatorik bei Kant*, p. 64-5.
[14] C.J. Gerhardt (ed.), *Leibnizens mathematissche Schriften*, Halle, 1849-1863, VII 78. Leibniz da una definición de adición de la cual afirma que la conmutatividad se sigue inmediatamente. Uno podría leer su argumento como derivando la conmutatividad de la suma de la conmutatividad de la unión teórica de conjuntos.

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 161-189
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775988

algunas observaciones en la carta a Schultz, que discutiré, de que él vio algo de esta diferencia y no tenía la intención de dar una explicación completamente simétrica.

IV

El problema de la asimetría de la aritmética y la geometría podría resolverse mediante una interpretación sugerida por E.W. Beth[15] y desarrollada por Hintikka[16]. De su interpretación parece deducirse que si una proposición *B* de geometría se prueba mediante una prueba que apela a los axiomas $A_1 \dots A_n$ (aquí incluyo postulados),[17] entonces, en general, el condicional A_1 & .... & A_n. $\cdot\supset B$ es sintético; en cualquier caso, se hace una apelación a la intuición más allá de lo que se hace para verificar los axiomas. Entonces se podría argumentar que, dado que la aritmética según Kant no tiene axiomas, solo el primer tipo de apelación a la intuición pura ocurre en la aritmética.

La hipótesis de Beth y Hintikka es que para Kant ciertos argumentos que pueden formularse hoy en día en la lógica de predicados de primer orden implican una apelación a la intuición. En vista del criterio de singularidad para la intuición, los candidatos naturales para tales argumentos son argumentos que involucran términos singulares. Para Beth, la forma de argumento involucrada se ilustra mediante la prueba de que los ángulos base de un triángulo isósceles son iguales:

> Procedemos, como es bien sabido, como una regla como sigue: primero consideramos un triángulo particular, digamos ABC, y supongamos que AB = AC; entonces mostramos que ∠ABC = ∠ABC y, por lo tanto, hemos demostrado que la afirmación se cumple en el caso particular en cuestión. Luego se observa que la prueba es correcta para un triángulo arbitrario y, por lo tanto, que la afirmación debe mantenerse en general.[18]

La forma general del argumento es la siguiente: Queremos probar '$(x)\ (Fx \supset Gx)$'. Asumimos una *a* particular tal que F*a*. Luego deducimos 'G*a*'. Entonces tenemos '$Fa \supset Ga$' independientemente de la hipótesis. Pero dado que *a* era arbitraria, '$(x)\ (Fx \supset Gx)$' se sigue.

[15] Über Lockes 'allgemeines Dreieck'."
[16] "Kant's 'new method of thought'," "On Kant's concept of intuition," Tambien "Are logical truths analytic?" *Philosophical Review* 74 (1965), 178-203, "Kant on the mathematical method," en *Kant's Philosophy of Mathematics Modern Essay* (ed.) Carl Posy (1992), 21-42.
[17] Cabe señalar que, aunque sin duda la distinción que Kant hace entre axiomas y postulados se deriva históricamente de la de "nociones comunes" y postulados en Euclides, la distinción de Kant no corresponde exactamente a la de Euclides. La división de Euclides es entre principios más generales y específicamente geométricos. Para Kant, los postulados son " juicios prácticos inmediatamente ciertos ", la acción involucrada es la construcción, y su propósito es que se puede llevar a cabo una construcción de cierto tipo. El papel que juegan es, por lo tanto, el de los axiomas de la existencia. Las nociones comunes de Euclides son del tipo que Kant afirmó que eran proposiciones analíticas (A164 / B204, B17), mientras que los axiomas propiamente dichos deben ser sintéticos.
[18] We proceed, as is well known, as a rule as follows: first we consider a particular triangle, say ABC, and suppose that AB=AC; then we show that ∠ABC =∠ABC and have thus proved that the assertion holds in the particular case in question. Then one observes that the proof is correct for an arbitrary triangle, and therefore that the assertion must hold in general. *Op.cit.* p. 365.

Esta forma de argumento, como por ejemplo en el caso de Beth, es la forma característica de una prueba en Euclides. En la sección "La Disciplina de la Razón Pura en el Uso Dogmático" de la *Crítica* donde Kant expone su punto de vista de la prueba matemática como procediendo por "construcción de conceptos en intuición pura", esta forma de argumento aparece claramente en el ejemplo geométrico. El geómetra “comienza enseguida por construir un triángulo.” Mediante una serie de construcciones en este triángulo y aplicaciones de teoremas generales a él “por medio de una cadena de razonamientos, guiado siempre por la intuición llega a la solución enteramente evidente y a la vez universal de la cuestión.” (A716/B744-5)

Hintikka concentra la atención más bien en la regla de instanciación existencial, es decir, en argumentos de la forma

$(\exists x)Fx$

Fa

.

.

.

p

donde *a* se introduce para indicar una *F*, en vista del hecho de que la línea afirma que hay otras F.[19]

Ambos argumentos tienen en común que activan el uso de una variable libre que indica *cualquiera* de una clase dada de objetos, de modo que un argumento al respecto es válido para *todos* los objetos de la clase. Por lo tanto, tienen una analogía formal con la apelación a la intuición pura, en el sentido de que un término singular se usa de tal manera que lo que se demuestra de él puede presumirse generalmente válido. Además, la manera en que se asegura esta generalidad, es decir, al no permitir que se asuma nada sobre *a* excepto lo que se establece explícitamente en las premisas, recuerda una declaración de Kant sobre el papel de una figura construida en una prueba. “[P]ara conocer con seguridad algo a priori, no debía atribuirle a la cosa nada más que lo que se seguía necesariamente de aquello que él mismo había puesto en ella según su concepto.” (Bxii)

Es de destacar que en el álgebra tradicional los cálculos se llevan a cabo en términos y fórmulas con variables libres, donde la derivación de tal ecuación sirve para probar una

[19] C.f. W.V. Quine, *Methods of Logic*, ed. revisada, New York, 1959, §28.

