

Energía de terremotos y de ondas sísmicas

Energy of earthquakes and seismic sources

Jiří ZAHRADNÍK

Cátedra de Geofísica. Facultad de Matemáticas y Física
Universidad Carolina, Praga (República Checa)

SUMMARY

Determinations of the seismic energy E are difficult due to the heterogeneity of the Earth, its free surface, and absorption. The zero-order ray theory (i.e. the far-field approximation) is an useful tool for these purposes. The most reliable determinations of E are those based on the source time functions, e.g. the moment-tensor function $M_{pq}(t)$. Due to the absorption, any energy determination should be regarded as an estimate within a certain frequency window only. The employment of the strong-motion records enlarges this window, but it yields problems with the near-field effects. The seismic energy E serves mainly for classifying the earthquake size, independently of the seismic moment M_0 . No considerations of the prestress are required for such classification, although the relation between E and M_0 has a close connection to the stress drop $\Delta\sigma$. Studies of the mechanical work at the fault require correct relations between E and $\Delta\sigma$. They include quantities difficult to evaluate, e.g. the stress rate at the fault. The seismo-tectonic applications of E are very limited unless the dynamical models including the fracture energy, and the thermal energy, are studied, too.

RESUMEN

Determinaciones de la energía sísmica E son difíciles debido a la heterogeneidad de la Tierra, su superficie libre y atenuación. El aparato muy útil para este fin es la teoría de rayos en su aproximación nula, o sea la aproximación del campo lejano. Las más fiables determinaciones de E son las realizadas a partir de las funciones temporales del foco, p. ej. el tensor momento sísmico $M_{pq}(t)$. Por causa de la atenuación, cada determinación de E representa sólo una estimación de la energía para cierto intervalo de frecuencias. El uso de los movimientos fuertes amplia

este intervalo, pero lleva complicaciones por los efectos del campo cercano. La energía sísmica sirve para clasificar el tamaño del terremoto, independientemente del momento sísmico M_0 . Esta clasificación no necesita consideraciones del esfuerzo inicial, a pesar de que la relación entre E y M_0 tiene una conexión estrecha con la caída del esfuerzo $\Delta\sigma$. Para los estudios del trabajo mecánico en la falla se necesitan relaciones correctas entre E y $\Delta\sigma$. Éstos incluyen cantidades difíciles de evaluar, p. ej. la variación temporal del esfuerzo en la falla. Las aplicaciones sísmo-tectónicas de E son de uso muy limitado si no se cuenta con los modelos dinámicos, incluso la energía de fractura y la energía térmica.

1. INTRODUCCION

En este artículo estamos interesados en la energía mecánica (potencial y cinética) en la tierra, en conexión con los terremotos. No consideramos transformaciones de la energía mecánica a otros tipos de energía, por ejemplo la energía térmica. Distinguiremos entre la energía mecánica de toda la tierra y la de un volumen en particular, p. ej. el volumen de la llamada esfera focal. Estudiaremos el flujo de energía a través de varias superficies, como la superficie terrestre, y otros. Mostraremos cuál es la relación entre la energía mecánica de la Tierra, la energía de un terremoto, y la energía de las ondas sísmicas, llamada también la energía sísmica. Discutiremos varias posibilidades de definir la energía sísmica y los principios de su determinación, o medición, a partir de sismogramas. Atención especial se dará a la relación entre la energía sísmica y el trabajo efectuado por los esfuerzos elásticos en las fallas, sobre todo la relación entre la energía sísmica y la caída de los esfuerzos durante un terremoto. No omitiremos las consideraciones del esfuerzo inicial. Se revisaran brevemente las complicaciones prácticas causadas por la heterogenidad de la Tierra, el amortiguamiento y la existencia de la superficie libre. Se mostrará cómo emplear las relaciones entre la energía sísmica y la caída de esfuerzos para mejorar la clasificación de terremotos por medio de las magnitudes. Terminaremos con una discusión sobre cómo emplear en la determinación de la energía las desviaciones de terremotos desde el modelo de cizalla pura.

El artículo representa un intento del autor para unificar el tratamiento de la energía sísmica que actualmente se halla poco tratada, o desperdiciada en Udías (1985 y 1989), Aki y Richards (1980), Kostrov y Das (1988), Madariaga (1983), Boatwright (1980), Zahradník (1989), y otros.

Partimos de que el lector no sólo conoce los conceptos básicos de sismología, como: magnitud, foco y mecanismo focal, fallas y fracturas, momento sísmico, etc., sino que también posee un buen entrenamiento en mecánica del medio continuo (p. ej., en los tensores de esfuerzo y deformación, el tensor de Green, etc.). La lectura de este artículo será más fácil para los que conocen la descripción matemática del foco sísmico, sobre todo los modelos cinemáticos.

