

Influencia del campo gravitatorio terrestre en el diseño de una estrategia de control para un satélite geoestacionario

J. M. GAMBÍ¹, P. ROMERO² Y E. PATIÑO³

¹ Departamento de Matemáticas. Escuela Politécnica Superior. Universidad Carlos III. Madrid

² Sección Departamental de Astronomía y Geodesia. Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid

³ Departamento de Matemática Aplicada. E.T.S. Arquitectura. Universidad Politécnica de Madrid

RESUMEN

En este trabajo se presentan diferentes resultados comparativos de los efectos que el campo gravitatorio terrestre produce en la órbita geoestacionaria. En particular se analizan: *a)* los efectos gravitatorios no lineales en el espacio de fases longitud-deriva; *b)* la influencia de los diferentes armónicos y de distintos modelos de geopotencial, y *c)* se evalúan numéricamente las aceleraciones producidas dependiendo de la longitud de estacionamiento y se estudia su repercusión en el diseño de una estrategia de control para el mantenimiento en estación de un satélite.

1. INTRODUCCIÓN

Es un hecho conocido que entre las fuerzas perturbadoras que actúan sobre la órbita geoestacionaria (campo gravitatorio terrestre, atracción lunisolar y presión de radiación solar) son los armónicos dependientes de la longitud del potencial terrestre los que provocan sobre los satélites geoestacionarios efectos de resonancia que hacen que un satélite de estas características no sea estable más que si en el instante inicial se encuentra en unos puntos determinados sobre la superficie de la Tierra; en otro caso, tendrá un movimiento secular que le alejará de la longitud de estacionamiento siendo necesarias maniobras periódicas para su mantenimiento en estación.

En este trabajo se analiza pormenorizadamente este efecto y se evalúan numéricamente las aceleraciones producidas según la longitud de estacionamiento para determinar el tiempo máximo entre maniobras para distintas longitudes.

2. MODELOS DE GEOPOTENCIAL

La fuerza que ejerce el campo gravitatorio sobre el satélite se obtiene como gradiente del potencial. En un sistema de referencia ecuatorial geocéntrico ligado a la Tierra, con eje Ox en la dirección del meridiano de Greenwich, viene dado por

$$U = \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r_t}{r} \right)^n (J_{nm} R_{nm}(\vartheta, \lambda) + K_{nm} S_{nm}(\vartheta, \lambda)) \right\} \quad (2.1)$$

donde

G es la constante de gravitación universal,

M es la masa de la Tierra,

r es el radio vector geocéntrico del satélite,

r_t es el semieje mayor del elipsoide terrestre,

$R_{nm}(\vartheta, \lambda)$ y $S_{nm}(\vartheta, \lambda)$ son los armónicos esféricos,

J_{nm} y K_{nm} son los coeficientes armónicos esféricos,

$\vartheta, \vartheta = 90 - \varphi$, es la distancia polar,

φ es la latitud geocéntrica y

λ es la longitud geocéntrica.

Si se consideran las coordenadas geográficas del satélite

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= r \cos \varphi \sin \lambda \\ z &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\}$$

la expresión del potencial hasta el orden y grado cuarto en función de estas coordenadas resulta

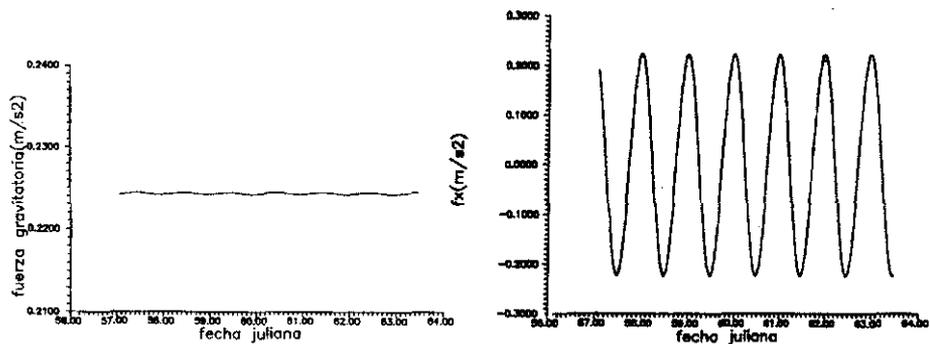
$$\begin{aligned}
U(x, y, z) = & \mu \left\{ \frac{1}{r} - \frac{r_t}{r^3} [J_{10}z + J_{11}x + K_{11}y] - \right. \\
& - \frac{r_t^2}{2r^5} [J_{20}(2z^2 - x^2 - y^2) + 6J_{21}xz + 6K_{21}yz + \\
& + 6J_{22}(x^2 - y^2) + 12K_{22}xy] - \\
& - \frac{r_t^3}{2r^7} [J_{30}(2z^3 - 3x^2z - 3y^2z) + J_{31}(12xz^2 - 3x^2 - 3xy^2) + \\
& + K_{31}(12yz^2 - 3x^2y - 3y^3) + 30J_{32}(x^2z - y^2z) + 60K_{32}xyz + \\
& + 30J_{33}(x^3 - 3xy^2) + 30K_{33}(3x^2y - y^3)] - \\
& - \frac{r_t^4}{8r^9} [J_{40}(8z^4 + 3x^4 + 3y^4 + 6x^2y^2 - 24x^2z^2) + \\
& + J_{41}(20xz^3 - 16x^3z - 15xy^2z) + 8K_{41}(40yz^3 - 30x^2yz - 30y^3z) + \\
& + 4J_{42}(90x^2z^2 - 90y^2z^2 - 15x^4 + 15y^4) + \\
& + 8K_{42}(90xyz^2 - 15x^3y - 15xy^3) + \\
& + 8J_{43}(105x^3z - 315xy^2z) + 8K_{43}(315x^2yz - 105y^3z) + \\
& \left. + 840J_{44}(x^4 + y^4 - 6x^2y^2) + 3360K_{44}(x^3y - xy^3) \right\} \quad (2.2)
\end{aligned}$$

