

Modelización del Comportamiento Sísmico de Geoestructuras

M. PASTOR^{1,4}, O. C. ZIENKIEWICZ³, T. LI², L. XIAOQING²,
J. A. FERNÁNDEZ-MERODO⁴ y P. MIRA^{1,4}

¹ Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas, Madrid (Spain)

² University of Hohai (China)

³ University College of Swansea (UK)

⁴ ETS de Ingenieros de Caminos, Madrid (Spain)

RESUMEN

El objetivo de este capítulo es presentar los modelos matemáticos, constitutivos y numéricos que se emplean hoy en día para reproducir el comportamiento de cimentaciones y geoestructuras bajo sollicitaciones sísmicas. El punto de partida son las ecuaciones de Biot-Zienkiewicz, que describen el acoplamiento entre el esqueleto sólido y el fluido intersticial. A continuación se describe sucintamente la teoría de la plasticidad generalizada, en cuyo marco se pueden desarrollar ecuaciones constitutivas capaces de reproducir aspectos tales como la licuación o la movilidad cíclica. Finalmente, se presenta la discretización del modelo matemático empleando el Método de los Elementos Finitos.

ABSTRACT

This chapter is devoted to introduce the mathematical, constitutive and numerical models which can be applied to simulate the complex behaviour of foundations and geostructures subjected to earthquake loading. We begin presenting the Biot-Zienkiewicz equations which describe the coupling between soil skeleton and the pore fluid. Then, we introduce constitutive models able to reproduce phenomena such as liquefaction or cycli mobility. Finally, the developed equations are discretized using the Finite Element Method.

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo de la respuesta sísmica de geoestructuras presenta dos dificultades específicas: (i) el acoplamiento existente entre el esqueleto sólido y el fluido intersticial, y (ii) la modelización del comportamiento mecánico del esqueleto sólido, especialmente su tendencia a densificar bajo carga cíclica.

El objetivo de este capítulo es describir las bases de un programa de cálculo en elementos finitos que permite la simulación del comportamiento de geoestructuras y cimentaciones bajo carga sísmica.

En primer lugar se tratará del modelo matemático que describe el acoplamiento fluido-esqueleto antes mencionado. Estas ecuaciones, propuestas inicialmente por Biot, fueron modificadas posteriormente por Zienkiewicz [1], [2] de forma que pudieran ser implementadas en modelos numéricos de una forma más sencilla.

A continuación se describirán tanto los aspectos fundamentales del comportamiento del suelo bajo carga sísmica como los modelos constitutivos que permiten reproducir dicho comportamiento.

El tercer apartado de este capítulo será dedicado a describir de una forma sucinta las técnicas numéricas mediante las que se discretizarán las ecuaciones del modelo.

Es importante conocer los límites de aplicación de un modelo numérico contrastando sus predicciones con medidas efectuadas en la realidad o en laboratorio. Se dedicará por ello el cuarto apartado a describir algunos ensayos realizados en laboratorio donde se ha reproducido el comportamiento dinámico de diversas obras. Se presentará también una simulación de la rotura de la presa de San Fernando.

Finalmente, se describirán algunas de las herramientas de cálculo disponibles hoy en día, y se comentarán algunos problemas en los que se está investigando en la actualidad.

2. ACOPLAMIENTO SUELO-AGUA INTERSTICIAL: LICUACIÓN

Se ha comentado ya que el acoplamiento entre el esqueleto sólido y el agua intersticial juega un papel fundamental. En ocasiones, este acoplamiento, unido a la tendencia del suelo a densificar, junto con una permeabilidad baja y una velocidad alta de aplicación de la carga puede hacer que se llegue a un tipo de rotura conocido como licuación. El suelo se transforma entonces en un fluido viscoso en el que se hunden los edificios y estructuras cimentados en él.



Figura 1. Licuación de cimentaciones en Niigata.

En la Fig. 1, tomada de la ref. [3], se puede ver el estado de unos edificios en Niigat (Japón) tras un terremoto en el que se produjo la licuación del suelo donde estaban cimentados.

Este fenómeno se debe a la tendencia del suelo a compactar bajo carga cíclica, que, debido a la baja permeabilidad relativa y a la velocidad de aplicación de la carga produce un aumento de la presión intersticial del agua. Si esta presión intersticial llega a alcanzar el valor de la tensión intergranular inicial, las tensiones efectivas se hacen prácticamente nulas y el suelo se transforma en un fluido.

En la Fig. 2 se esquematiza un estrato de arena saturada de 30 m. de espesor que descansa sobre una base de roca rígida, por la que se propaga un terremoto cuya historia de aceleraciones se da en la Fig. 3. En la columna de suelo se han señalado una serie de puntos (A, B, etc.) en los que se ha estudiado la evolución de la presión intersticial a lo largo del tiempo (Fig. 4). Las presiones intersticiales aumentan a lo largo del tiempo como consecuencia de la tendencia del suelo a compactar. En esta figura puede verse cómo las mayores presiones corresponden a los puntos más profundos. Sin embargo, la clave para entender lo que ha ocurrido en la realidad está en la Fig. 5, en la que se

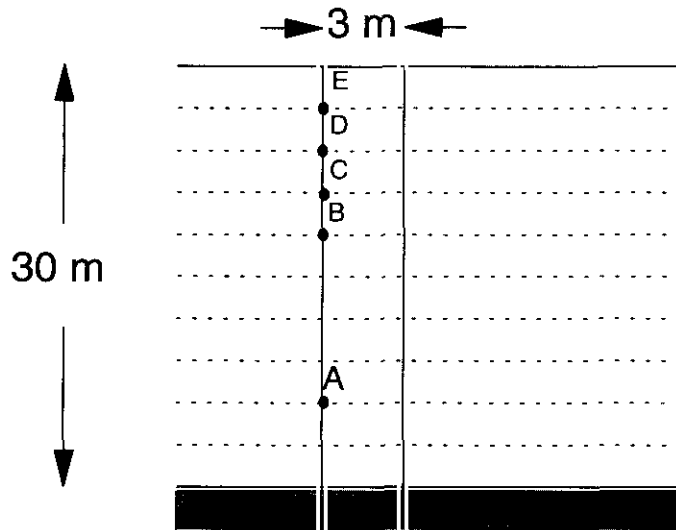


Figura 2. Estrato de suelo.

dan los perfiles de presión intersticial junto con las tensiones verticales. Se puede observar cómo la presión intersticial alcanza la vertical en la zona superior del estrato, donde se produce la licuación del suelo. A partir de este momento, el problema debe analizarse con herramientas más próximas a la mecánica de fluidos computacional.

Este sencillo ejemplo, empleado para mostrar algunos aspectos clave de la licuación, se ha calculado con el programa de elementos finitos GeHoMadrid.

Los ingredientes fundamentales del programa son: (i) Un modelo matemático del acoplamiento esqueleto fluido, (ii) Un modelo de comportamiento mecánico del suelo, y (iii) un modelo numérico.