2. SUMARIO DE CANTIDADES BASICAS

Para facilitar el tratamiento, presentaremos primero un resumen de las cantidades físicas básicas que tienen relación con este artículo, mostrando también su notación.

u_i	el vector del desplazamiento (la componente $i=1,2,3$)
\dot{u}_i	la derivada del desplazamiento respecto al tiempo
$u_{i,j}$	la derivada del desplazamiento respecto a la coordenada j
σ_{ij}	el tensor de esfuerzo completo, incluso el inicial
τ_{ij}	el tensor de esfuerzo incremental
$\tau_{ij,j}$	la derivada del esfuerzo respecto a la coordenada j
ϵ_{ij}	el tensor de deformación; $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{i,j})$
c_{ijkl}	el tensor de los parámetros elásticos para el medio anisótropo
$c_{ijk}\epsilon_{kl}$	sumatoria por los índices repetidos k y l (la regla de Einstein)
$c_{ijk}\epsilon_{kl} = c_{ijkl}u_{k,j}$	la relación que sigue desde la simetría del tensor c_{ijkl}
λ, μ	los parámetros elásticos para el medio isótropo
α, β	las velocidades de propagación de ondas longitudinales (P) y transversales (S)
ρ	la densidad
v_i	la normal de una superficie (el vector unitario)
T_i	el vector de esfuerzo; $T_i = \tau_{ij} v_j$
Σ	la superficie de la falla
$[u_i]$	la discontinuidad del desplazamiento en la falla
$[u_i] = \Delta u_i$	la representación a partir de su magnitud y el vector unitario
ξ_i	el radio vector de un punto de la falla
x_i	el radio vector de un punto de observación, o receptor
γ_i	el radio vector relativo entre un punto de falla y el receptor (el vector unitario)
$\Delta\sigma$	la caída de esfuerzos de cizalla (el valor promedio sobre la falla)
$\bar{\mu}$	el valor promedio de μ sobre la falla
M_0	el momento sísmico escalar
L	el tamaño característico lineal de la falla (longitud de falla)
W	la energía mecánica de un volumen
E	la energía sísmica (o la energía de ondas sísmicas, o el flujo de la energía sísmica)
E^P, E^S	la energía sísmica de las ondas P y S
M	la magnitud (de ondas superficiales)
M_ω	la magnitud de momento
$\Omega(t)$	la función temporal del foco (para la cizalla pura)
M_{pq}	el tensor momento sísmico

$M_{pq}(t)$	la función temporal del foco (analogía tensorial de $\Omega(t)$)
F^P, F^S	los patrones de radiación de las ondas P y S (para la cizalla pura)
$\langle (F^P)^2 \rangle$	el valor promedio espacial de $(F^P)^2$
G_{ij}	el tensor de Green
*	la convolución en el tiempo

3. MEDIO SIN FALLA

Antes de tratar la energía en el medio tomando en cuenta los procesos en las fallas sísmicas, trataremos algunos casos más sencillos.

Consideremos un volúmen V rodeado por una superficie S . La superficie no es libre y no existe ninguna falla sísmica dentro de S . La figura 1 muestra un ejemplo de V y S dentro de la Tierra, junto con una falla Σ no rodeada por S . En la falla Σ tiene lugar un terremoto, mejor dicho, los procesos de fractura generadores del campo de las ondas sísmicas. Se estudia este campo dentro del volúmen V y en la superficie S . El proceso de deformación en V tiene una duración finita, o sea, $t_\epsilon(t_0, t_1)$, en lo siguiente elegido cómo $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$. Para simplificar el problema respecto a la realidad, que es mucho más compleja, supongamos que en el momento t_0 (o sea en el estado nulo) el medio elástico en V no tiene ningún esfuerzo, deformación, ni desplazamiento: $\tau_{ij}^0 = \epsilon_{ij}^0 = u_i^0 = 0$. En el momento t_1 , estado uno, supongamos que, en general, tiene lugar $\tau_{ij}^1 \neq \epsilon_{ij}^1 \neq u_i^1 \neq 0$. Las fuerzas de volúmen no se consideran aquí. Los estados nulo y uno son los de equilibrio: $\tau_{ij,j}^0 = \tau_{ij,j}^1 = 0$. Además, el estado uno es estático: $\dot{u}_i = 0$. Durante el proceso tiene lugar la ecuación de movimiento, de forma $\tau_{ij,j} = p\ddot{u}_i$. La *energía mecánica* está compuesta de la energía potencial y cinética. Su densidad de volumen $w(\vec{x}, t)$, la cual depende de la posición y tiempo, se expresa por

$$W = \frac{1}{2} \tau_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} p \dot{u}_i \dot{u}_i \quad (1)$$

La energía total o, mejor dicho, la diferencia entre el estado final 1 y inicial 0 viene dada por

$$W = \int_V (w^1 - w^0) dV = \int_V w^1 dV - \frac{1}{2} \int_V \tau_{ij} \epsilon_{ij} dV - \frac{1}{2} \int_V \tau_{ij} u_{i,j} dV \quad (2)$$