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 161-189
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775988

proposición general. Hintikka interpreta los comentarios oscuros sobre la "construcción simbólica" en álgebra en este sentido.[20]

Naturalmente, se seguiría de la concepción de la intuición como una simple representación individual que la mera forma de estos argumentos es tal que implican la intuición. Por supuesto, no daría ninguna posibilidad a las tesis filosóficas de mayor alcance de Kant que se refieren a la conexión de las matemáticas con la forma de la *sensibilidad*. Así, los aspectos filosóficamente interesantes del concepto de intuición pura parecen perder su sentido cuando se señala que estos argumentos pueden formalizarse en la teoría de cuantificación pura. Esta es exactamente la conclusión que saca Beth.

Uno podría objetar que esto parece presuponer que la lógica en sí misma no plantea problemas filosóficos que la noción de intuición pura podría ser necesaria para responder, pero en esto al menos Beth está de acuerdo con Kant en la mayoría de sus expresiones. Pero de todos modos, parece poco probable que la ruptura entre los argumentos que activan la interpretación general de las variables libres y los argumentos lógicos que no lo hacen sea la ruptura filosóficamente más significativa dentro de la prueba matemática.[21]

Uno podría desear una evidencia más clara de la atribución de tal punto de vista a Kant o incluso la tesis más modesta que comenzó con esta idea al desarrollar su filosofía de las matemáticas. Si era su punto de vista maduro, el alumno matemáticamente astuto de Kant, Schultz, parece no haberlo sospechado ya que no hay ninguna sugerencia en el *Prüfung*. Schultz dio por sentado que una axiomatización adecuada sería tal que si los axiomas fueran analíticos, también lo serían todos los teoremas. Las matemáticas fallan en ser analíticas solo porque en su desarrollo deductivo deben usarse *premisas* sintéticas. Kant expresa la misma opinión cuando dice

> Pues como se hallo que las inferencias de los matemáticos procedían todas según el principio de contradicción (lo que es requerido por la naturaleza de toda certeza apodíctica) se llegó a la convicción de que también los principios se concocerían a partir del principio de contradicccción; en lo cual se equivocaron; pues una proposición sintética puede, por cierto, ser entendida según el principio de contradicción, pero sólo si se presupone otra proposición sintética de la cual aquélla puede ser deducida, nunca, empero, en sí misma. B14

[20] Kant's 'new method of thought'," p. 130, Tambien "Kant on the mathematical method." Los textos son A717/B745, A734/B762.

[21] Hintikka desarrolla una distinción entre analítico y sintético según el cual algunas verdades lógicas son sintéticas. Sugiere que las verdades lógicas que son analíticas según este criterio son más o menos las que Kant habría considerado como analíticas. Sin embargo, se deduce que en algunos de los argumentos que según Beth e Hintikka implican para Kant una apelación a la intuición, el condicional de sus premisas y conclusiones es analítico. En particular, esto es cierto para el ejemplo que Beth trabaja en detalle en "Über Lockes 'allgemeines Dreieck'." §7. Para ser aplicado a ejemplos matemáticos como el de Kant, el criterio de Hintikka debería extenderse a los idiomas que contienen símbolos de función. La forma de hacer esto que me parece más en el espíritu de la definición de Hintikka tiene algunas consecuencias anómalas.

Véase tambien *Logic, Language-Games, and Information*, Oxford, 1973, cap. 6-9.

Contra esto, se señala[22] que Kant dice de una prueba geométrica de que procede " por medio de una cadena de razonamientos, guiado siempre por la intuición ". En vista de la descripción que Kant da de la prueba, esto fácilmente podría significar que en el curso de la prueba uno está constantemente apelando a las evidencias formuladas en los axiomas y postulados. Obviamente sería anacrónico atribuirle a Kant una imagen de prueba modelada en una deducción formal donde los axiomas se expresan al principio y todo lo demás es lógico y donde el propósito no es mostrar la *verdad* de la proposición probada sino simplemente que se sigue de los axiomas. Por el contrario, para Kant una prueba euclidiana es convincente porque en cada aplicación particular de un axioma o postulado es evidente la exactitud de lo que afirma en este caso particular.

Debe admitirse que podría ser cierto que la inferencia de ciertas reglas de las premisas analíticas podría producir conclusiones analíticas, mientras que la inferencia de acuerdo con las mismas reglas de las premisas sintéticas podría conducir a conclusiones que no solo son sintéticas sino que condicionan las premisas y conclusiones también es sintético. En particular, la regla de la instanciación existencial solo puede entrar en juego en presencia de una cuantificación existencial, y no está claro que, para Kant, una afirmación en la que se produce un cuantificador existencial pueda ser esencialmente analítica. Solo puedo decir que en tales casos el texto de Kant no indica claramente que la necesidad de una apelación a la intuición surge por la *inferencia* y no simplemente por la verificación de la premisa.

Si Hintikka tuviera razón, uno podría esperar que en los pasajes sobre álgebra se enfatizara el papel de las variables. Es posible encontrar este énfasis en un pasaje de A717 / B745, pero no es realmente explícito. El énfasis de A734 / B762 parece diferente, donde Kant dice: “Al exponer los signos, se exponen en la intuición los conceptos, principalmente los de la *relación* de cantidades” (énfasis mío). Las relaciones parecerían expresarse mediante signos de función algebraica. Aunque los pasajes sobre álgebra ofrecen cierto apoyo a la teoría de Hintikka, es menos que decisivo. Mostraré que hay otras formas posibles de ver estos pasajes.

La evidencia directa me parece, en general, opuesta a la teoría de Beth-Hintikka. Sin embargo, tendría un fuerte apoyo indirecto si no hubiera otras formas de explicar cómo la *aritmética* puede requerir una intuición pura e interpretar la noción de "construcción de conceptos", especialmente en álgebra. Para tal fin ahora volvemos al problema de la diferencia entre aritmética y geometría.

V

La dificultad puede plantearse de esta manera: el carácter sintético e intuitivo de la geometría obtiene una plausibilidad considerable del hecho de que la geometría puede verse naturalmente como una teoría sobre el espacio real y las figuras construidas en él. Este espacio está relacionado con los sentidos al ser un campo en el que aparecen los objetos

[22] Beth, *op. cit.* p. 363.

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 161-189
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775988

dados a los sentidos, y la geometría parece proporcionar información bastante sustancial sobre este espacio que, desde el punto de vista del pensamiento abstracto, podría ser falsa.

