Repercusión de la elasticidad terrestre en el movimiento del polo

M. FOLGUEIRA y M. J. SEVILLA
Instituto de Astronomía y Geodesia
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense
28040 Madrid

RESUMEN

La teoría dinámica del movimiento de rotación de la Tierra se construye mucho mejor con base en la teoría del movimiento de un cuerpo rígido. La Tierra es casi rígida por lo que su movimiento real se puede esperar que se aproxime bastante al movimiento que tendría si fuera perfectamente rígida. Si se parte de una Tierra rígida, los efectos de la desviación de la rigidez deberán añadirse como correcciones al movimiento rígido teórico para obtener una teoría del movimiento de rotación terrestre más perfecta.

En este trabajo, consideraremos una Tierra elástica y evaluaremos la variación de los momentos y productos de inercia debidos a la rotación del cuerpo y discutiremos sus efectos sobre las coordenadas del polo.

1. INTRODUCCIÓN

Simbólicamente podemos escribir:
FENÓMENO = MODELO + RESIDUAL.

Un buen modelo será capaz de mantener la desviación residual del modelo lo más pequeña posible. Para describir básicamente el fenómeno de Rotación de la Tierra, el modelo de Tierra rígida es el adecuado. Sin embargo, con la mejora en la precisión alcanzada en las observaciones, es necesario tener en cuenta los efectos del núcleo líquido y de la elasticidad del manto. Estos efectos deberán añadirse como correcciones al movimiento rígido teórico para obtener una teoría del movimiento de rotación terrestre más perfecta.

Física de la Tierra, Núm. 8, 145-153. Servicio de Publicaciones U.C.M. Madrid, 1996

En el presente estudio:

- Se tiene en cuenta solamente la deformación originada por la fuerza centrífuga debida a la rotación.
- Se obtienen las expresiones de las coordenadas del polo para una Tierra deformable utilizando como base las correspondientes para una Tierra rígida.
- Se utilizará la formulación hamiltoniana.

2. VARIACIONES ROTACIONALES DE LOS MOMENTOS DE INERCIA EN UNA TIERRA DEFORMABLE

Consideremos una Tierra elástica que gira alrededor de un eje que no es el de simetría, entonces las fuerzas centrífugas modifican las posiciones de las masas de la Tierra y como consecuencia se producen variaciones en el tensor de inercia. La variación producida en los momentos de inercia ecuatoriales es la mitad y de signo contrario de la producida en el momento de inercia polar [Munk, 1960], [Sevilla, 1982]:

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{22} = -\frac{k a_e^5 \omega^2}{9\kappa^2} \quad \text{(ecuatoriales)} \\ c_{33} &= \frac{2k a_e^5 \omega^2}{9\kappa^2} \quad \text{(polar)} \end{aligned} \tag{2.1}$$

siendo,

a_e radio ecuatorial terrestre,

κ^2 constante de gravitación universal,

k número de Love, que caracteriza la respuesta elástica de la Tierra. Se define mediante la relación [Melchior, 1978]:

$$\delta V = k U_R,$$

δV potencial gravitatorio exterior provocado por la deformación rotacional,

U_R armónico de grado dos y viene dado por:

$$U_R = U - \frac{1}{3}\omega^2 r^2,$$

U potencial centrífugo creado por la rotación de la Tierra en un punto de coordenada radial r,

ω velocidad de rotación de la Tierra deformada,

$\vec{\omega}$ vector de rotación de la Tierra deformada:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= (0,0,\Omega) + (m_1, m_2, m_3)\Omega,\\ \omega^2 &= (1+2m_3)\Omega^2,\end{aligned}$$

$(0, 0, \Omega)$ *representa una rotación con velocidad constante* Ω alrededor del eje de máxima inercia (eje de figura) de una Tierra no deformada,

$(m_1, m_2, m_3)\Omega$ representa la desviación del eje de rotación $\vec{\omega}$ respecto al sistema de ejes principales de la Tierra no deformada. m_1, m_2 y m_3 son infinitésimos de primer orden. m_1 y m_2 representan la desviación del eje de rotación respecto del eje de figura (de la Tierra no deformada), son las componentes del movimiento del polo. m_3 indica la variación de la velocidad de rotación.