Después de una manipulación formal obtendremos

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\tau_{ij} u_{i,j})_{,j} dV - \frac{1}{2} \int_V \tau_{ij,j} u_i dV - \frac{1}{2} \int_V (\tau_{ij} u_i)_{,j} dV \quad (3)$$

donde la integral con el término $\tau_{ij,j}$ desapareció por causa del equilibrio arriba mencionado. Finalmente, usando el teorema de Gauss, la energía se puede escribir de forma equivalente

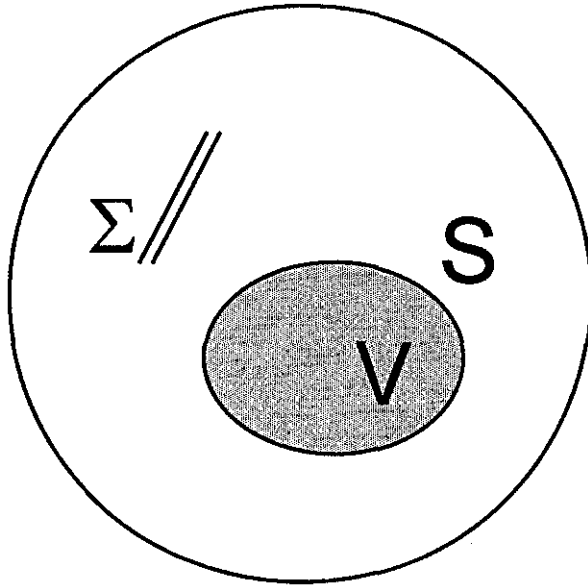


Figura 1. Un volumen V rodeado por una superficie S , dentro de la Tierra. La falla Σ no se halla dentro de S .

$$W = \frac{1}{2} \int_S \tau_{ij} u_i v_j dS = \frac{1}{2} \int_S T_i^j u_j dS \quad (4)$$

Hemos encontrado que la energía mecánica W se puede expresar como el trabajo efectuado en la superficie S por el *esfuerzo promedio* $\frac{1}{2}(T_i^j + T_j^i) = \frac{1}{2}T_i^j$, en conexión con el desplazamiento final (estático) u_j . Por supuesto, esta representación es de una forma bastante formal, o sea, dice poco sobre el proceso de deformación, porque no da ninguna descripción de la variación temporal $u_i(\vec{x}, t)$. Sin embargo, es muy valioso ver que, como se muestra en (4), el valor final de W no cambiará para cualquier variación de $u_i(\vec{x}, t)$ que se señala por los mismos valores de $\frac{1}{2}T_i^j$ y u_j . Cuando una onda sísmica está propagándose a través de V , este volumen cambia su energía entre los momentos 0 y 1 sólo en caso que $u_j(\vec{x})$ no desaparece en V .

En realidad, los desplazamientos finales diferentes de cero se conocen, p. ej. a partir de las mediciones geodésicas cerca de las fallas después de grandes terremotos. (Por supuesto, éstos, no deben confundirse con los desplazamientos en las fallas, mejor dicho por las discontinuidades del desplazamiento, o fracturas). Los desplazamientos no nulos fuera de las fallas pueden explicarse con la teoría de la elasticidad y los llamados efectos del campo cercano. Estos disminuyen con la distancia hipocentral r como r^{-2} . Estos efectos no se tratan en la mayoría de los problemas prácticos de sismología. Mejor dicho, estos efectos se desprecian respecto a los efectos del

campo lejano. Sin embargo, el desplazamiento del campo lejano disminuye como r^{-1} y nunca se señala por $u_i \neq 0$. En otras palabras, si se aceptara una aproximación del campo lejano, nuestro problema (el de este capítulo) siempre resulta en $W = 0$.

4. FLUJO DE ENERGÍA

La siguiente etapa de nuestro estudio es entender qué pasa con la energía mecánica W en el volumen V durante el proceso de deformación, o sea, para $t_\epsilon(t_0, t_1)$. Se puede escribir la energía de forma

$$W = \int_V W(\vec{x}, t_1) dV = \int_V \int_0^1 \dot{W}(\vec{x}, t) dt dV \quad (5)$$

donde se expresa la derivada temporal de la densidad como

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \frac{1}{2} \dot{\tau}_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \tau_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \rho \dot{u}_i \dot{u}_i = dS \\ &\quad \frac{1}{2} \dot{\tau}_{ij} u_{i,j} + \frac{1}{2} \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} + \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \end{aligned} \quad (6)$$

Tomando en cuenta que

$$\dot{\tau}_{ij} u_{i,j} = c_{ijkl} \dot{u}_{k,l} u_{i,j} = c_{kl ij} \dot{u}_{i,j} u_{k,l} = c_{ijkl} \dot{u}_{i,j} u_{k,l} = c_{ij kl} u_{k,l} \dot{u}_{i,j} = \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} \quad (7)$$

la derivada \dot{W} viene dada por

$$\dot{W} = \frac{1}{2} \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} + \frac{1}{2} \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} + \tau_{ij,j} \dot{u}_i = (\tau_{ij} \dot{u}_i)_{,j} \quad (8)$$

Si resumimos los resultados (5) y (8), obtenemos

$$W = \int_V \int_0^1 (\tau_{ij} \dot{u}_i)_{,j} dt dV = \int_S \int_0^1 \tau_{ij} \dot{u}_i v_j dt dS \quad (9)$$

Esta ecuación representa la ley de *conservación de energía*. La cual dice que un cambio de energía dentro del volumen V es igual al flujo de energía a través de la superficie S que rodea V . Observemos que la función dentro de la integral $\tau_{ij} \dot{u}_i v_j = T_i \dot{u}_i$ expresa la densidad superficial del flujo de potencia, efectuado por el esfuerzo (o tracción) T_i .