donde $\mu = GM$. En estas condiciones, las componentes cartesianas de la fuerza gravitatoria en un sistema ecuatorial geocéntrico, con eje OX en la dirección de equinoccio medio en t , se obtienen como

$$\begin{aligned}
f_x &= \cos \vartheta' \frac{\partial U}{\partial x} - \sin \vartheta' \frac{\partial U}{\partial y} \\
f_y &= \sin \vartheta' \frac{\partial U}{\partial x} + \cos \vartheta' \frac{\partial U}{\partial y} \\
f_z &= \frac{\partial U}{\partial z}
\end{aligned} \quad (2.3)$$

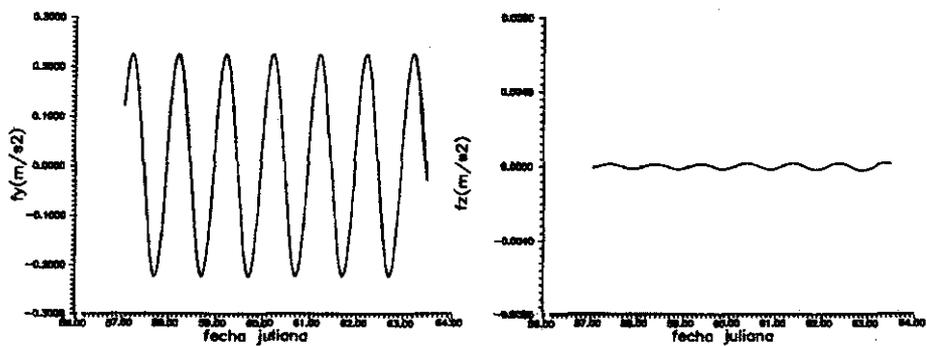
siendo ϑ' la hora sidérea media en Greenwich en el instante t .

En la Figura 1-a aparece evaluado en ms^{-2} para $n = 5$ y $n = 4$ el valor de esta fuerza en una longitud de estacionamiento $\lambda = 30^\circ W$.



1-a

1-b



1-c

1-d

Figura 1. Influencia de diferentes armónicos y de diferentes modelos de geopotencial.

Como puede apreciarse, en un orden de 10^{-5} ms^{-2} no existe ninguna diferencia para estos valores de n . En las Figuras 1-b, 1-c y 1-d se presenta la comparación en componentes f_x , f_y y f_z entre dos modelos de geopotencial (GEM-T1 y GEM-T2). En este caso, también las diferencias vuelven a ser menores que 10^{-5} ms^{-2} . En estas gráficas puede apreciarse cómo la componente f_z de la fuerza, al ser el satélite ecuatorial, es casi nula, y las otras dos componentes f_x y f_y están desfasadas de tal forma que la fuerza total resultante (Figura 1-a) resulta prácticamente constante.

3. INFLUENCIA DEL CAMPO GRAVITATORIO EN LOS ELEMENTOS ORBITALES

Para analizar la variación en la longitud del satélite,

$$l = \Omega + \omega + v - \vartheta',$$

utilizamos las ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= n - \omega_t - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} \\ \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial l} \end{aligned} \quad (3.1)$$

siendo R el potencial perturbador terrestre, $R = U - \frac{\mu}{r}$.