El contenido de la aritmética no sugiere de inmediato un carácter tan especial o una conexión con la sensibilidad. Por supuesto, en primera instancia habla de números y operaciones y relaciones puramente abstractas: igualdad, suma, resta, etc. Entonces la pregunta es: ¿cuál es el campo de aplicación de los números? Es decir, ¿qué tipo de cosas se pueden contar, asignar números cardinales u ordinales, o medir y así asignar cantidades continuas? A primera vista, no hay razón para creer que la aplicación de la aritmética debe ser a los objetos en el espacio y el tiempo. Aunque esto ciertamente se ha vuelto más evidente desde el surgimiento de las matemáticas abstractas, que los objetos matemáticos en sí mismos podrían estar numerados era algo de lo que Kant ciertamente estaba en condiciones de estar al tanto. Si la aplicación de la aritmética se limita a las apariencias, esta limitación debe entenderse de manera bastante amplia para conciliarla con hechos obvios.

En el caso de la geometría, era posible mencionar posibilidades lógicas que los conceptos permitían pero que no existían de acuerdo con la teoría matemática; Kant da el ejemplo de una figura plana de dos lados, y se abrieron muchas más posibilidades en el desarrollo de la geometría no euclidiana. Probablemente era imposible en el tiempo de Kant tener claro si tal posibilidad existe en la aritmética. Si lo hiciera, daría lugar a una clara separación de la verdad aritmética de la lógica. Este tipo de argumento no estaba disponible para Kant. La dificultad se hace más aguda, algunos dirían insoluble, por desarrollos posteriores en la lógica, particularmente los esfuerzos de Frege y otros para hacer exactamente lo que Kant pensó imposible: reducir la aritmética a la lógica, deducir las proposiciones aritméticas a partir de definiciones y proposiciones de puro lógica.

Por supuesto, el alcance de lo que se considera "lógica" aquí es considerablemente más amplio que lo que Kant consideraba como tal. Por lo menos, necesitamos que este tipo de construcción incorpore parte de la teoría de clases en la lógica; no solo la noción de clase y algunas operaciones elementales que les conciernen, sino también al menos algunos modestos axiomas de la existencia de clase: cuán modesto depende de la cantidad de aritmética que quiera deducir.

Tanto para exponer lo que necesitamos de esta construcción para nuestros propósitos como para indicar qué tan lejos se puede llegar sin usar dispositivos teóricos de conjunto, discutiré una verdad lógica que está estrechamente relacionada con '2 + 2 = 4' en más formalismos extendidos. Este ejemplo ayudará a indicar hasta qué punto los casos de aritmética y geometría son simétricos.

Considere el siguiente esquema del cálculo de predicados de primer orden con identidad:

$$(1)\ (\exists_2 x)Fx \cdot (\exists_2 x)Gx \cdot (x) - (Fx \cdot Gx) \cdot \supset (\exists_4 x)(Fx \vee Gx)$$

Donde '$(\exists_0 x)Fx$' es una abreviatura de '$-(\exists x)Fx$' y '$-(\exists_{n+1} x)Fx$' por

$$(\exists x)[Fx \cdot (\exists_n y)(Fy \cdot y \neq x)].$$

para que '$(\exists_2 x)Fx$' pueda expandirse como

$$(2)\ (\exists x)(\exists y)[Fx \cdot Fy \cdot x \neq y \cdot (u)(Fu \supset \cdot u = x \vee u = y)]$$

y '$(\exists_4 x)(Fx \vee Gx)$' como

$$(3)\ (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists w)[Fx \vee Gx \cdot Fy \vee Gy \cdot Fz \vee Gz \cdot Fw \vee Gw \cdot$$
$$x \neq y \cdot x \neq z \cdot x \neq w \cdot y \neq z \cdot y \neq w \cdot z \neq w$$
$$(u)(Fu \vee Gu \cdot \supset \cdot u = x \vee u = y \vee u = z \vee u = w)]$$

Intuitivamente, la prueba de este esquema es así: supongamos

$$(\exists_2 x)Fx \cdot (\exists_2 x)Gx \cdot$$

Así, en vista de (2) y su contraparte para

'$(\exists_2 x)Fx$' hay *x, y, z*, y *w* tal que

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 161-189
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775988

$Fx \cdot Fy \cdot x \neq y \cdot (u)\ (Fu \supset \cdot\ u = x \vee u = y)$

$Gz \cdot Gw \cdot\ z \neq w \cdot\ (u)\ (Gu \supset \cdot\ u = z \vee u = w)]$

Luego argumentamos, con la ayuda de '$(x) - (Fx \cdot\ Gx)$', que x, y, z, w satisfacen la condición en el alcance de (3), y entonces inferimos que *hay* x, y, z, w tal que esta condición se mantenga.

Este esquema requiere para su formulación solo letras de predicados, variables, cuantificadores, identidad y conectivos lógicos. La única noción involucrada que podría ser diferente en principio de lo que Kant consideraba lógica general es la identidad, y dado que se usa en la aplicación a objetos bastante arbitrarios, no sugiere inmediatamente una restricción en cuanto a la aplicación como lo hacen los conceptos geométricos. Además, el esquema se prueba sin la aplicación de axiomas de existencia: el rango de valores de las variables puede ser cualquier universo, incluso el vacío.[23]

Frege y sus seguidores del siglo XX ciertamente pensaron que por su construcción habían refutado la opinión de que la aritmética depende de alguna manera de la "intuición pura", la sensibilidad o el tiempo. Así, la noción temporal de la adición sucesiva de unidades, o la más concreta de combinar grupos de objetos, se reemplaza en la construcción de Frege por la relación *intemporal* de una clase que es la unión de otras dos, que puede definirse en términos de alternancia conectiva lógica como ocurre en (1). Además, la construcción proporciona un marco para la aplicación del concepto de número más allá del alcance de las apariencias concretas, en particular, en la elaboración de la teoría de conjuntos.

Análogo a un espacio no euclidiano sería un mundo posible en el que las identidades aritméticas resultaron de manera diferente, por ejemplo, en el que 2 + 2 = 5. Pero, ¿no sería eso un mundo en el que habría una contrainstancia de nuestro esquema y, por lo tanto, entrara en conflicto con la lógica? Solo, por supuesto, si se conserva la conexión de significado entre '2 + 2 = 4' y el esquema (o '2 + 2 = 5' y un esquema similar). Me inclino a considerar la ruptura de esta conexión como un cambio en el significado de la suma.