Comparando las ecuaciones (4) y (9), que expresan la misma energía W , llegamos a

$$W = \frac{1}{2} \int_S T_i^l u_l^i dS = \int_S \int_0^1 T_i \dot{u}_i dt dS \quad (10)$$

Esta relación hace posible entender mejor el caso especial cuando $W=0$, mencionado en el capítulo 3. La ecuación (10) nos dice que, en la aproxi-

mación del campo lejano, cada caso cuando $W = 0$ es equivalente a que toda la energía que fluye dentro de V es igual a la que fluye fuera de V , a través de S . Sin embargo, una vez considerados los efectos del campo cercano, $W \neq 0$, los dos flujos son diferentes.

En este momento, hay que mencionar un caso especial de $W = 0$ que se podría encontrar a pesar de que se tome en consideración el campo cercano. Como se ve en (10), éste es el caso de la llamada superficie libre, o sea $T_i = 0$ en S . La superficie S que se muestra en la figura 1 no es libre porque se halla dentro de la Tierra. El caso de la superficie terrestre libre considerada como S se abordará más adelante.

Debe darse cuenta también que la ecuación (10) puede aplicarse en el caso de un volumen V rodeado por dos superficies, una interna y otra externa, es decir $S = S_{int} + S_{ext}$, véase figura 2. La ecuación (10) dice que sólo cuando $W = 0$ los flujos a través de S_{int} y S_{ext} se igualan uno al otro. (Mejor dicho, son del mismo tamaño, pero del signo opuesto, gracias a la orientación opuesta de la normal externa de las dos superficies.)

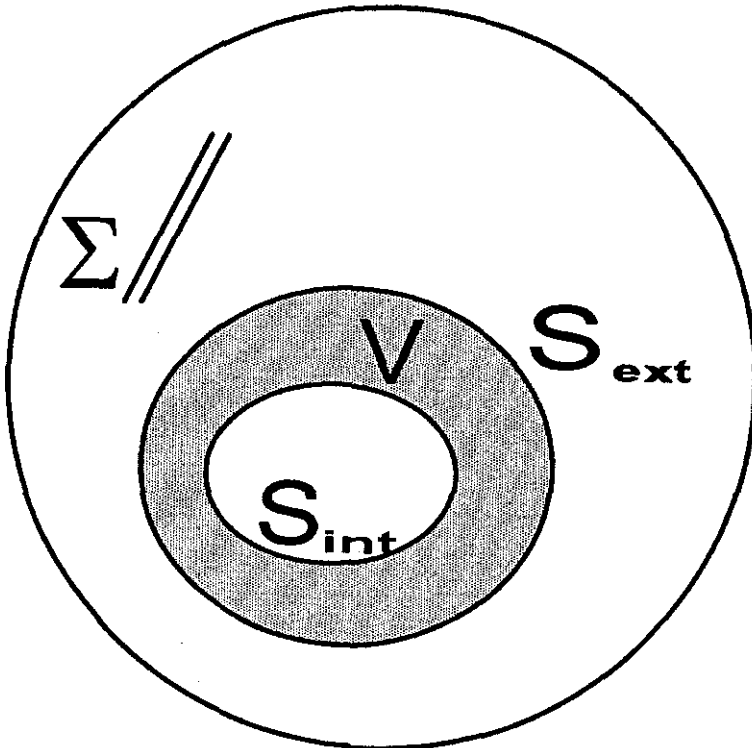


Figura 2. Un volumen V rodeado por dos superficies, S_{int} y S_{ext} dentro de la Tierra.

Queda por decidir cuál de las tres expresiones propuestas para W sería mejor para una eventual 'medida' de W . Las tres expresiones son:

$$W = \int_V \int_0^1 (\tau_{ij} \dot{u}_i)_{,j} dt dV = \frac{1}{2} \int_S \tau_{ij} u_i v_j dS = \int_S \int_0^1 \tau_{ij} \dot{u}_i v_j dt dS \quad (11)$$