Respecto del primero, cabe decir que el problema se formula en desplazamientos del esqueleto sólido \mathbf{u} y presiones intersticiales p_w . Esta es la formulación conocida como u-p, propuesta por Zienkiewicz. Las ecuaciones básicas del modelo son las siguientes:

(i) Balance de momento lineal para la mezcla:

$$\mathbf{S}^T(\boldsymbol{\sigma}' - m\mathbf{p}_w) + \rho_m \mathbf{b} = \rho_m \ddot{\mathbf{u}} \quad [1]$$

donde $\boldsymbol{\sigma}'$ es la tensión efectiva, dada por $\boldsymbol{\sigma}' = (\sigma'_{xx}, \sigma'_{yy}, \sigma'_{zz}, \sigma'_{xy}, \sigma'_{yz}, \sigma'_{zx})^T$, $\mathbf{m}^T = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$ es un vector que representa al tensor delta de Kronecker de

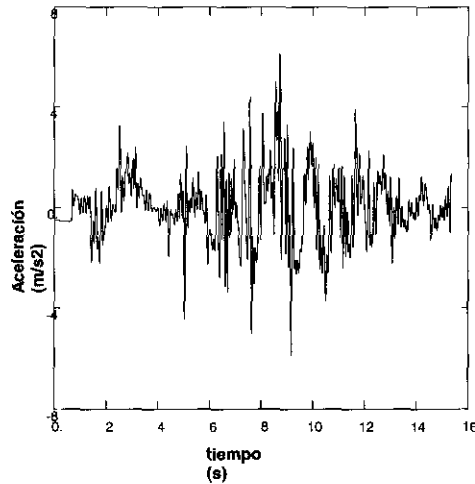


Figura 3. Acelerograma.

segundo orden δ_{ij} , \mathbf{b} son las fuerzas por unidad de masa, ρ_m la densidad de la mezcla, $[\mathbf{u}]\ddot{}$ la aceleración del esqueleto sólido, y \mathbf{S} es la forma vectorial del operador de deformaciones, que en tres dimensiones está dado por:

$$S^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

(ii) Balance de momento lineal (fluido) y conservación de masa de la fase fluida:

$$\mathbf{m}^T \mathbf{S} \dot{\mathbf{u}} - \nabla^T (\mathbf{k}_w \nabla p_w) + \frac{\dot{p}_w}{Q^*} + \nabla^T \mathbf{k}_w \rho_w \mathbf{b} = 0 \quad [2]$$

donde \mathbf{k}_w es la matriz de permeabilidad y Q^* la rigidez volumétrica conjunta del agua y de los granos del suelo dada por:

$$\frac{1}{Q^*} = \frac{n}{K_w} + \frac{1-n}{K_s}$$

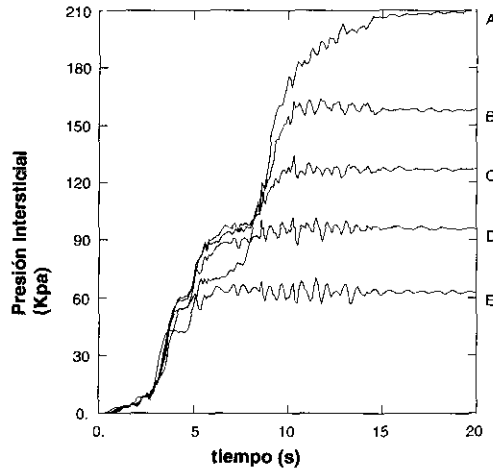


Figura 4. Evolución de la presión Intersticial.

siendo n la porosidad del suelo, K_w el módulo de rigidez volumétrico del agua, K_s el de las partículas sólidas del suelo y ρ_w la densidad del fluido.

Estas dos ecuaciones se complementan con:

(iii) Una ecuación constitutiva que describa el comportamiento mecánico del esqueleto,

$$d\sigma' = \mathbf{D} \cdot d\epsilon \tag{3}$$

y

(iv) Las relaciones cinemáticas deformaciones-desplazamientos:

$$\epsilon = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u} \tag{4}$$

las condiciones de contorno a aplicar son las siguientes:

(a1) En Γ_u :

$$\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} = 0$$

(a2) En Γ_t :

$$\sigma'_{ij} n_j - n_i p_w - \tilde{t}_i = 0$$

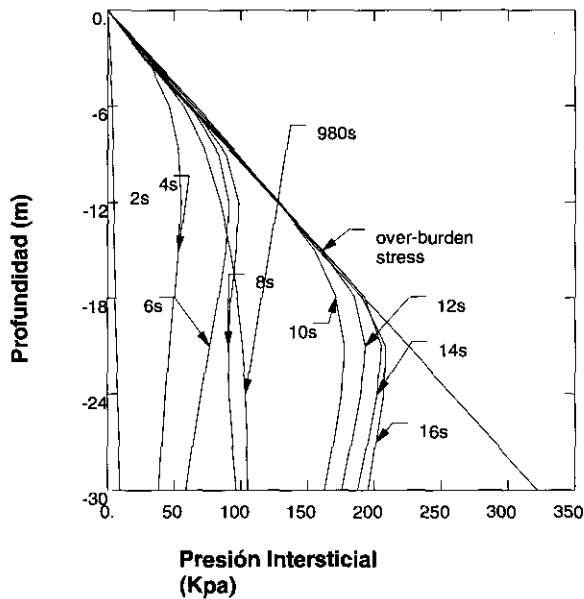


Figura 5. Perfiles de Presión Intersticial.

donde $\tilde{\mathbf{u}}$ y $\tilde{\mathbf{t}}_i$ son respectivamente los desplazamientos prescritos y las tracciones aplicadas en la superficie.

Respecto de la presión intersticial,

(b1) En Γ_p :

$$p_w - \tilde{p}_w = 0$$

(b2) En Γ_q :

$$\mathbf{k}_w \frac{\partial p_w}{\partial n} + \tilde{\mathbf{q}} = 0$$

donde \tilde{p}_w y $\tilde{\mathbf{q}}$ son las presiones y el flujo prescritas:

Las condiciones iniciales en $t = 0$ son:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$$

$$p_w = p_{w0}$$

[5]

3. ECUACIONES CONSTITUTIVAS PARA SUELOS BAJO CARGA SÍSMICA

Los tres aspectos fundamentales del comportamiento de los suelos bajo carga sísmica son los siguientes:

- Cuando a un suelo se le somete a una serie de ciclos de carga-descarga, como los que se generan bajo la acción de un terremoto, el suelo tiende a compactar.
- El proceso de carga sísmica tiene lugar, en general, en condiciones sin drenaje. Esto quiere decir que la tendencia del suelo a compactar se traduce en un aumento de la presión intersticial que tarda en disiparse un tiempo considerablemente mayor que la duración del terremoto.
- Las condiciones de rotura del suelo bajo carga monótona y sísmica son, esencialmente, las mismas. Si se llega a rotura con una serie de ciclos de amplitud más baja que la correspondiente a carga estática es debido a la generación de presión intersticial antes mencionada, que ha hecho disminuir la tensión efectiva de confinamiento. (No se considera aquí el daño acumulado en el material de cementación).

Los modelos constitutivos más empleados hoy en día para suelos son los de tipo plástico. En ellos se parte de la existencia de una función convexa de carga o de fluencia en el espacio de tensiones.

$$f(\sigma', k) = 0$$

En esta expresión, σ' es el tensor de tensiones efectivas (totales menos intersticiales) de segundo orden o una representación vectorial del mismo y k un parámetro o conjunto de parámetros que caracterizan el tamaño y la forma de la superficie $f = 0$.