Sin embargo, hay una forma de salir de este dilema. Con '2 + 2 = 5' asociaríamos el esquema

[23] De hecho, (1) es analítico según el criterio de "Are logical truths analytic?" (véase la nota 21 anterior). Sin embargo, de acuerdo con otro criterio que podría estar más en el espíritu de Kant, considerar como sintético un condicional cuya prueba involucra fórmulas de grado superiores a su *antecedente*, (1) es sintético. Hintikka toma esto en cuenta en "Are logical truths tautologies?" al hacer una distinción adicional entre *argumentos* analíticos y sintéticos, de modo que, en el sentido relevante, el argumento de los conjuntos del antecedente de (1) como premisas para su consecuente conclusión es sintético.

(4) $(\exists_2 x)Fx \cdot (\exists_2 x)Gx \cdot (x) - (Fx \cdot Gx) \cdot \supset (\exists_5 x)(Fx \vee Gx)$

Ahora supongamos que tenemos una *U* universal en la que para cualquier elección de extensiones de '*F*' y '*G*' este esquema se hizo realidad. Incluso de acuerdo con nuestras nociones de lógica, existe un posible caso en el que esto sucede, y en el que (dado que (1) es válido) tampoco existe conflicto con (1), es decir, en el que *U* contiene menos de cuatro elementos. En eso, incluso el antecedente de lo anterior siempre sería falso.[24]

Si uno considera los axiomas de existencia mínima que serían necesarios para probar el categórico '2 + 2 = 4' en la teoría de conjuntos moderna, encontramos que nuevamente requieren que el universo contenga al menos cuatro elementos, que pueden identificarse con los números 1, 2, 3, 4.

Si aceptamos la teoría de cuantificación de primer orden con identidad como marco lógico, entonces parece que podemos mantener la simetría de la aritmética y la geometría en un sentido débil, que proposiciones tales como '2 + 2 = 4' implican o presuponen supuestos de existencia que es lógicamente posible negarlos. Trazar la línea en este punto y declarar así que la teoría de conjuntos no es lógica me parece eminentemente razonable; pero no argumentaré por esto ahora, particularmente porque lo he hecho en otra parte.[25]

Creo que la presencia de proposiciones de existencia en matemáticas es una de las consideraciones en juego en los puntos de vista de Kant sobre las matemáticas, pero no está claramente diferenciada de otras. Sus puntos de vista generales sobre la existencia implican que las proposiciones existenciales son sintéticas, pero nunca aplica esta doctrina directamente a la existencia de entidades abstractas. En la carta a Schultz citada anteriormente, Kant dice que la aritmética, aunque no tiene axiomas, tiene postulados. Los postulados sobre la posibilidad de ciertas construcciones, para Kant las construcciones en la intuición, desempeñaban el papel de supuestos de existencia en la geometría euclidiana. Schultz afirma como un postulado en el *Prüfung* esencialmente que se define la suma.

Este factor también está presente en las observaciones de Kant sobre la "construcción de conceptos en intuición pura," que él considera la característica distintiva del método matemático. Si el geómetra quiere demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo es dos ángulos rectos, comienza *construyendo un triángulo* (A716 / B744). Este triángulo, como indicamos anteriormente, puede servir como paradigma de todos los triángulos;

[24] CF. Hao Wang, "Process and existence in mathematics," en Y. Bar-Hillel, E.I.J. Poznanski, M.O. Robin, A. Robinson (eds.), *Essays in the Foundations of Mathematics*, dedicated to A.A. Fraenkel, Jerusalem, 1961, 328-351, p.335.

[25] "Frege's theory of number" (1965) en *Mathematics in Philosophy*, N.Y. 1983.

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 161-189
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775988

aunque en sí mismo es un triángulo individual, no se usa nada al respecto en la prueba que no es también cierto para todos los triángulos. La prueba consiste en una secuencia de construcciones y operaciones en el triángulo.

La visión de Kant era que es por esta construcción que se desarrollan los conceptos involucrados y se muestra la existencia de objetos matemáticos que caen debajo de ellos. Aunque no es necesario que consideremos que este teorema implica o presupone que hay triángulos, Kant consideraba una proposición general como vacía, como conocimiento no genuino, si no hay objetos a los que se aplica. En este caso, solo la construcción de un triángulo puede asegurarnos esto. Aparte de eso, se utilizan supuestos de existencia adicionales en el curso de la prueba, en el ejemplo de A716 / B744 de extensiones de líneas y paralelos.

El mismo factor también se sugiere en el pasaje bastante misterioso en el que Kant dice que la operación con variables, símbolos de función e identidad en el cálculo algebraico tradicional implica "exhibir en la intuición" las operaciones involucradas, lo que él llama "construcción simbólica". De hecho, dicha operación presupone que las funciones involucradas están *definidas* para los argumentos que permitimos sustituir por las variables. Además, la construcción de una expresión algebraica para que un objeto satisfaga una determinada condición es el paradigma mismo de una prueba constructiva de la existencia de dicho objeto. Sin embargo, creo que hay algo más en juego en este pasaje, a lo que llegaré.

VI

De ninguna manera es obvio que los supuestos de existencia que deben hacerse en el desarrollo deductivo de las matemáticas tienen alguna conexión con la sensibilidad y su supuesta forma. Frege, por su parte, estaba bastante convencido de que no lo tenían. Lo que Kant dice que tiene que ver con este punto no está completamente claro, en parte porque, en la naturaleza del caso, está relacionado con algunas nociones difíciles en su filosofía, en parte porque nuevamente no desconectó este tema de otros.

Como observación preliminar, debemos observar que Kant ciertamente no consideraba la aritmética como una teoría especial del tiempo, por ejemplo, en el sentido en que consideraba la geometría como una teoría especial del espacio. A este respecto, no aparece en las pruebas de la prioridad del tiempo ni en la Estética ni en la discusión correspondiente en la Disertación Inaugural (§12, §14 no. 5)

Sin embargo, está claro que, según Kant, la dependencia de la aritmética de las formas de nuestra intuición es, en primera instancia, solo al tiempo. Debería aventurarme a decir que el espacio entra en la imagen solo a través de la manera general en que el sentido interno, y por lo tanto el tiempo, depende del sentido externo, y por lo tanto del espacio. Seremos claros sobre el carácter intuitivo de la aritmética cuando seamos claros sobre la manera en que depende del tiempo.