La integral de volúmen en la primera expresión es, en general, muy poco útil, o difícil, porque su evaluación necesitaría las 'medidas' dentro de todo el volúmen estudiado. La integral de superficie en la segunda expresión, que contiene u_i , es igualmente poco útil, ya que los desplazamientos finales son difíciles de observar, porque éstos tienen valores bajos y son cantidades estáticas. (Típicamente, los instrumentos sísmicos no extienden sus características hasta la frecuencia nula.) La última expresión de W que se encuentra en la ecuación (11), esto es la doble integral sobre S y el tiempo, es la más útil. Es muy probable que debido a estas razones la doble integral (con signo opuesto) sea denominada en sismología como la *energía sísmica*. Equivalentemente se le llama la *energía de las ondas sísmicas*. Siguiendo esta tradición la definimos como

$$E = - \int_S \int_0^1 T_i \dot{u}_i dt dS = - \int_S \int_0^1 \tau_{ij} \dot{u}_i v_j dt dS \quad (12)$$

Comparándola con la ecuación (10), nuestro modelo sencillo (figuras 1 y 2) nos proporciona una ley de la conservación de la energía en la forma

$$W = - E \quad (13)$$

Esta ecuación indica que, por ejemplo, una caída de energía perteneciente al volúmen V (eso es $W < 0$), está compensada por un flujo dentro de V (eso es el flujo negativo), o la energía sísmica positiva. Lo contrario ($W > 0$, $E < 0$) equivale a lo mismo.

Hay que enfatizar que, la energía sísmica está definida en (12) por el tensor de esfuerzo *incremental* τ_{ij} . Esto es una propiedad típica de la definición de E que tiene lugar siempre, incluso en el caso cuando se cuenta con la presencia del esfuerzo inicial. Volveremos a este problema más adelante.

Respecto a la definición (12) hay que especificar de forma más concreta cómo elegir el volúmen V y la superficie S para poder calcular en la práctica la energía sísmica. ¿Es éste un volúmen dentro de la Tierra, como en la figura 1, o debe igualarse S con la superficie terrestre? Hasta el momento, en nuestra formulación del problema, no podemos conceder ninguna superficie S que contenga la falla. Por lo tanto, en este momento no podemos discutir una aplicación práctica de (13) en absoluto. Sin embargo, hay que mencionar, que cuando lleguemos al caso de permitir la falla dentro de S , la relación entre W y E aparecerá mucho más compleja que (13).

Otro punto de interés refiriéndose a la definición (12) es cómo entender el desplazamiento u_i . Este problema tiene una estrecha relación

con la elección de S . Como ya se discutió en base a la figura 2 y la ecuación (10), para tener $W \neq 0$, el flujo a través de S_{int} es diferente al flujo a través de S_{ext} . Al mismo tiempo, $W \neq 0$ está relacionado con $u_i \neq 0$, ésto es, con los efectos del campo cercano. Esto quiere decir que E no depende de la elección de la superficie S sólo en el caso cuando se desprecian en u_i los efectos del campo cercano. Para lo que sigue, u_i en la ecuación (12) es el desplazamiento en la aproximación del campo lejano, *por definición*. Por supuesto, en el caso sencillo estudiado en este capítulo, una vez despreciados los efectos del campo cercano llegaremos al resultado trivial de $W = E = 0$.

5. MEDIO PRETENSADO

Nuestras consideraciones precedentes se señalaron con fuertes simplificaciones. Ahora nos acercaremos más a la situación real de la Tierra. Primero, vamos a eliminar el supuesto en el cual el medio está sin esfuerzo y deformación. Ahora supondremos el medio sin deformación, pero con algún esfuerzo inicial.

El esfuerzo inicial será una función de la posición que durará desde t_0 hasta t_1 sin cambios temporales, o sea $\sigma_{ij}^0(\vec{x})$. De forma similar a lo que hicimos antes supondremos que en el estado 0 todas las deformaciones y desplazamientos son nulos, $\epsilon_{ij}^0 = 0$, $u_i^0 = 0$. Además, para simplificar el problema, vamos a suponer que el esfuerzo incremental τ_{ij} está relacionado con la deformación ϵ_{ij} por la ley de Hooke $\tau_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl}$. En realidad, para los medios con el esfuerzo inicial, la relación entre τ_{ij} y ϵ_{ij} es más complicada, y viene dada por el llamado tensor de Piola y Kirchhoff; véase Dahlen, (1967). Entonces, el esfuerzo completo es de siguiente forma:

$$\sigma_{ij}(\vec{x}, t) = \sigma_{ij}^0(\vec{x}) + \tau_{ij}(\vec{x}, t) \quad (14)$$

Los estados 0 y 1 son de equilibrio, $\sigma_{ij,j}^0 = \sigma_{ij,j}^1 = 0$. Bajo estas condiciones la densidad de la energía mecánica viene dada por una relación más compleja que (1), esto es

$$W = W^0 + \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} c_{ijkl} \epsilon_{kl} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \quad (15)$$