En el caso de que el material sea isótropo, los teoremas de representación de funciones escalares de una magnitud tensorial de segundo orden permiten formular f en función de los invariantes del tensor de tensiones, o de combinaciones de los mismos. En Geotecnia suelen emplearse p , q y θ , que en condiciones de simetría triaxial cilíndrica $\sigma'_2 = \sigma'_3$ como las que se dan en el clásico ensayo triaxial vienen dados por:

$$p = \frac{1}{3}(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) = \frac{1}{3}(\sigma'_1 + 2\sigma'_3)$$

$$q = (\sigma'_1 - \sigma'_3)$$

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= 1 \text{ (compresión)} \\ &= -1 \text{ (extensión)}\end{aligned}$$

Para estados de tensión situados dentro de la superficie de fluencia el comportamiento del material es elástico:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e = C^e d\sigma'$$

donde C^e es el tensor constitutivo elástico. Es de destacar que en este caso, un ciclo de carga ($d\sigma'$, $-d\sigma'$) no genera ninguna deformación permanente.

Cuando la tensión está situada sobre la superficie de fluencia y el producto escalar

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'}^T \cdot d\sigma' > 0$$

aparecen deformaciones plásticas

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$$

siendo ahora

$$d\varepsilon^p = \frac{1}{H} \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma'}^T \cdot d\sigma' \right)$$

donde H es el denominado módulo plástico, y $g(\sigma') = 0$ es una superficie denominada potencial plástico, tal que la normal a ella da la dirección del incremento de deformación plástica. En el caso de que el potencial plástico y la superficie de fluencia coincidan, se habla de "plasticidad asociada", empleándose la denominación "plasticidad no-asociada" para el caso de $f \neq g$.

Es importante destacar el hecho de que no todos los modelos plásticos producen predicciones fiables de la carga de rotura en condiciones CU o sin drenaje. Así por ejemplo, el modelo clásico de Mohr-Coulomb predice una carga de rotura considerablemente mayor que la real, como se indica en la Fig. 6. Esto es debido a que la superficie de rotura es un cono, dentro del cual no hay deformaciones plásticas, lo que lleva a una trayectoria de tensiones vertical en el plano $p' - q$. (Considérese el hecho de que, al ser se la deformación volumétrica elástica nula, la variación de p' debe de ser cero. La deformación volumétrica total es nula, ya que se trata de un proceso de carga

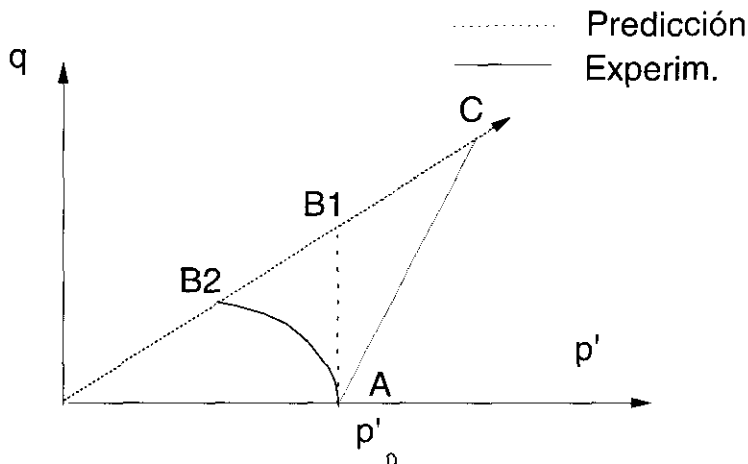


Figura 6. Trayectoria de tensiones en un ensayo consolidado sin drenaje (CU).

sin drenaje, y la plástica es nula, ya que la tensión está dentro de la superficie de fluencia).

Este problema no existe en el caso de los denominados “Modelos de Estado Crítico”, o de Cambridge, en los que la superficie de fluencia es cerrada. Sin embargo, estos modelos no predicen de forma adecuada las condiciones de rotura sin drenaje en arenas, de forma que no permiten reproducir el fenómeno de la licuación de una arena muy suelta.

Para subsanar este problema, deben introducirse dos ingredientes en el modelo:

- La ley de flujo debe ser no-asociada
- La ley de endurecimiento no debe depender únicamente de la densidad del material

Estas ideas fueron introducidas por Nova y Wilde [4], [5].

En la Fig. 7 se dan las trayectorias de tensiones de arenas de diferentes densidades en ensayos triaxiales sin drenaje, junto con las predicciones realizadas con un modelo que emplea los dos elementos descritos.

Es posible, como se ha mostrado, reproducir las condiciones de rotura de los suelos bajo carga rápida, empleando modelos de plasticidad clásica del tipo Estado Crítico. Sin embargo, estos modelos no son capaces de predecir la acumulación de deformaciones plásticas y el crecimiento de la presión intersticial

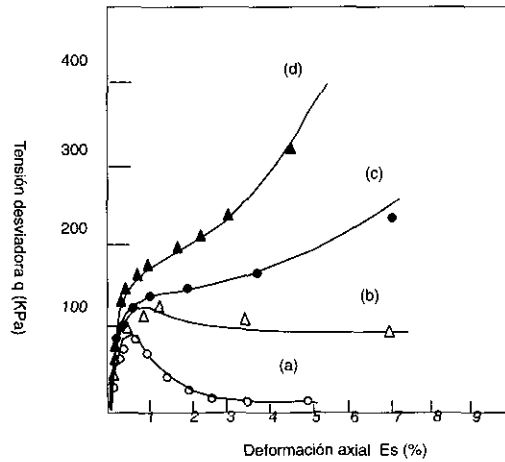


Figura 7. Trayectorias de tensiones en ensayos sin drenaje en arenas de distintas densidades.

cuando se aplique una serie de ciclos de carga de igual amplitud. Esto se ilustra en la Fig. 8, donde se dan las predicciones de un modelo de plasticidad del tipo Estado Crítico junto con el comportamiento real del material.

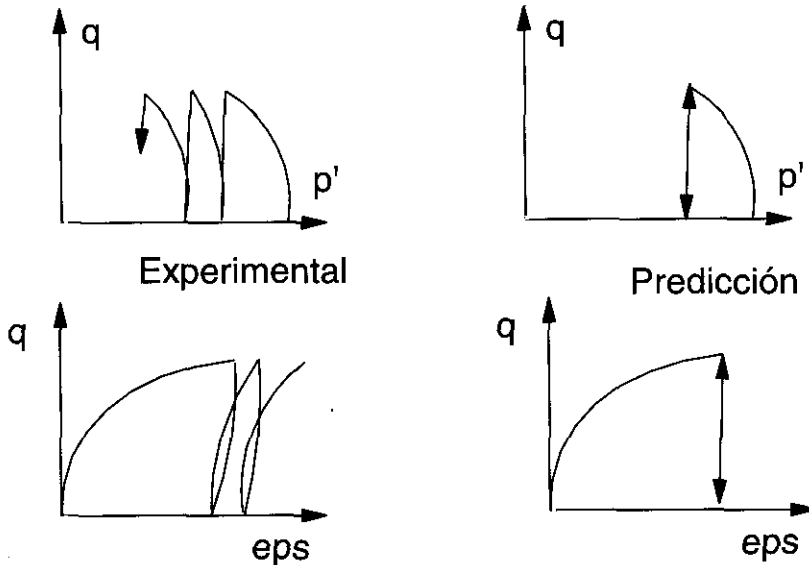


Figura 8. Comportamiento real del suelo y predicciones de un modelo de estado crítico.

Para resolver este problema, se han seguido varias vías. La plasticidad con endurecimiento cinemático, introducida por Mroz en 1967, permitió la simulación del crecimiento de la deformación plástica con los ciclos de carga [14]. Los modelos endocrónicos, mediante los cuales se consiguió introducir la densificación bajo carga cíclica [15], se emplearon conjuntamente con modelos de tipo plástico en [16]. La densificación, o el aumento de la presión intersticial dentro de la superficie de fluencia se obtenía como una deformación adicional.