Sustituyendo la expresión de ω^2 en (2.1), obtenemos:

$$\begin{aligned}c_{11} &= c_{22} = -\frac{\overline{ka_e^5\Omega^2}}{9\kappa^2} - \frac{\overline{2ka_e^5\Omega^2}}{9\kappa^2}m_3\\ &= (c_{11})_S + (c_{11})_P = (c_{22})_S + (c_{22})_P, \qquad (2.2)\\ c_{33} &= \frac{\underline{\underline{2ka_e^5\Omega^2}}}{9\kappa^2} + \frac{4ka_e^5\Omega^2}{9\kappa^2}m_3 = (c_{33})_S + (c_{33})_P,\end{aligned}$$

en donde el subíndice $_S$ representa la parte secular y el subíndice $_P$, la parte periódica.

3. EFECTOS SOBRE LAS COORDENADAS DEL POLO. MOVIMIENTO LIBRE

El movimiento del polo se define como el movimiento del eje de rotación respecto al eje de figura. Las coordenadas del movimiento del polo *para una Tierra rígida*, vienen dadas en función de las variables de Andoyer por [Kinoshita, 1977]:

$$\begin{aligned} m_1^R &= x_P = \frac{G}{A\omega}\mathrm{sen}J\mathrm{sen}l, \\ m_2^R &= y_P = -\frac{G}{B\omega}\mathrm{sen}J cos l \end{aligned} \tag{3.3}$$

siendo,

l ángulo en el ecuador de figura, entre el eje x del sistema fijo a la Tierra *(ejes de figura)* y la línea nodal intersección del ecuador de figura y el ecuador momento angular (perpendicular al eje momento angular),

J ángulo entre el ecuador momento angular y el ecuador de figura,

A, B son los momentos de inercia ecuatoriales de la Tierra.

En nuestro caso, estamos considerando una Tierra elástica. Entonces, debido a la deformación rotacional, tendremos que incluir las variaciones de los momentos de inercia en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{G}{(A+c_{11})\omega}\mathrm{sen}J\mathrm{sen}l, \\ m_2 &= -\frac{G}{(B+c_{22})\omega}\mathrm{sen}J\cos l \end{aligned} \tag{3.4}$$

Teniendo en cuenta:

$$m_1 = \frac{G\mathrm{sen}J\mathrm{sen}l}{A\omega}\,\frac{1}{1+\frac{c_{11}}{A}} = m_1^R\left(1+\frac{c_{11}}{A}\right)^{-1} \approx m_1^R\left(1-\frac{c_{11}}{A}\right),$$

la componente m_1 del movimiento del polo en una Tierra elástica, se puede escribir como:

$$m_1 = m_1^R + \delta m_1, \tag{3.5}$$

con,

$$\delta m_1 = -\frac{c_{11}}{A}m_1^R = \frac{kMa_e^5\Omega^2}{9AM\kappa^2}m_1^R. \tag{3.6}$$

en donde hemos sustituido en la expresión (3.6), la parte secular de c_{11} y hemos introducido la masa de la Tierra M.

Análogamente, para la otra componente del polo:

$$m_2 = m_2^R + \delta m_2, \tag{3.7}$$

con,

$$\delta m_2 = -\frac{c_{22}}{B} m_2^R = \frac{k M a_e^5 \Omega^2}{9 B M \kappa^2} m_2^R. \tag{3.8}$$