Ahora la energía potencial se ha representado en (15) por una función cuadrática de ϵ_{ij} (a diferencia de la función lineal que aparece en (1)). Los términos $W^0 + \sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}$, que se adjuntaron al término estándar de $\frac{1}{2} \tau_{ij} \epsilon_{ij}$, pueden explicarse sin dificultad. Basta recordar una importante propiedad general de la energía potencial (o sea, la energía de deformación). La energía potencial es una función de la deformación ϵ_{ij} , cuya derivada respecto a ϵ_{ij} es el esfuerzo (Landau y Lifshitz, 1965). Como se puede ver en (15),

derivando la energía potencial respecto a ε_{ij} se obtiene justamente el esfuerzo $\sigma_{ij}^0 + \tau_{ij}$, postulado en la ecuación (14):

$$\frac{\partial(W^0 + \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \tau_{ij} \varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}^0 + \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \sigma_{ij}^0 + \tau_{ij} = \sigma_{ij} \quad (16)$$

En forma análoga a (2), el cambio total de energía entre los estados 0 y 1 viene dado por

$$W = \int_V (W^1 - W^0) dV = \int_V (\sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^1 + \frac{1}{2} \tau_{ij} \varepsilon_{ij}^1) dV \quad (17)$$

Introduciendo $\tau_{ij} = \sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^0$ a partir de la ecuación (14) tenemos

$$W = \int_V (\sigma_{ij}^0 + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^1 - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^0) \varepsilon_{ij}^1 dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1) \varepsilon_{ij}^1 dV \quad (18)$$

Si, además, la deformación se expresa por el desplazamiento, obtendremos que

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1) u_{ij}^1 dV = \frac{1}{2} \int_V ((\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1) u_{ij})_{,j} dV - \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij,j}^0 + \sigma_{ij,j}^1) u_i dV \quad (19)$$

El último término, que contiene $\sigma_{ij,j}^0$ y $\sigma_{ij,j}^1$, desaparecerá gracias a la condición de equilibrio. Finalmente, aplicando el teorema de Gauss,

$$W = \frac{1}{2} \int_S (\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1) u_i v_j dS \quad (20)$$

Es sumamente interesante comparar este resultado con el de la ecuación (4). Como se puede apreciar en (20), el hecho de considerar el esfuerzo condujo a que el término $\frac{1}{2} \tau_{ij}$ se sustituyera por el promedio de los esfuerzos iniciales y finales $\frac{1}{2} (\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1)$. En otras palabras, en ambas ecuaciones (4) y (20) aparecen las cantidades análogas, es decir, los valores promedios entre los valores iniciales y finales, los cuáles, por supuesto, poseen forma diferente para cada problema. Su forma para el caso que considera sin el esfuerzo inicial es $\frac{1}{2} \tau_{ij}$, mientras que para el caso que considera el esfuerzo inicial es $\frac{1}{2} (\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1)$; véase figura 3.

6. MEDIO CON FALLA

Una generalización que debe hacerse para aproximarse a las condiciones reales de la Tierra, es considerar la existencia de una falla. En tal caso el problema es similar al modelo tratado en la figura 2, donde el volumen

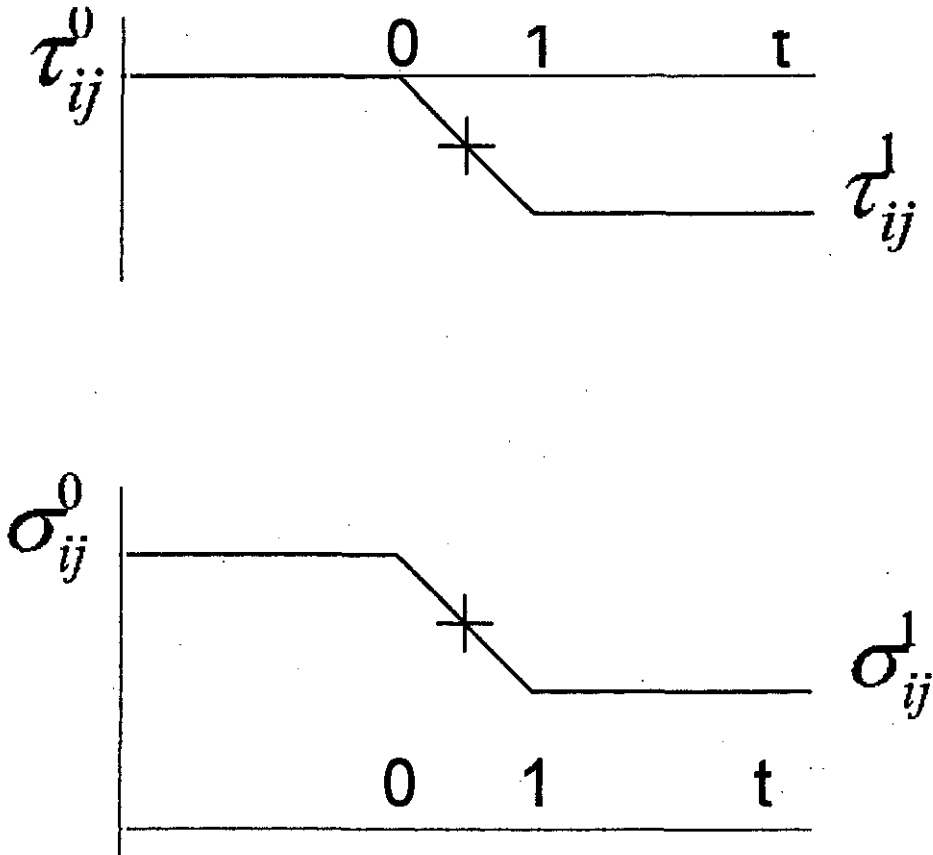


Figura 3. Una ilustración esquemática de la analogía entre las ecuaciones (4) y (20). En ambas ecuaciones ocurre el promedio entre los esfuerzos iniciales y finales, mostrado por la cruz.