La teoría de la Plasticidad con Superficie Frontera (Bounding Surface Plasticity) propuesta por Dafalias y Popov en 1975 [17], o el modelo de Hashiguchi [19], fueron una alternativa sencilla a los modelos de plasticidad con endurecimiento cinemático. Cabe mencionar también los modelos propuestos para licuación de arenas en [19], [20].

Son de destacar también los recientemente desarrollados modelos hipoplásticos, en los que se introduce la dependencia de la dirección del incremento de carga de una forma más general que en la Plasticidad [21], [22], [23], [24], [25].

La Teoría Generalizada de la Plasticidad, propuesta por Zienkiewicz y Mroz es un marco en el que se pueden encuadrar los modelos antes descritos, permitiendo tener en cuenta las deformaciones plásticas que se producen en descarga [?], [?].

El punto de partida es suponer que la respuesta del material no depende de la velocidad de variación de las tensiones, pudiendo expresarse la relación entre los incrementos de tensión y de deformación mediante una relación del tipo:

$$d\varepsilon = \Phi(d\sigma')$$

donde Φ es una función del incremento de tensión $d\sigma'$. Esta ecuación es de tipo general, y engloba la mayoría de las leyes tensión-deformación.

Se puede escribir, de forma alternativa como:

$$d\sigma' = \Psi(d\varepsilon)$$

Teniendo en cuenta ahora que la respuesta del material no depende del tiempo, se tiene:

$$\lambda d\varepsilon = \Phi(\lambda d\sigma')$$

donde $\lambda \in \mathfrak{R}_+$ es un escalar positivo.

Por lo tanto, Φ es una función homogénea de primer grado, que puede escribirse como:

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial (d\sigma')} d\sigma'$$

de la cual se obtiene el incremento de deformación

$$d\varepsilon = C d\sigma'$$

siendo

$$C = \frac{\partial F}{\partial (d\sigma')}$$

la matriz constitutiva. A continuación se describirán sus propiedades fundamentales.

Se considerará en primer lugar el comportamiento de un material en un ensayo de carga-descarga-recarga, que se ha esquematizado en la Fig. 9. En este caso, la matriz constitutiva se reduce a una función escalar que es, en cada punto de la curva, la inversa de su pendiente.

Como se puede observar, la pendiente depende del nivel de tensión, siendo tanto más pequeña cuanto mayor es aquella. Sin embargo, la pendiente no depende exclusivamente del nivel de tensiones, como se puede observar comparando las pendientes en los puntos A₁, A₂ and A₃, por lo que C depende asimismo de otros factores como la historia del material o su microestructura, modificada en el proceso de carga.

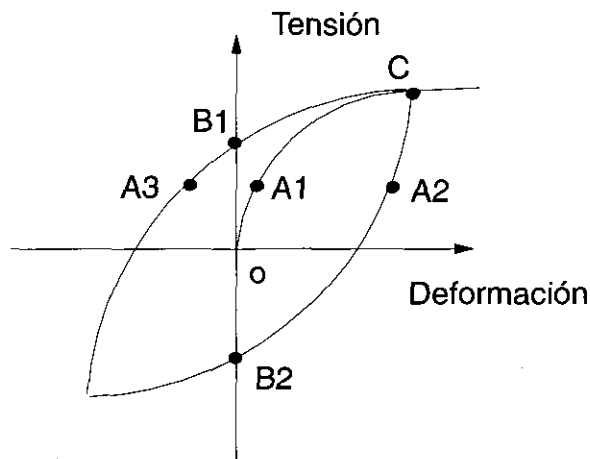


Figura 9. Ciclo de carga axial típico.

Por otra parte, se puede observar también que para un punto dado, la pendiente depende de que se esté cargando o descargando el material, lo cual implica una dependencia de la dirección del incremento de tensión.

En el caso considerado se podría escribir:

$$d\varepsilon_L = C_L d\sigma'$$

para carga, y

$$d\varepsilon_U = C_U d\sigma'$$

para descarga.

Suponiendo que se aplica un ciclo infinitesimal $d\sigma'$ y $-d\sigma'$, se obtiene:

$$d\varepsilon_L = C_L : d\sigma'$$

$$d\varepsilon_U = -C_U d\sigma'$$

llegándose a:

$$d\varepsilon = d\varepsilon_L + d\varepsilon_U \neq 0$$

Existen varias alternativas para introducir la dependencia de la dirección del incremento de tensión, entre las que se pueden mencionar las leyes multilineales propuestas por investigadores de Grenoble [21], o las leyes hipoplásticas de Dafalias [23] o Kolymbas [25]. Sin embargo, la aproximación más sencilla al problema consiste en definir en el espacio de tensiones una dirección \mathbf{n} para cualquier estado de tensión σ' de manera que cualquier incremento de tensión pueda ser clasificado como de carga o de descarga,

$$d\varepsilon_L = C_L d\sigma' \quad \text{for } \mathbf{n} \cdot d\sigma' > 0 \quad (\text{carga})$$

$$d\varepsilon_L = C_L d\sigma' \quad \mathbf{n} \cdot d\sigma' < 0 \quad (\text{descarga})$$

El caso límite entre ambas se denomina carga neutra:

$$\mathbf{n} \cdot d\sigma' = 0$$

Este es el punto inicial de la Teoría Generalizada de la Plasticidad, formulada por [26] y extendida a suelos por Pastor y Zienkiewicz [19], [20], [27].

La introducción de esta dirección que discrimina los estados de carga y de descarga puede ser empleada para definir superficies normales a estas direc-

ciones en cada punto, equivalentes a las empleadas en la Teoría Clásica de la Plasticidad.

Imponiendo ahora la condición de continuidad entre los estados de carga y de descarga, se llega a la conclusión de que la matriz constitutiva debe ser de la forma:

$$\mathbf{C}_L = \mathbf{C}^e + \frac{1}{H_L} \mathbf{n}_{gL}^T \mathbf{n}$$

y

$$\mathbf{C}_U = \mathbf{C}^e + \frac{1}{H_U} \mathbf{n}_{gU}^T \mathbf{n}$$

donde \mathbf{n}_{gL} y \mathbf{n}_{gU} son vectores arbitrarios de norma unidad y $H_{L/U}$ dos funciones escalares que se denominan módulo plástico en carga y en descarga respectivamente. Se puede verificar fácilmente que ambas leyes predicen la misma respuesta en el caso límite de carga neutra.

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{C}_L d\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}^e d\boldsymbol{\sigma}'$$

y

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_U = \mathbf{C}_U d\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}^e d\boldsymbol{\sigma}'$$

El comportamiento del material en estas condiciones es reversible, pudiéndose considerar elástico. De hecho, la matriz \mathbf{C}^e caracteriza el comportamiento elástico del material, pudiéndose verificar que un ciclo infinitesimal de tensión ($d\boldsymbol{\sigma}'$, $-d\boldsymbol{\sigma}'$) en el que $d\boldsymbol{\sigma}'$ corresponde a condiciones de carga neutra no produce ninguna deformación acumulada.

Esto sugiere que el incremento de deformación puede ser descompuesto en dos partes:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p$$

donde

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C}^e d\boldsymbol{\sigma}'$$

y

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{1}{H_{L/U}} (\mathbf{n}_{gL/U}^T \mathbf{n}) d\boldsymbol{\sigma}'$$

Hay que destacar el hecho de que se han introducido de esta manera deformaciones de tipo plástico sin necesidad de recurrir a superficies de fluencia ni potenciales plásticos. Todo cuanto es necesario para caracterizar la respuesta del material es dos funciones escalares H_{LU} y las dos direcciones \mathbf{n}_{gLU} y \mathbf{n} .