Utilizando, los siguientes valores numéricos de las constantes que intervienen en las expresiones (3.5), (3.6), (3.7) y (3.8) [Moritz, 1987], [Kubo, 1991]:

$$\begin{aligned} M a_e^2 &= C/0.3307\,\mathrm{kg}m^2, \\ \Omega &= 7.292115\mathrm{x}10^{-5}\; rad/sg, \\ \kappa^2 M &= 3.986005\mathrm{x}10^{14}\;\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}^2, \\ a_e &= 6.378187\mathrm{x}10^6\;\mathrm{m}, \\ C/A &\approx C/B = 1.00374, \end{aligned}$$

obtenemos las siguientes expresiones para las coordenadas del polo:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{G}{A\omega}\mathrm{sen}J\mathrm{sen}l\{1 + 0.00116k\} \\ m_2 &= -\frac{G}{B\omega}\mathrm{sen}J\cos l\{1 + 0.00116k\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por tanto, al considerar una Tierra elástica, el polo describe a lo largo del tiempo una trayectoria libre que es una curva circular de un radio un poco mayor que el correspondiente al considerar una Tierra rígida.

4. MOVIMIENTO FORZADO

Superpuestas a la trayectoria circular se encuentran las oscilaciones forzadas provocadas por la influencia del Sol y de la Luna.

Las perturbaciones periódicas del movimiento del Polo son:

$$\Delta m_1 = \frac{G}{A\Omega}\{1 + 0.00116k\}\Delta(J\mathrm{sen}l), \tag{4.10}$$

$$\Delta m_2 = -\frac{G}{B\Omega}\{1 + 0.00116\}\Delta(J\cos l),$$

en donde hemos aproximado sen J por J al ser éste un ángulo muy pequeño (del orden de 10^{-7}).

Estas perturbaciones se han obtenido aplicando el método de integración de Hori. Sus expresines finales son:

$$\begin{aligned}\Delta(J\mathrm{sen}l) &= \Delta_S(J\mathrm{sen}l) + \Delta_A(J\mathrm{sen}l), \\ \Delta(J\cos l) &= \Delta_S(J\cos l) + \Delta_A(J\cos l),\end{aligned} \quad (4.11)$$

siendo,

$$\begin{aligned}\Delta_S(J\mathrm{sen}l) &= k^* \sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_i \frac{C_i(\varepsilon)}{n_g - \varepsilon N_i}\mathrm{sen}(g + l - \varepsilon\chi_i) + O(J), \\ \Delta_S(J\cos l) &= k^* \sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_i \frac{C_i(\varepsilon)}{n_g - \varepsilon N_i}\cos(g + l - \varepsilon\chi_i) + O(J)\end{aligned} \quad (4.12)$$

y para la perturbación periódica del polo debida a la triaxialidad de la Tierra:

$$\begin{aligned}\Delta_A(J\mathrm{sen}l) &= \frac{B - A}{2C - A - B}k^* \sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_i \frac{C_i(\varepsilon)}{n_g + 2n_l - \varepsilon N_i}\mathrm{sen}(g + l - \varepsilon\chi_i), \\ \Delta_A(J\cos l) &= \frac{B - A}{2C - A - B}k^* \sum_{\varepsilon=\pm1}\sum_i \frac{C_i(\varepsilon)}{n_g + 2n_l - \varepsilon N_i}\cos(g + l - \varepsilon\chi_i),\end{aligned} \quad (4.13)$$

donde,

$$\begin{aligned}\chi_i &= i_1 l_M + i_2 g_M + i_3 h_M + i_4 l_S + i_5 g_S, \\ N_i &= i_1 n_{l_M} + i_2 n_{g_M} + i_3 n_{h_M} + i_4 n_{l_S} + i_5 n_{g_S},\end{aligned}$$

(l_M, g_M, h_M) son las variables modificadas de Delaunay [Smart, 1953],

l_M es la longitud media de la Luna,

g_M es la longitud del perigeo lunar,

h_M es la longitud media del nodo ascendente de la Luna,

l_S es la longitud media del Sol,

g_S es la longitud del perigeo solar,

N_i es una combinación lineal de los movimientos medios de las variables que aparecen en el argumento χ_i [Seidelmann, 1992],

g es el ángulo entre la línea nodal intersección de la eclíptica y el ecuador momento angular y la línea nodal intersección del ecuador de figura y el ecuador momento angular

y

$$k^* = \frac{3\kappa^2 M'}{a_M^3}\frac{2C - A - B}{C\Omega},$$

donde,

M' es la masa de la Luna,

a_M es el semieje mayor del órbita de la Luna,

C es el momento de inercia polar de la Tierra rígida.