Para realizar, ahora, un estudio cualitativo de la solución de estas ecuaciones, pasamos a linealizarlas introduciendo los parámetros

$$\begin{aligned} l &= l_s + \varepsilon \\ a &= a_s(1 + \eta) \end{aligned} \quad (3.2)$$

siendo l_s la longitud normal de estacionamiento y $a_s = 42164.2 \text{ km}$, el semieje síncrono, de forma que, haciendo uso de (3.1), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{3}{2}n\eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= -2n(G_1 + G_2\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.3)$$

siendo

$$\begin{aligned} G_1 &= G_1(J_{nm}, l_s, a_s) \\ G_2 &= \frac{\partial G_1}{\partial l_s} \end{aligned} \quad (3.4)$$

De esta forma se tiene

$$\ddot{l} = \ddot{\varepsilon} = -\frac{3}{2}n\dot{\eta} = 3n^2(G_1 + G_2\varepsilon) = 3n^2(G_1 + G_2(l - l_s)) \quad (3.5)$$

El diagrama de fases correspondiente a esta ecuación es idéntico al del péndulo lineal. Su representación en l y $d = \dot{l}$ (deriva) es (ver Figura 2):

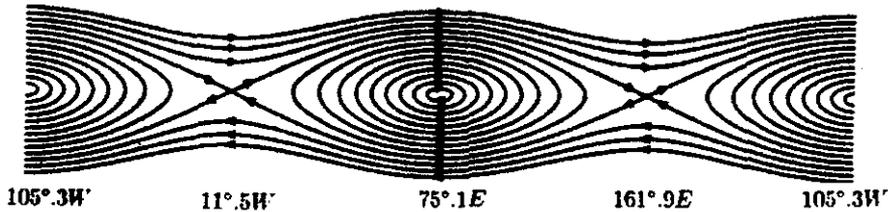


Figura 2. Diagrama de fases.

donde los puntos de equilibrio estable corresponden a las longitudes de $75^\circ.1E$, $105^\circ.3W$ y los puntos de equilibrio inestable a las de $11^\circ.5W$ y $161^\circ.9E$.

Esta representación gráfica de las ecuaciones linealizadas sirve para el estudio global de las ecuaciones no lineales excepto en los centros. Para estudiar la estabilidad de estos puntos se ha realizado una integración numérica, viendo que se comportan como focos atractivos.

4. INFLUENCIA DE LA LONGITUD DE ESTACIONAMIENTO EN LA ESTRATEGIA DE CONTROL

En la Figura 3 aparece evaluada en ms^{-2} y $grad \cdot d^{-2}$, para todos los puntos de la Tierra, la magnitud de la componente tangencial de la fuerza gravitatoria que provoca el desplazamiento en longitud; (puede observarse que en los puntos de equilibrio estable su valor es 0).