Cada vez que Kant habla sobre este tema, afirma que el número, y por lo tanto la aritmética, implica la *sucesión* de una manera crucial. Así, al argumentar que la intuición es necesaria para ver que 7 + 5 = 12:

> Pues tomo primeramente el número 7 y, tomando como ayuda, como intuición, para el concepto de 5, los dedos de mi mano, añado ahora *poco a poco* al número 7, en aquella imagen mía, las unidades que antes reuniera para formar el número 5, y veo así *surgir* el número 12. (B15-6 énfasis mío)

Cuando da una caracterización general del número en el Esquematismo, la referencia a la sucesión ocurre esencialmente:

> La imagen pura de todas las cantidades (*quantorum*) ante el sentido externo, es el espacio, pero de todos los objetos de los sentidos en general el tiempo. Pero el *esquema* puro de la *cantidad (quantitatis)*, como [esquema] de un concepto del entendimiento, es el *número* que es una representación que abarca la adición sucesiva de lo uno a lo uno (homogéneos). (A142/B182)

Como dije, esto parece entrar en conflicto no solo con la interpretación que el número y la suma adquieren en construcciones como la de Frege, en la que, en lugar de la *adición sucesiva* de "unidades", tenemos una relación *intemporal*, por ejemplo, que un conjunto es la unión de otros dos; pero también con la aplicación de estas nociones dentro de las matemáticas modernas, en las cuales se pueden hacer declaraciones aritméticas sobre estructuras que son completamente intemporales, y en referencia a las cuales cualquier hablar de "adición sucesiva" es totalmente metafórico.

En la carta a Schultz, Kant califica su posición de una manera que hace más justicia a este carácter más general de la aritmética:

> El tiempo, como usted señala con razón, no tiene influencia sobre las propiedades de los números (como determinaciones puras de magnitud), como lo hace sobre la propiedad de cualquier alteración (como un quantum), lo que en sí mismo solo es posible en relación con una condición específica del sentido interno y su forma (tiempo); y la ciencia del número, a pesar de la sucesión, que requiere toda construcción de magnitud [*Grösse*], es una síntesis intelectual pura que nos representamos en nuestros pensamientos.[26]

Anteriormente en la carta el escribe:

[26] Die Zeit hat, wie Sie ganz wohl bemerken, keinen Einfluss auf die Eigenschaften der Zahlen (als reiner Größenbestimmungen), so wie etwa auf die Eigenschaft einer jeden Veränderung (als eines Quanti), die selbst nur relativ auf eine specifische Beschaffenheit des inneren Sinnes und dessen Form (die Zeit) möglich ist, und die Zahlwissenschaft ist, unerachtet der Succession, welche jede Construction der Größe erfodert, eine reine intellectuelle Synthesis, die wir uns in Gedanken vorstellen., *Ak* X 557

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 161-189
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775988

> La aritmética, para estar seguro, no tiene axiomas, porque en realidad no tiene un *quantum*, es decir, un objeto de intuición como magnitud, para su objeto, sino simplemente *cantidad*, es decir, un concepto de una cosa en general por determinación de magnitud.[27]

Kant está aquí, de hecho, reafirmando una posición afirmada en la disertación:

> A estos se agrega un cierto concepto que, aunque en sí mismo intelectual, exige su concreción en las nociones auxiliares del tiempo y el espacio (en la suma y sucesiva yuxtaposición simultánea de una pluralidad), a saber, el concepto de número, tratado por aritmética. [§12][28]

Estas observaciones colocan la aritmética menos en lo intuitivo y más en el lado conceptual de nuestro conocimiento. Si la aritmética tuviera como objeto "un objeto de intuición como magnitud", es decir, formas tales como los puntos, líneas y figuras de geometría, entonces se referiría directamente a una forma de intuición. Pero en cambio se refiere a "un concepto de una cosa en general"; La ciencia del número es una "síntesis intelectual pura". Esta última frase sugiere especialmente que las nociones aritméticas podrían definirse en términos de categorías puras y, por lo tanto, estar asociadas con formas lógicas que no se refieren en absoluto a las condiciones de sensibilidad. Tal punto de vista parecería entrar en conflicto con el estado del Esquematismo de que el número es un esquema.

La referencia a "un concepto de una cosa en general" sin duda debe significar en el mismo sentido en que se dice que las categorías especifican el concepto de un objeto en general, y la síntesis intelectual pura es sin duda la de la deducción trascendental de la segunda edición, que es la síntesis de un múltiple de intuición en general, que para nosotros se realiza con el fin de proporcionar conocimiento solo en aplicación a las intuiciones de acuerdo con *nuestras* formas de intuición. Por lo tanto, el "concepto de un objeto en general" podría dar lugar al conocimiento real *de los objetos* solo si estos objetos se pueden dar de acuerdo con nuestras formas de intuición.

Pero, ¿significa esto simplemente que los objetos en el espacio y el tiempo proporcionan la única aplicación concreta de estos conceptos que podemos saber que existe, como cabría esperar de la ausencia de una referencia especial a la intuición? Creo que si significa esto o algo más drástico es un caso especial del dilema general sobre el entendimiento que mencioné al principio. En cualquier caso, sin embargo, sería una interpretación plausible de Kant decir que se debe recurrir a las formas de intuición para verificar la existencia de suposiciones matemáticas.