V estaba limitado externa e internamente por dos superficies. La superficie de la falla Σ , que estamos introduciendo, jugará aquí un papel similar al de la superficie S_{int} de la figura 2, con la única diferencia de que Σ es la superficie 'degenerada', de volumen cero (figura 4). A ésta se le llama la superficie doble, denotándola por $\Sigma = \Sigma_+ + \Sigma_-$.

Por esto, el volumen V estudiado ahora está limitado externamente por la superficie S e internamente por la falla Σ . Este hecho se puede representar por la ecuación (20), sustituyendo en ella S por $S + \Sigma = S + \Sigma_+ + \Sigma_-$. Las normales externas de Σ_+ y Σ_- , son de signo opuesto: $\vec{v}_+ = -\vec{v}_-$. Introduciendo sólo una normal para ambas superficies, $\vec{v} = \vec{v}_-$, la cuál es interna respecto a Σ_+ , nos lleva a que en la integración sobre Σ_+ la normal externa viene dada por $-\vec{v}$. Por consiguiente:

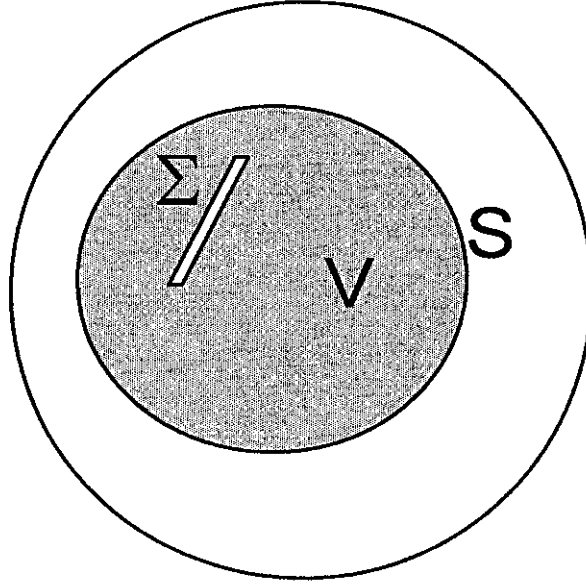


Figura 4. Un volúmen V dentro de la Tierra. El volúmen V está rodeado externamente por la superficie S e internamente por la falla Σ .

$$W = \frac{1}{2} \int_S (\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1) u_i^+ v_j dS + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1) (u_i^- - u_i^+) v_j d\Sigma \quad (21)$$

Para simplificar el problema, suponemos que los esfuerzos son continuos a través de la falla, por lo cual los σ_{ij}^0 y σ_{ij}^1 aparecen en (21) sin signos. Por otro lado, los desplazamientos son discontinuos, lo cual se denota por $u_i^+ - u_i^- = [u_i] \neq 0$. Σ , apareciendo en el límite inferior de la integral, se entiende como el tamaño de la falla. Finalmente obtendremos que

$$W = \frac{1}{2} \int_S (\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1) u_i^+ v_j dS + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1) [u_i] v_j d\Sigma \quad (22)$$

Comparando (22) con (20), la expresión de W se ha generalizado por la adición de la integral que expresa el trabajo de las fuerzas superficiales actuando en Σ en relación con el desplazamiento *discontinuo*.

En este momento cabe prevenir sobre un error muy corriente, el de entender este trabajo en Σ como el trabajo de las fuerzas tectónicas que originaron la fractura $[u_i]$. Esto no es tan fácil. Nuestro problema es el llamado problema cinemático, es decir, no se toma en cuenta el proceso de formación de $[u_i]$, ni las necesarias fuerzas, ni su trabajo. Se puede decir que estamos estudiando el medio con la fractura impresa. La generación o formación de $[u_i(\vec{x}, t)]$, que puede estudiarse en los llamados problemas di-