Para tener en cuenta los casos en los que se produzca reblandecimiento del material, que corresponden a valores negativos del módulo plástico H_L , las definiciones de carga y de descarga se modifican de la manera siguiente:

$$d\varepsilon_L = \mathbf{C}_L d\sigma' \quad \mathbf{n}^T d\sigma'^e > 0 \quad (\text{carga})$$

$$d\varepsilon_L = \mathbf{C}_L d\sigma' \quad \mathbf{n}^T d\sigma'^e < 0 \quad (\text{descarga})$$

donde $d\sigma'^e$ es:

$$d\sigma'^e = \mathbf{C}^{e-1} d\varepsilon$$

Modelos de este tipo han sido aplicados para reproducir fenómenos como la licuefacción bajo carga cíclica (Fig. 10), o la densificación.

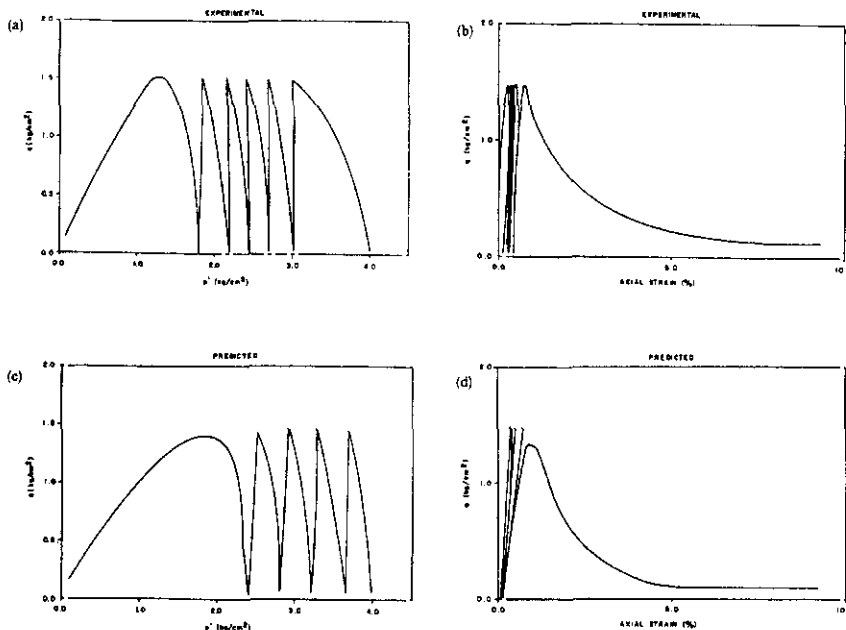


Figura 10. Licuefacción de una arena suelta bajo carga cíclica.

4. MODELO NUMÉRICO

El sistema de ecuaciones en derivadas parciales puede discretizarse empleando el método de Galerkin. Los campos de desplazamientos y presiones \mathbf{u} and p_w pueden aproximarse como: $\mathbf{u} = \mathbf{N}_u[(\bar{\mathbf{u}})]$, y $p_w = \mathbf{N}_p[(\bar{p})]_w$. De esta forma se llega al sistema no lineal acoplado:

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \sigma' d\Omega - \mathbf{Q}\bar{p}_w - \mathbf{f}_u = 0 \quad [6]$$

$$\mathbf{Q}^T \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{H} \cdot \bar{p}_w + \mathbf{C} \cdot \bar{p}_w - \mathbf{f}_p = 0 \quad [7]$$

donde

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho_m \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u d\Omega$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \frac{1}{\mathbf{Q}^*} \mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_p d\Omega$$

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \quad [8]$$

$$\mathbf{H} = \int \nabla \mathbf{N}_p^T \mathbf{k}_w \nabla \mathbf{N}_p d\Omega$$

y

$$\mathbf{f}_u = \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}_u^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad [9]$$

$$\mathbf{f}_p = \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}_p^T \mathbf{k}_w \frac{\partial p}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_p^T \mathbf{k}_w \rho_w \mathbf{b} d\Omega$$

Para discretizar en el dominio del tiempo se introducen dos nuevas incógnitas, $\Delta \ddot{\mathbf{u}}^n = \ddot{\mathbf{u}}^{n+1} - \ddot{\mathbf{u}}^n$ y $\Delta \dot{p}_w^n = \dot{p}_w^{n+1} - \dot{p}_w^n$ de forma que en el tiempo $n + 1$ se puede escribir [6]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}^{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}^n + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}^n + \beta_1 \Delta t \Delta \ddot{\mathbf{u}}^n \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}^n + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 \Delta \ddot{\mathbf{u}}^n \end{aligned} \quad [10]$$

$$p_w^{n+1} = p_w^{p,n+1} + \theta \Delta t \Delta \dot{p}_w^n$$

Tras sustituir en [6] y en [7] se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{u}}^n + \int \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}^{n+1} - \theta\Delta t\mathbf{Q}\Delta\dot{\mathbf{p}}_w^n - \mathbf{F}_u^{n+1} = \Phi_u = 0 \quad [11]$$

$$\beta_1\Delta t\mathbf{Q}^T\Delta\ddot{\mathbf{u}}^n + (\Delta t\theta\mathbf{H} + \mathbf{C})\Delta\dot{\mathbf{p}}_w^n - \mathbf{F}_p^{n+1} = \Phi_p = 0 \quad [12]$$

En el caso de que la ley de comportamiento del material sea no lineal, se puede resolver empleando el método de Newton Raphson method, para el cual la matriz jacobiana es:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi_u}{\partial\Delta\ddot{\mathbf{u}}} & \frac{\partial\Phi_u}{\partial\Delta\dot{\mathbf{p}}} \\ \frac{\partial\Phi_p}{\partial\Delta\ddot{\mathbf{u}}} & \frac{\partial\Phi_p}{\partial\Delta\dot{\mathbf{p}}} \end{bmatrix}^{(i)} \begin{bmatrix} \delta(\Delta\ddot{\mathbf{u}}) \\ \delta(\Delta\dot{\mathbf{p}}) \end{bmatrix}^{(i+1)} = - \begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_p \end{bmatrix}^{(i)} \quad [13]$$

de donde el sistema se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} + \frac{1}{2}\Delta t^2\beta_2\mathbf{K}_T & -\theta\Delta t\mathbf{Q} \\ \beta_1\Delta t\mathbf{Q}^T & \Delta t\theta\mathbf{H} + \mathbf{S} \end{bmatrix}^{(i)} \begin{bmatrix} \delta(\Delta\ddot{\mathbf{u}}) \\ \delta(\Delta\dot{\mathbf{p}}) \end{bmatrix}^{(i+1)} = - \begin{bmatrix} \Phi_u \\ \Phi_p \end{bmatrix}^{(i)} \quad [14]$$

siendo \mathbf{K}_T la matriz de rigidez tangente

$$\mathbf{K}_T = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{ep} \mathbf{B} d\Omega$$

En el caso de que el material sea elástico lineal, el sistema a resolver en cada incremento de tiempo es también lineal:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} + \frac{1}{2}\Delta t^2\beta_2\mathbf{K}_T & -\theta\Delta t\mathbf{Q} \\ \beta_1\Delta t\mathbf{Q}^T & \Delta t\theta\mathbf{H} + \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\ddot{\mathbf{u}} \\ \Delta\dot{\mathbf{p}}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_p \end{bmatrix} \quad [15]$$

Hay que tener en cuenta que si la permeabilidad es muy pequeña y tanto las partículas del suelo como el agua intersticial son muy poco compresibles, las matrices \mathbf{H} y \mathbf{S} serán prácticamente nulas. En estas condiciones se puede demostrar que es necesario emplear funciones de forma diferentes para los

campos de presiones y de desplazamientos, ya que en caso contrario, aparecerían oscilaciones parásitas importantes en el campo de presión ([7], [8], [9], [10]).