[27] Die Arithmetik hat freylich keine Axiomen, weil sie eigentlich kein *Quantum*, d. i. keinen Gegenstand der Anschauung als Größe, sondern blos die *Quantität*, d. i. einen Begriff von einem Dinge überhaupt durch Größenbestimmung zum Objecte hat. *Ak* X 555

[28] Accedit hisce conceptus quidam, in se quidem intellectualis, sed cuius tamen actuatio in concreto exigit opitulantes notiones temporis et spatii (successive addendo plura et iuxta se simul ponendo), qui est conceptus numeri, quem tractat ARITHMETICA. [§12] *Ak* II 397

Sin embargo, no está muy claro cómo aplicar las concepciones generales derivadas de la Estética y la Deducción Trascendental al caso en cuestión. Las proposiciones de existencia directa en matemáticas puras son de entidades *abstractas*, y solo en el caso de la geometría se puede decir que están en el espacio y el tiempo. Creo que los objetos considerados en la aritmética y la teoría de conjuntos predicativa pueden interpretarse como *formas* de objetos espacio-temporales. La teoría de conjuntos completa, por supuesto, no se acomodaría de esta manera, pero no es razonable esperar que, desde el punto de vista kantiano, la teoría de conjuntos impredicativa sea un conocimiento intuitivo o incluso un conocimiento genuino. Podría decirse legítimamente que postula entidades más allá del campo de la experiencia posible.[29]

VII

Es natural pensar en los números naturales como representados para los sentidos (y, por supuesto, en el espacio y el tiempo) por números. Esto no significa principalmente que los números funcionen como nombres de números, aunque por supuesto lo hacen, sino que proporcionan instancias de la estructura de los números naturales. En el sentido algebraico, el conjunto de números generados por algún procedimiento es isomorfo a los números naturales en el sentido de que tiene un elemento inicial (por ejemplo, 'o') y una relación sucesora que requiere la noción de números naturales. En este sentido, por supuesto, los números son objetos matemáticos abstractos; pueden tomarse como figuras geométricas. Pero, por supuesto, las fichas concretas de los primeros n números son también un modelo de los números del 1 al n o del o al n-1. Un conjunto de objetos tiene n elementos si se puede poner en correspondencia uno a uno con los números del 1 al n; una forma estándar de hacerlo es poniéndolos en algún orden en correspondencia con ciertos números que representan estos números, es decir, contando. (Los números utilizados en el trabajo en la lógica formal, por ejemplo, donde el elemento inicial es 'o' y el número (n + 1) se obtiene al prefijar '*S*' al enésimo número, tienen la propiedad adicional de que cada número contiene dentro de sí a todos los anteriores de modo que el enésimo número sea en sí mismo un modelo de los números de o a n).

La base para el uso de una percepción concreta de una secuencia de n términos para verificar proposiciones generales es que, dado que sirve como representante de una estructura, cualquier otra instancia de la misma estructura podría cumplir el mismo propósito, que en cualquier otra secuencia perceptible que se puede colocar en una correspondencia uno a uno con el fin de preservar la relación sucesora. Esto podría

[29] Un caso intermedio interesante es cómo las pruebas constructivas como objeto de las matemáticas intuicionistas podrían interpretarse desde el punto de vista kantiano. Según Kant, tal como lo interpreto, ciertas construcciones empíricas pueden funcionar como paradigmas para establecer verdades necesarias debido a la intención o el significado asociado con ellas. El intuicionismo requeriría que nuestra comprensión de estos significados sea suficiente no solo para establecer leyes directamente relacionadas con los objetos en el espacio y el tiempo, sino también para establecer leyes relativas a las *intenciones* como "construcciones mentales". Dejo abierta la cuestión de si esto es posible desde el punto de vista de Kant o no.

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 161-189
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775988

justificarnos al llamar a esa percepción una "intuición formal". Podríamos notar que la existencia física de los objetos no es directamente necesaria, por lo que también podemos abstraernos de ese factor "material".

Una intuición empírica funciona, podríamos decir, como una intuición pura si se toma como un representante de una estructura abstracta. Tal percepción proporciona la realización más completa posible ante la mente de un concepto abstracto. Una de las preguntas importantes sobre la filosofía de la aritmética de Kant es si existe una realización comparable más allá de los límites de la escala de percepción concreta.

Antes de que podamos entrar en esta pregunta, permítanme señalar otra razón estrechamente relacionada en la mente de Kant para considerar las matemáticas como dependientes de la intuición. Esto surge en particular en el concepto de "construcción simbólica". El algebrista, según Kant, está obteniendo resultados al manipular *símbolos* de acuerdo con ciertas reglas, que no podría obtener sin una representación intuitiva análoga de sus conceptos. La "construcción simbólica" es esencialmente una construcción con *símbolos* como objetos de intuición:

> Luego de haber caracterizado también el concepto universal de las cantidades de acuerdo con las diversas relaciones de estas, exhibe en la intuición, según ciertas reglas universales, toda operación generada y modificada por la cantidad, allí donde una cantidad ha de ser dividida por otra, pone los caracteres de ambas juntos, según la forma que caracteriza a la división, etc., y así por medio de una construcción simbólica, llega tan bien como [llega] la geometría siguiendo una [construcción] ostensiva o geométrica (de los objetos mismos), hasta allí donde el conocimiento discursivo por mecho de meros conceptos nunca podría llegar. A717/B745

El hecho de que esto es una fuente de claridad y evidencia de las matemáticas y proporciona una conexión de las matemáticas con la sensibilidad se indica por el siguiente comentario: "aun sin tomar en consideración lo heurístico, se preservan de errores todos los raciocinios poniendo a la vista cada uno de ellos." (A734/B762)

Una conexión de las matemáticas y los sentidos a través de operaciones simbólicas ya se reivindica en el ensayo premiado de Kant de 1764 *Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral*[30] que presenta un prototipo de la teoría del método matemático y filosófico de La Disciplina de la Razón Pura en el Uso Dogmático. Por ejemplo, considere la declaración de este último:

> El conocimiento filosófico considera, pues, lo particular sólo en lo universal; el matemático, lo universal en lo particular, e incluso en lo singular; y sin embargo [lo hace] a priori y por medio de la razón…. A714/B742

Esta distinción corresponde en el ensayo premiado a lo siguiente, donde se enfatiza explícitamente el papel distintivo de los signos en matemáticas: "La matemática considera

[30] *Ak*. II 272-301

ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775988

en sus soluciones, pruebas e inferencias lo universal *en* [*unter*] los signos *in concreto*, filosofía lo universal a *través* [*durch*] de los signos *in abstracto*"[31]. La certeza de las matemáticas está relacionada con el hecho de que los signos son sensibles.