La expresión para el coeficiente $C_i(\varepsilon)$ es :

$$\begin{aligned} C_i(\varepsilon) &= -\frac{1}{4}\mathrm{sen}2I A_i^0 + \frac{1}{2}(1 + \varepsilon\cos I)(-1 + 2\varepsilon\cos I)A_i^1 \\ &+ \frac{1}{4}\varepsilon\mathrm{sen}I(1 + \varepsilon\cos I)A_i^2. \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde I es el ángulo entre el ecuador momento angular y la eclíptica.

Los coeficientes A_i^j que aparecen en la expresión (4.14) son funciones de la excentricidades de la órbita de la Luna y de la Tierra, de los semiejes mayores de la órbita de la Luna y de la Tierra, del cociente entre los movimientos medios del Sol y de la Luna y del seno de la inclinación de la órbita de la Luna; es decir, son funciones de los elementos orbitales de la Luna y de la Tierra.

5. CONCLUSIONES

- En este trabajo hemos obtenido las expresiones de las componentes del polo para una Tierra deformable, en donde la deformación está solamente producida por la fuerza centrífuga debida a la rotación.
- La solución obtenida para las perturbaciones periódicas $\Delta(J \mathrm{sen} l)$ y $\Delta(J \cos l)$ tiene la misma forma que la obtenida por Kinoshita [Kinoshita, 1977].
- La diferencia entre nuestras series y las de Kinoshita es que hemos introducido una combinación lineal de variables (representada por χ_i) distinta a la que Kinoshita incluyó en sus trabajos [Kinoshita, 1977], [Kinoshita, 1990].
- Las series (4.12) y (4.13) se han obtenido a partir del desarrollo del potencial gravitatorio en función de las variables χ_i y de las variables de Andoyer. El procedimiento detallado para calcular este potencial se puede seguir en un trabajo previo [Folgueira, 1994].

REFERENCIAS

KINOSHITA, H. (1977). Theory of the Rotation of the Rigid Earth. Celest. Mech. 15, 277–326.

KINOSHITA, H. Y SOUCHAY, J. (1990). The Theory of the Nutation for the Rigid Earth Model at the Second Order. Celest. Mech. 48, 187–265.

KUBO, Y. (1991). Solution to the Rotation of the elastic Earth by Method of the Rigid Dynamics. Celest. Mech. 50. 165–187.

FOLGUEIRA, M. Y SEVILLA, M. J. (1994). A New Expression of the Potential Gravitational Energy for the Earth's Rotation Problem. Enviado a publicar en los Proccedings del III International Workshop on Positional Astronomy and Celestial Mechanics.

MELCHIOR, P. (1978). The tides of the Planet Earth. Pergamon Press.

MUNK, W. H. Y MACDONALD, G. J. F. (1960). The Rotation of the Earth. A Geophysical Discussion. Cambridge University Press.

MORITZ, H. Y MUELLER, I. I. (1987). Earth Rotation. Theory and Observation. Ungar.

SEIDELMANN, P. K. (EDS.) (1992). Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac. University Science Books. Mill Valley, California.

SEVILLA, M. J. Y CAMACHO, A. G. (1982). Deformación Rotacional de una Tierra elástica. Revista de Geofísica vol. 38, 179-187.

SEVILLA, M. J. (1989). Mecánica Celeste Clásica. Instituto de Astronomía y Geodesia. Universidad Complutense de Madrid, no. 5

SMART, W. M. (1953). Celestial Mechanics. Longmans.

WOOLARD (1953). Theory of the Rotation of the Earth around its Center of Mass. Astronomical Papers prepared for the use of American Ephemerides and Nautical Almanac. Vol. XV Part. I