Por ello no es posible emplear elementos sencillos como el triángulo de tres nodos o el tetraedro de cuatro, salvo que se recurra a técnicas de estabilización adecuadas, como las propuestas por los autores ([11], [12], [13]).

5. EJEMPLOS Y APLICACIONES

El modelo presentado en los apartados anteriores puede implementarse en un programa de elementos finitos. Un problema importante es la validación del programa, especialmente en los casos de rotura de una geoestructura, dada la escasez de medidas y datos experimentales que puedan ser empleados para ello.

Se pueden realizar pruebas que permitan verificar que el modelo propuesto permite reproducir cualitativamente fenómenos observados en la realidad. Es el caso del ejemplo de la licuación de un estrato de arena que se presentó al principio de este capítulo, donde se consideró un estrato de arena suelta. *Mediante este ejemplo se pudo comprobar que los resultados del modelo eran aceptables.*

Los resultados obtenidos en máquinas centrífugas presentan un alto interés, mayor para la puesta a punto de modelos que para la reproducción exacta del problema real. Se presenta a continuación un caso cuyo interés radica en que fue la primera vez que las predicciones de la rotura por licuación de una estructura empleando un modelo numérico de elementos finitos fueron contrastadas con un ensayo en máquina centrífuga. Tanto el modelo numérico que se empleó como el ensayo están descritos en el texto de Zienkiewicz et al. de 1999.

En la Fig. 11 se puede ver un esquema del modelo reducido. La malla de elementos finitos se da en la Fig. 12, y los resultados experimentales junto con las predicciones del modelo se pueden ver en la Fig. 13. En esta última se ha reproducido la historia de aceleraciones junto con la historia de desplazamientos verticales en la coronación del dique.

Otro método que puede emplearse para validar un modelo consiste en tratar de reproducir la rotura de alguna estructura importante, empleando para ello los datos disponibles en la literatura. Se presentará aquí el caso de la rotura de la Presa de San Fernando. Según Seed, la rotura tuvo lugar como se indica en el esquema de la Fig. 14. Empleando la malla de la Fig. 15, se obtiene el campo de desplazamientos de la Fig. 16.

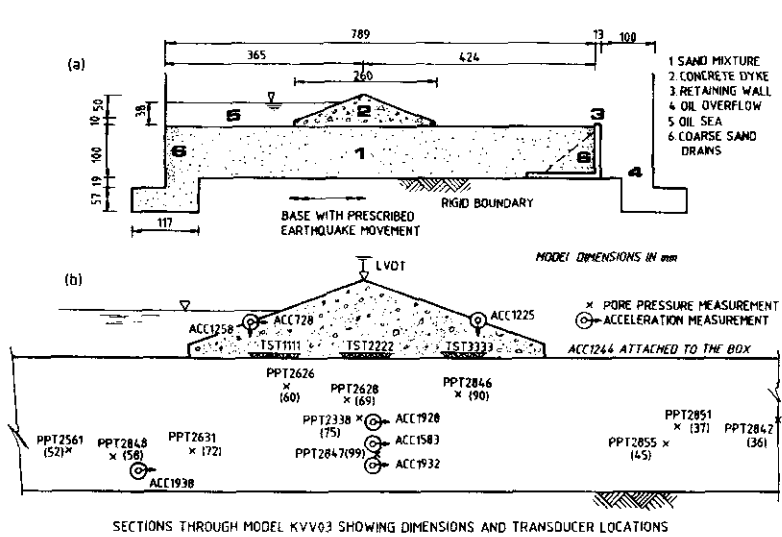


Figura 11. Modelo reducido empleado en la máquina centrífuga de Cambridge (Zienkiewicz et al., 1999).

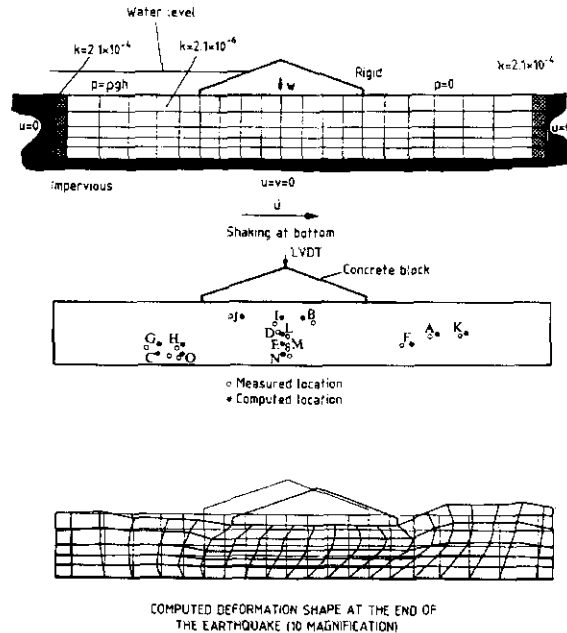


Figura 12. Malla de Elementos Finitos.

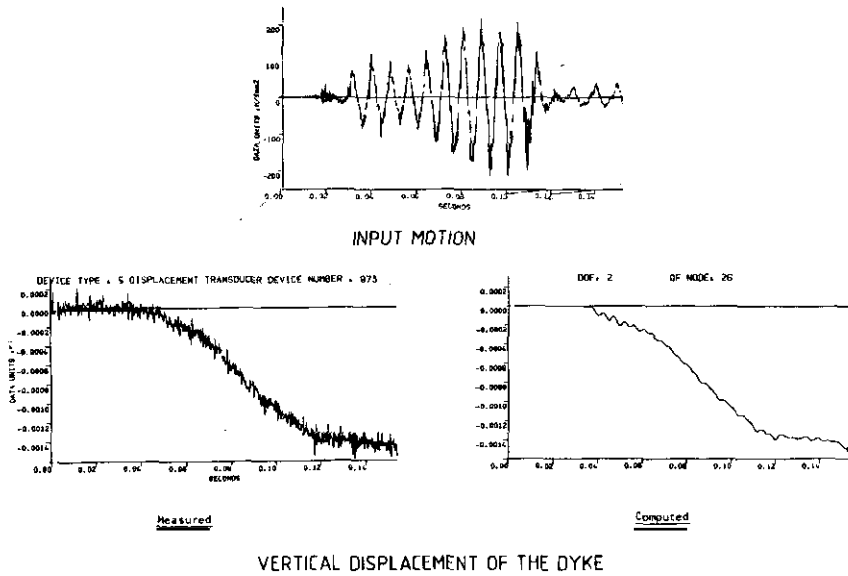


Figura 13. Acelerograma e historias de desplazamientos verticales en coronación del dique (medidos y predicciones).