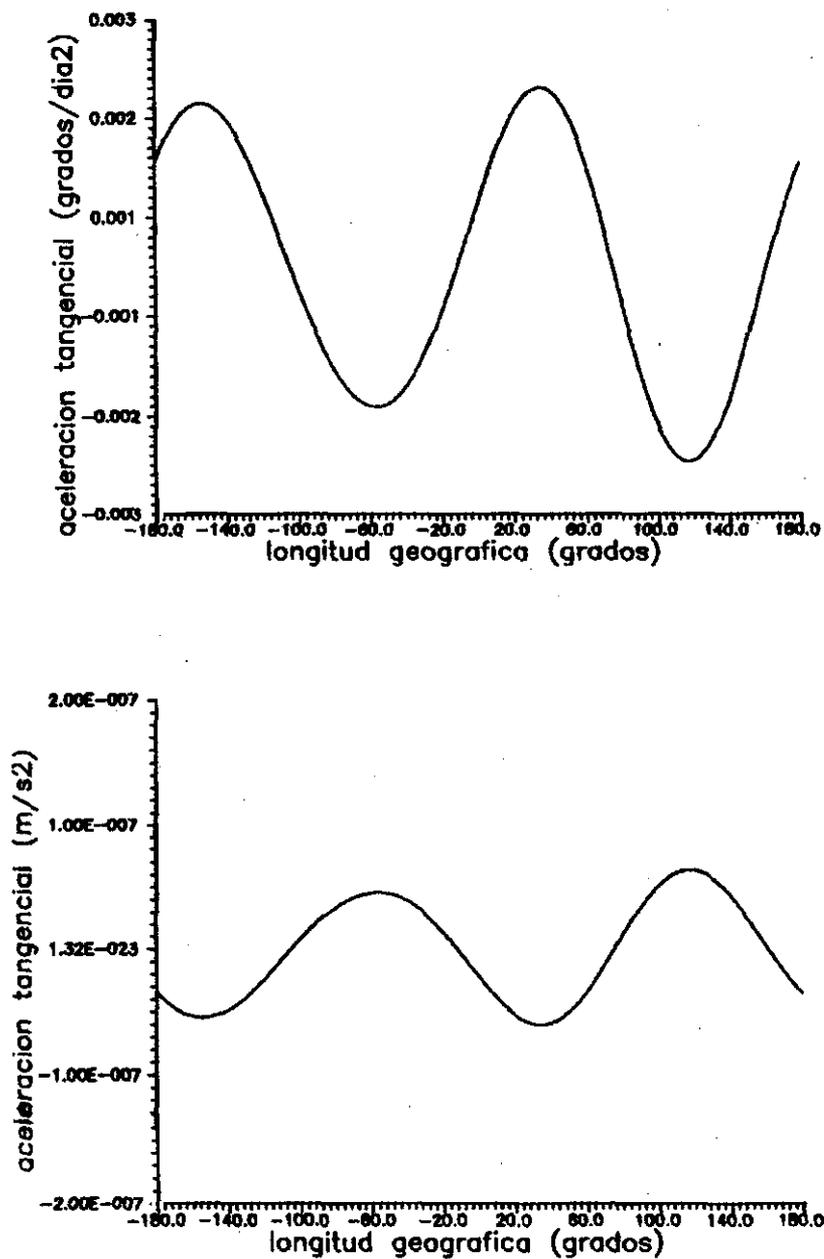


Figura 3. Magnitud de la componente tangencial de la fuerza gravitatoria terrestre.

Dependiendo de la longitud de estacionamiento, hay que diseñar distintas estrategias de control: si consideramos un satélite en una posición nominal l_s y, de acuerdo con la normativa internacional, le asignamos una ventana espacial de $\pm\delta l = 0^\circ.07$, podemos suponer que dentro de esa ventana $\ddot{l} = cte$, y concluir que la evolución corresponde a una trayectoria parabólica

$$l(t) = l(t_0) + \dot{l}(t_0)(t - t_0) + \frac{\ddot{l}(t_0)}{2}(t - t_0)^2 \quad (4.1)$$

El satélite sobrepasa los límites de la ventana en longitud si no se efectúa ninguna maniobra. El tiempo máximo de permanencia, T , corresponde al caso límite entre dos maniobras cuando el vértice de la parábola toca un extremo (ver Figura 4). Imponiendo en (4.1) las condiciones

$$\begin{aligned} l(t_0 + T/2) &= l_m - \delta l \\ \dot{l}(t_0 + T/2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

obtenemos para T el valor

$$T = 4\sqrt{|\delta l / \ddot{l}|} \quad (4.3)$$

HISPASAT ($l = 30^\circ W$)

$$\ddot{l} = -0.000887 \text{ deg/day}^2$$

$$\delta l = 0^\circ.07$$

$$T = 35.5 \text{ days}$$

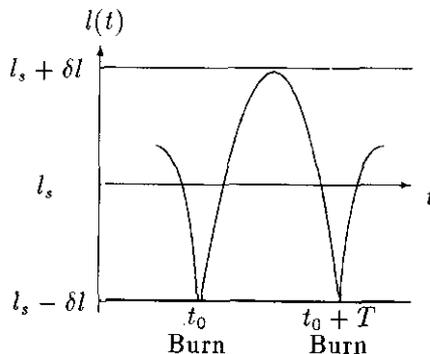


Figura 4. Tiempo máximo de permanencia entre dos maniobras.

En la Tabla 1 aparece evaluado el valor de T para distintas longitudes. Puede verse que hay longitudes favorecidas cerca de los puntos estables, donde sin necesidad de maniobras, el satélite permanecería dentro de la ventana 430 días. El caso de HISPASAT es una de las más desfavorecidas (sin tener en cuenta las otras perturbaciones, que limitan el ancho de la ventana espacial) y sólo podría estar 35 días dentro de $\pm\delta l = 0^\circ.07$.

En el caso real, incluyendo las perturbaciones lunisolar y de presión de radiación solar, el tiempo entre maniobras es de 15 días.

Tabla 1

$l(\text{grados})$	$\dot{l}(\text{grados/día}^2)$	$T(\text{días})$
75 E	0.000006	432
76 E	-0.000068	128
83 E	-0.000577	44
117 W	-0.001968	23
30 W	-0.000887	35
105 W	0.000006	432

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo forma parte del proyecto de investigación: 'Control orbital de dos satélites geoestacionarios en una misma ventana espacial' financiado por HISPASAT S.A.