> Dado que los signos de las matemáticas son medios sensibles de conocimiento, uno puede saber con la misma confianza con la que está seguro de lo que ve con sus propios ojos que no ha dejado ningún concepto fuera de cuenta, que cada ecuación se ha derivado de reglas fáciles, etc.; por lo tanto, la atención se hace mucho más fácil ya que debe tener en cuenta solo los signos, ya que se conocen individualmente, no las cosas como se representan en general.[32]

El ensayo premiado sugiere una posición incompatible con *La Crítica de la Razón Pura*, es decir, dado que en matemáticas los signos se manipulan de acuerdo con las reglas que hemos establecido (en contraste con la filosofía, donde el valor de cualquier definición depende de que tenga un cierto grado de fidelidad al uso preanalítico), la operación con signos de acuerdo con las reglas, sin prestar atención a lo que significan, es en sí misma una garantía suficiente de exactitud.[33]

Estos pasajes muestran que existía una conexión entre la *sensibilidad* y el carácter intuitivo de las matemáticas en la mente de Kant antes de que desarrollara la teoría del espacio y el tiempo de la Estética. Sin embargo, a diferencia del trabajo posterior, la inferencia se extrae en esta etapa de esta conexión a una limitación de la aplicación de las matemáticas a los *objetos* sensibles.

El punto general detrás de las observaciones sobre la construcción simbólica puede expresarse de la siguiente manera: en general, una proposición matemática solo puede verificarse sobre la base de una prueba o cálculo, que es en sí mismo, una construcción en la intuición. Pero en vista de las observaciones sobre '7 + 5 = 12', un hecho más especial puede haber influido en Kant. Ciertas "construcciones simbólicas" asociadas con proposiciones sobre números en realidad involucran construcciones isomorfas a los números mismos y sus relaciones, o al menos un aspecto de ellos. Por lo tanto, en la prueba de Leibniz de que 2 + 2 = 4, '2 + 2' debe escribirse como '2+ (1 + 1)' y los dos 1, por así decirlo, deben

[31] " Die Mathematik betrachtet in ihren Auflösungen, Beweisen, und Folgerungen das Allgemeine unter den Zeichen *concreto*, die Weltweisheit das Allgemeine durch die Zeichen *in abstracto*. (Erste Betrachtung, §2 encabezado, *Ak*. II 278.

[32] S Denn da die Zeichen der Mathematik sinnliche Erkenntnismittel sind, so kann man mit derselben Zuversicht, wie man dessen, was man mit Augen sieht, versichert ist, auch wissen, dass man keinen Begriff aus der Acht gelassen, das seine jede einzelne Vergleichung nach leichten Regeln geschehen sei u.s.w. Wobei die Aufmerksamkeit dadurch sehr erleichtert wird, dass sie nicht die Sachen selbst in ihrer allgemeinen Vorstellung, sondern die Zeichen in ihrer einzelnen Erkenntnis, die da sinnlich ist, zu gedenken hat. (Dritte Betrachtung, §1, *Ak* II 291).

[33] Pero cf. lo siguiente: in der Geometrie, wo die Zeichen mit den bezeichneten Sachen überdem eine Ähnlichkeit haben, ist daher diese Evidenz noch grösser, obgleich in der Buchstabenrechnung die Gewissheit ebenso zuverlässig ist. (Ibid., 292).

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 161-189
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775988

agregarse al '2'. Una prueba correspondiente de '7 + 5 = 12' implicaría cinco de estos pasos en lugar de dos.

Varios escritores han hecho una observación similar sobre el esquema (1). Aunque el esquema no *implica* que el universo contenga elementos o que se pueda llevar a cabo cualquier construcción, la *prueba* de ello consiste en escribir un grupo de dos símbolos que representen las *F*, otro grupo que represente las *G* y juntarlas para obtener cuatro símbolos. De modo que no está nada claro que '2 + 2 = 4', interpretado como una proposición sobre las combinaciones de símbolos, no sea más elemental que el esquema (1) lógicamente válido.

Ya he sugerido que la construcción "simbólica" en la generación de números ya es suficiente para resolver la cuestión de su referencia. Del mismo modo, la realización real de los cálculos muestra el carácter bien definido para argumentos individuales de funciones definidas recursivamente. Sin embargo, la inducción, que he querido dejar fuera de consideración aquí, está involucrada en ver que están definidos para todos los argumentos. Tal vez Kant debería haber dicho que, aparte de la intuición, ni siquiera sé que existe un número como '7 + 5'. Y parece que una construcción en particular no podría ver que existe un número sin ver también que es 12. Esto está de acuerdo con la declaración de Hintikka de que el sentido de la declaración de Kant de que las fórmulas numéricas son indemostrables es que la construcción requerida para la prueba ya es suficiente.

Las consideraciones sobre el papel de las operaciones simbólicas se aplican igualmente a la lógica y, por lo tanto, socavan el aparente deseo de Kant de distinguirlas sobre esta base. Esto aparece con más fuerza en la lógica moderna, donde en lugar de una breve lista de formas de inferencia válida, uno tiene una lista infinita que debe ser especificada por alguna condición inductiva. En mi opinión, esta es una consecuencia que debe aceptarse e incluso está de acuerdo en general con las declaraciones de Kant de que la síntesis subyace incluso a la posibilidad de juicios analíticos.[34]

Creo que la conexión especial de la aritmética y el tiempo puede explicarse de la siguiente manera: si uno construye de alguna manera, como en el papel o en la cabeza, una secuencia de símbolos como los primeros *n* números, la estructura ya está representada en la secuencia de operaciones y, más generalmente, en la sucesión de actos mentales de correr a través de un grupo de *n* objetos, como en contar. Así, el tiempo entra a través de la sucesión de actos involucrados en la construcción o en la aprehensión sucesiva. Esto se conecta con la observación de Kant sobre el número en el Esquematismo. En las operaciones involucradas en la representación de un número para los sentidos, también generamos una