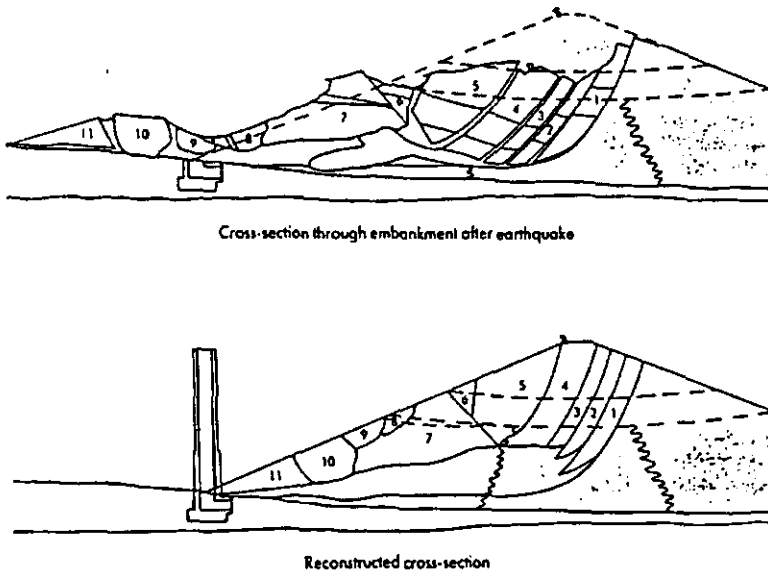


Figura 14. Presa de San Fernando.

Malla de Elementos Finitos
Presa de San Fernando

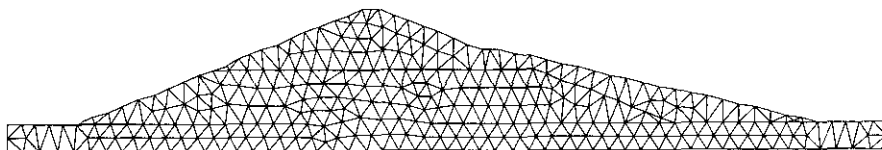


Figura 15. Malla de Elementos Finitos.

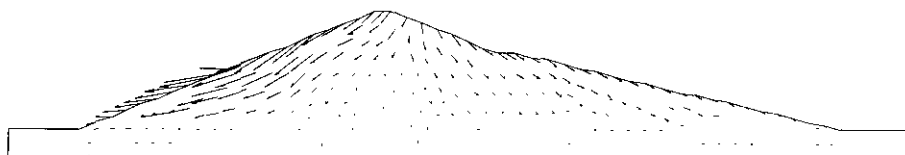


Figura 16. Desplazamientos.

Finalmente, y por el interés que plantean los problemas de acoplamiento estructura-suelo-fluido en algunos casos especiales, como por ejemplo los muelles de atraque, se presenta el caso del muelle esquematizado en la Fig. 17. La malla de elementos finitos empleada en el análisis se da en la Fig. 18.

Se ha supuesto en el análisis realizado que el material es elástico lineal, habiéndose realizado el análisis en el dominio de la frecuencia. Los elementos empleados han sido triángulos lineales, estabilizados mediante una técnica especial que permite emplear las mismas funciones de forma para desplazamientos y presiones intersticiales.

Las propiedades de los distintos materiales se dan en la Tabla I, habiéndose supuesto para el agua una velocidad de propagación de las ondas P de 1480 m/s y una densidad de 1000 Kg/m³.

Tabla 1. Propiedades de los materiales

	E(MPa)	ν	K_w (MPa)	k_w	n	ρ_s (N/m ³)
Hormigón	3.0×10^4	0.2	2.3×10^3	0	0.333	2.3×10^3
Suelo	7.6×10^2	0.2	2.3×10^3	0	0.333	1.8×10^3

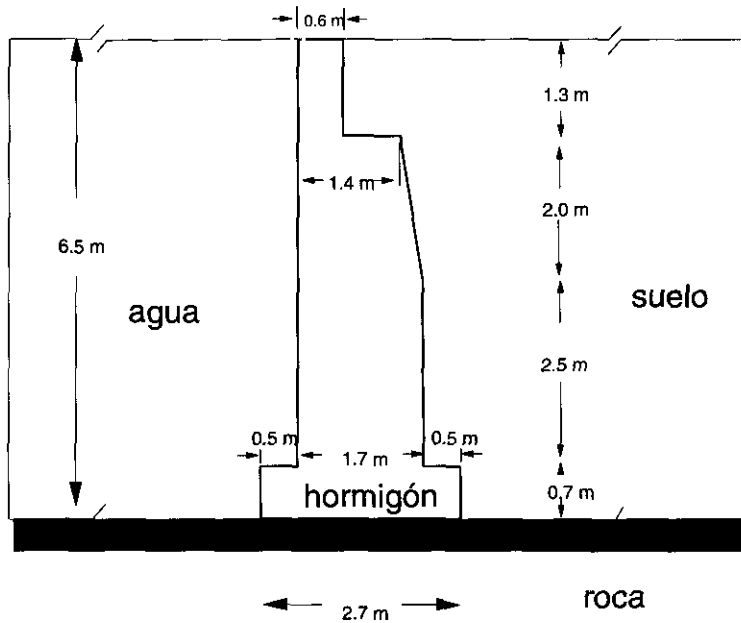


Figura 17. Muelle portuario: esquema del problema.

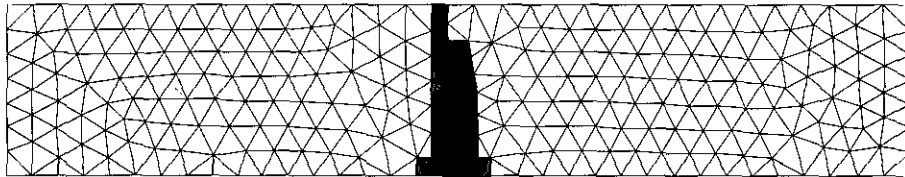


Figura 18. Malla de Elementos Finitos.

Se ha supuesto que la estructura descansa sobre una base rocosa horizontal sujeta a un movimiento horizontal dado por la expresión:

$$u = u_0 \exp(-i\omega t)$$

Se han tomado las presiones intersticiales en la superficie como nulas, habiéndose empleado condiciones de absorción en los contornos laterales tanto para el agua como para el suelo.

Para el caso de un muro infinitamente rígido existe una solución analítica [28]. Los resultados obtenidos concuerdan bien con ella (Fig. 19).

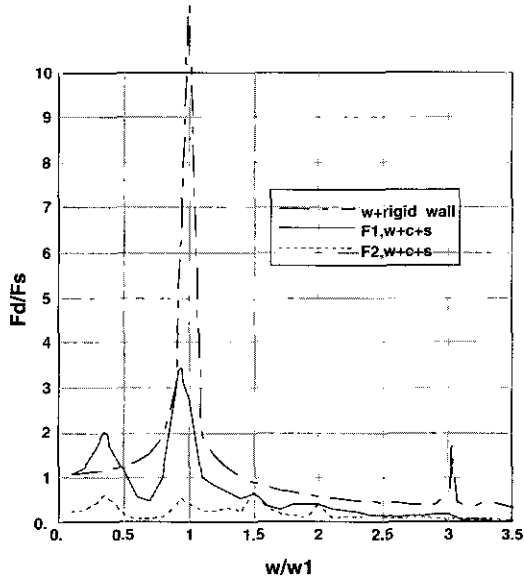


Figura 19. Espectro de respuesta de las fuerzas hidrodinámicas en el muro.

En esta figura, se han representado frecuencias relativas al primer modo propio del dominio fluido, como es habitual en estos estudios. Esta frecuencia ω_1 es:

$$\omega_1 = \frac{\pi C_p}{2H}$$

donde C_p es la velocidad de la onda P en el agua. Las fuerzas dinámicas F_d se han normalizado dividiéndolas por un factor F_s , la fuerza hidrostática del agua:

$$F_s = \frac{1}{2} \gamma_w H^2$$

La respuesta del sistema acoplado puede verse en la Fig.. Allí puede observarse cómo la fuerza en la zona del agua (F_1 , línea continua) es mayor que la correspondiente a la presión intersticial en el suelo (F^2 , línea de trazos).

Finalmente, en la Fig. 20 se representan los contornos de presión del agua en todo el dominio para $\omega/\omega_1 = 0.2$.

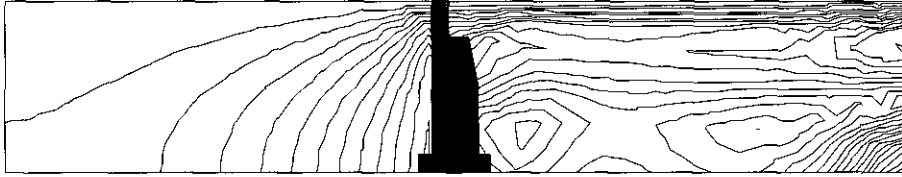


Figura 20. Contornos de presiones para $\frac{\omega}{\omega_1} = 0,2$

6. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la ayuda proporcionada por la Agencia española de Cooperación Internacional (AECD).

REFERENCIAS

- [1] O. C. ZIENKIEWICZ y T. SHIOMI. Dynamic behaviour of saturated porous media: The generalised Biot formulation and its numerical solution. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, **8**, 71-96, 1984.
- [2] O. C. ZIENKIEWICZ, A. H. C. CHAN, M. PASTOR, D. K. PAUL y T. SHIOMI. Static and dynamic behaviour of soils: a rational approach to quantitative solutions. I. Fully saturated problems. *Proc. R. Soc. Lond. A* **429**, 285-309, (1990).
- [3] O. C. ZIENKIEWICZ, A. H. C. CHAN, M. PASTOR, T. SHIOMI y B. SCHREFLER, *Computational Geomechanics*, Wiley, 1999.
- [4] R. NOVA, "On the hardening of soils", *Arch. Mech. Stos.* **29**, 3, 445-458, 1977.
- [5] P. WILDE, "Two-invariants dependent model of granular media", *Arch. Mech. Stos.* **29**, 799-809, 1977.
- [6] O. C. ZIENKIEWICZ y R. L. TAYLOR, *The Finite Element Method* (4th. edition), Vol. 2, McGraw-Hill, 1991.
- [7] I. BABUSKA, "The finite element method with Lagrange multipliers", *Num. Math.* **20**, 179-192, 1973.
- [8] F. BREZZI, "On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from lagrangian multipliers", *RAIRO 8-R2*, 129-151, 1974.
- [9] O. C. ZIENKIEWICZ, S. QU, R. L. TAYLOR y S. NAKAZAWA, "The patch test for mixed formulations". *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **23**, 1873-1883, 1986.
- [10] O. C. ZIENKIEWICZ y R. L. TAYLOR, *The Finite Element Method* (4th edition), Vol. 1, McGraw-Hill, 1989.

- [11] M. PASTOR, T. LI y J. A. FERNÁNDEZ MERODO, "Stabilized Finite Elements for Harmonic Soil Dynamics Problems near the Undrained-Incompressible Limit", **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 1997.
- [12] M. PASTOR, O. C. ZIENKIEWICZ, T. LI , X. LIU y M. HUANG, "Stabilized Finite Elements with equal order of interpolation for soil dynamics problems", *Arch. Comp.Mech. Eng.*, 1998.
- [13] O. C. ZIENKIEWICZ, J. ROJEK, R. L. TAYLOR Y M. PASTOR, "Triangles and Tetrahedra in Explicit Dynamic Codes for Solids", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1998.
- [14] Z. MROZ, "On the description of anisotropic work-hardening", **J. Mech. Phys. Solids**, **15**, 163-175 ,1967.
- [15] V. CUÉLLAR, Z. P. BAZANT, R. J. KRIZEK y M. L. SILVER, "Densification and hysteresis of sand under cyclic shear", **J. Geotech. Engr. Div., ASCE**, **103**, 918, 1977.
- [16] O. C. ZIENKIEWICZ, K. H. LEUNG, E. HINTON y C. T. CHANG, "Liquefaction and permanent deformation under dynamic conditions - Numerical solution and constitutive relations", in **Soil Mechanics - Transient and cyclic loads**, G. N. Pande and O. C. Zienkiewicz (Eds), pp. 71-104, John Wiley and Sons, 1982.
- [17] Y. F. DAFALIAS y E. P. POPOV, "A model of non-linearly hardening materials for complex loadings", **Acta Mechanica** **21**, 173-192, 1975.
- [18] K. HASHIGUCHI y M. UENO, "Elastoplastic Constitutive laws of granular materials", **Constitutive Equations of Soils**, 9th. Int. Congr. Soil Mech. Found. Engng., S. Murayama and A. N. Schofield (Eds), pp. 73-82, JSSMFE, 1977.
- [19] O. C. ZIENKIEWICZ, K. H. LEUNG, y M. PASTOR, "A simple model for transient soil loading in earthquake analysis. I : Basic model and its application", **Int. J. Numer. Anal. Methods. Geomech**, **9**, 953-976 (1985).
- [20] M. PASTOR, O. C. ZIENKIEWICZ y K. H. LEUNG, "Simple model for transient soil loading in earthquake analysis. II. Non-associative models for sands", **Int. J. Numer. Analyt. Meth. Geomech**, **9**, 477-498, 1985.
- [21] F. Darve y S. Labanieh, "Incremental constitutive law for sands and clays: simulation of monotonic and cyclic tests", **Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech**, **6**, 243-275 (1982).
- [22] J. DESRUES y R. CHAMBON, "A new rate type constitutive model for geomaterials: CloE", in D. Kolymbas (Ed.), **Modern Approaches to Plasticity**, 309-324, Elsevier, 1993.
- [23] Y. F. Dafalias, "Bounding Surface Plasticity: I. Mathematical Foundation and Hypoplasticity", **J. Engng. Mech. ASCE** **112**, 966-987, 1986.
- [24] W. WU y D. KOLYMBAS, "Numerical testing of the stability criterion for hypoplastic constitutive equations", **Mechanics of Materials**, **29**, 195-201, 1990.

- [25] D. KOLYMBAS y W. WU, "Introduction to Hypoplasticity", in D. Kolymbas (Ed.), **Modern Approaches to Plasticity**, 213-224, Elsevier, 1993.
- [26] O. C. ZIENKIEWICZ y Z. MROZ, "Generalized Plasticity formulation and application to Geomechanics", **Mechanics of Engineering Materials**, C. S. Desai and R. H. Gallaher (Eds), John Wiley and Sons, 1985.
- [27] M. PASTOR, O. C. ZIENKIEWICZ y A. H. C. CHAN, "Generalized Plasticity and the modelling of soil behaviour", **Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.** **14**, 151-190, 1990.
- [28] J. F. HALL y A. K. CHOPRA, "Two-dimensional dynamic analysis of concrete gravity and embankment dams including hydrodynamic effects", **Earthq. Eng. Struct. Dyn.**, 10, 305-332 (1982).