[34] [Este "acuerdo general" ahora me parece bastante tenue, y Manley Thompson probablemente tenga razón al decir que la síntesis requerida para los juicios analíticos es claramente distinguible de la de los juicios matemáticos ("Singular Terms and Intuitions in Kant's Epistemology," p. 342, n.23).
Sin embargo, una respuesta al punto principal, que la lógica no es completamente independiente de la construcción intuitiva, exigiría mucho de la distinción de Kant entre pruebas intuitivas y discursivas, como queda claro por la interesante discusión de Thompson sobre esta distinción (ibid., pp. 340- 342). Su interpretación implica límites bastante extremos en el papel de la lógica en las matemáticas. Esto plantea dudas sobre si la distinción de Kant es finalmente sostenible.]

estructura en el *tiempo* que representa el número. El tiempo proporciona una fuente universal de modelos para los números. En particular, Kant sostuvo que es solo a través de la percepción sucesiva de diferentes aspectos de un múltiple y, sin embargo, teniendo en cuenta como aspectos de una intuición, podemos tener una concepción clara de una pluralidad. Para números bastante pequeños, esto parece dudoso, aunque no para los más grandes. No obstante, el elemento de sucesión aparece incluso para los más pequeños en la comparación involucrada en generarlos o percibirlos en *orden*, y el orden es ciertamente parte de nuestro concepto de número. Lo que le daría al tiempo un papel especial en nuestro concepto de número que no tiene en general no es su necesidad, ya que el tiempo es de alguna manera u otro necesario para todos los conceptos, ni una referencia explícita al tiempo en declaraciones numéricas, que no existe, pero es suficiente, porque el orden temporal proporciona un representante del número que está presente en nuestra conciencia, si es que hay alguno presente.

Por supuesto, una cosa es hablar de representación en el espacio y el tiempo y otra hablar de representación para *los sentidos*. Lo que está representado para los sentidos está presumiblemente representado en el espacio y el tiempo, pero quizás no al revés. Establecer un vínculo de estos dos Kant apelaría a su teoría del espacio y el tiempo como formas de sensibilidad. La parte relevante de esta teoría es que las estructuras que se pueden representar en el espacio y el tiempo son estructuras de *posibles* objetos de percepción. El tipo de posibilidad en juego aquí debe ser esencialmente matemático e ir más allá de la posibilidad "práctica" o física.[35]

Considere una vez más un procedimiento para generar números, digamos comenzando con 'o' y anteponiendo las ocurrencias de 'S'. El uso real de estos como símbolos requiere que sean objetos perceptibles. No obstante, decimos que es *posible* repetir el procedimiento indefinidamente y, por lo tanto, construir indefinidamente muchos números. Por lo tanto, está claro que los números (tipos de números)[36] que en este sentido es posible construir se extienden mucho más allá de los símbolos numéricos que se han producido en la historia o que, en cualquier sentido concreto, podrían usarse como símbolos.[37] Esta posibilidad de iteración es necesaria para la posibilidad de construir indefinidamente muchos números y, por lo tanto, para el infinito de los números naturales a través de una construcción

[35] Se podría decir que es posible construir casos. Sin embargo, el sentido de posibilidad en el que esto es posible se deriva de la posibilidad matemática de construir tipos (o *existencia* matemática de tipos). Porque declaramos que los casos son posibles ya sea directamente sobre la base de la construcción matemática, o físicamente sobre la base de una teoría en la que un espacio matemático que de alguna manera es infinito es un ingrediente.

[36] Cf. mi "Infinity and Kant's conception of the 'possibility of experience'" en *Mathematics in Philosophy* (1964)

[37] Esto no implica que haya un límite superior en los números que pueden representarse individualmente, una vez que admitimos anotaciones para funciones de crecimiento más rápido que la función sucesora. Esto sucede ya en notación de números arábigos. El número 1,000,000,000,000, si está escrito en notación '0' y *'S'* con cuatro símbolos por centímetro, se extendería desde la tierra hasta la luna. El supuesto de que exista un límite tan alto se deduce, por supuesto, de la suposición de que la historia humana debe llegar a su fin después de un tiempo finito.

CON-TEXTOS KANTIANOS
International Journal of Philosophy
N.º 14, December 2021, pp. 161-189
ISSN: 2386-7655
Doi: 10.5281/zenodo.5775988

intuitiva. Además, parece necesaria cierta comprensión de dicha iteración para la inducción matemática.

En la medida en que se supone que la apelación a la intuición pura para la evidencia de enunciados matemáticos es una analogía del conocimiento matemático y perceptivo, no sirve tanto para las proposiciones que involucran el concepto de iteración indefinida, como las probadas por inducción, que para proposiciones como 2 + 2 = 4. Parece que hay dos tipos independientes de comprensión de nuestras formas de intuición que una visión kantiana requiere que tengamos, lo que permite que una percepción particular funcione como una "intuición formal" y lo que tenemos en la *posible progresión* de la generación de intuiciones según una regla. Hablar de un *tipo* de intuición peculiar en el segundo caso parece bastante engañoso. El conocimiento matemático involucrado tiene una relación altamente compleja con la "intuición" en el caso más específicamente kantiano.

La complejidad debe estar presente de alguna manera en las "intuiciones" del espacio y el tiempo, ya que el espacio es un individuo *dado*, pero su estructura también determina los límites de la *posible* experiencia y contiene varios aspectos infinitos. Sin duda, la plausibilidad de la idea de que el espacio está presente en la experiencia inmediata hizo que a Kant le resultara más difícil apreciar las diferencias de los tipos de evidencias cubiertas por sus nociones de intuición pura. Estoy seguro de que se podría hacer más para explicar la visión kantiana de su conexión.

En nuestra discusión sobre la intuición, hemos perdido un poco de vista la visión de la lógica que al principio atribuimos a Kant, que, a excepción de la cuestión de la existencia, se asemeja a los puntos de vista modernos llamados platónicos. Aunque la visión de la intuición de Kant encaja mejor con las tendencias modernas llamadas constructivistas o intuicionistas, parece cierto que el concepto de intuición pura estaba destinado a ir con esta visión de la lógica y no reemplazarla. Sin utilizar nociones como "conceptos" y "objeto" de una manera bastante general, probablemente no sea posible describirlo. Sería apresurado por esa razón identificar la concepción de intuición de Kant con la de los intuicionistas holandeses, aunque Brouwer indudablemente muestra cierta afinidad. También sería apresurado considerar que la crítica de Brouwer a las matemáticas clásicas está totalmente de acuerdo con el kantismo.