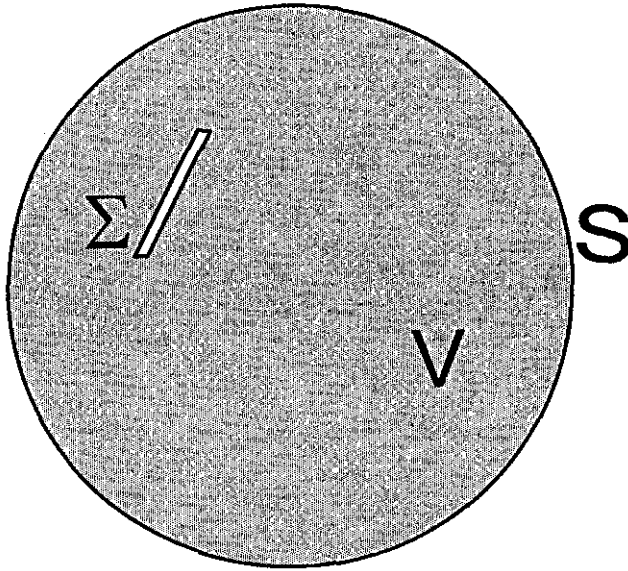


Figura 5. El volúmen de toda la Tierra, y la superficie libre S. Éste escogimiento de V y S no es útil para los cálculos de la energía sísmica E, ya que conlleva $E = 0$.

námicos (no tratados en este artículo), tiene una relación estrecha con los procesos tectónicos.

Ahora volveremos al caso trivial mencionado en el capítulo 4, el caso de la superficie S libre. A diferencia del capítulo 4 ahora estamos considerando dos superficies, la superficie libre S y la falla Σ , en forma similar al caso real de la tierra (véase figura 5). Mientras que la superficie libre S en el capítulo 4 implicó, a partir de la ecuación (10) el resultado de $W = 0$, aquí, en el volúmen de toda la tierra ese resultado no tiene cabida. Como se muestra en (22), la desaparición de la integral sobre S conduce a que $W = \int_{\Sigma} \dots d\Sigma$. Esto indica que cada caída de la energía mecánica de la Tierra, $W < 0$, está compensada por un trabajo en la falla Σ . Se puede decir que el volúmen está proporcionando la energía a la falla. Pero, se puede decir también lo opuesto, que si la falla trabaja (por una 'fuente interna' de energía, que fluye 'a través de Σ ', dentro V), se aumenta por este motivo la energía del volúmen de la tierra.

El lector debe sentir que cada una de estas dos formulaciones expresa sólo una parte de la verdad. En realidad, ambos mecanismos mencionados (y algunos otros más) están funcionando en conjunto. En el nivel más o menos intuitivo podemos esperar lo siguiente: en los lugares de terremotos futuros, en fallas y cerca de ellas, la tierra aumenta su energía potencial. Esto ocurre como consecuencia de los movimientos de las placas, en partes

de la falla donde el movimiento relativo es nulo, mientras que en otras partes de la misma falla se da el movimiento no nulo. Es decir, en los lugares sin movimiento, la energía cinética de las placas móviles se transforma en energía potencial (o sea en la energía de deformación). Durante el terremoto, la energía potencial del medio disminuye, $W < 0$, lo cual, a partir de (22), equivale al flujo de energía en la falla. Al mismo tiempo, sin embargo, la falla está utilizando esta fuente de energía para el trabajo relacionado con el desplazamiento discontinuo en la falla, así como con las ondas generadas en la falla. Las ondas que se propagan dentro del volumen V de la Tierra devuelven la energía hacia atrás. Si la superficie S fuera transparente, la energía fluiría a través de S , disminuyendo W . Pero, para una superficie libre S , las ondas vuelven adentro, no permitiendo la disminución de W . Despreciando las transformaciones de la energía mecánica durante los procesos inelásticos en la falla y durante la propagación de las ondas, la energía mecánica de la tierra se conserva. En los capítulos que vienen vamos a discutir algunas de estas ideas en forma mas exacta.

Parece posible suponer que la superficie S es la superficie libre de la tierra (figura 5). Sin embargo, no lo haremos por ahora. Si supusiéramos S libre, la ecuación (22) nos proporcionaría una relación interesante entre la energía de la tierra W y el trabajo en la falla $\int_{\Sigma} \dots d\Sigma$, pero, tal relación no tendría ningún significado práctico porque ninguna de estas cantidades se puede medir. Por esa razón continuaremos con la suposición de que S es una superficie interna en la tierra, como se recoge en la figura 4. Luego mostraremos cómo medir un flujo de energía en S y cómo elegirla en la práctica.

Similarmente al caso de la ecuación (4), no nos satisface que en la ecuación (22) se haya descrito W solamente por los valores relacionados a los estados inicial y final, sin representar el desarrollo del proceso en el tiempo. Nos gustaría representar W de forma análoga a (9) para el caso mostrado en la figura 4. Todo el desarrollo matemático es bastante complicado (véase, p. ej., Kostrov y Das, 1988). Afortunadamente, una simple idea nos llevará al resultado (aunque sólo aproximado) muy rápidamente. Comenzaremos observando las analogías entre (4) y (22):

en la ecuación (4):

$$\frac{1}{2} \tau_{ij}$$

en la ecuación (22):

$$\frac{1}{2} (\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1) = \sigma_{ij}^0 + \frac{1}{2} \tau_{ij}$$

En otras palabras, en ambos problemas aparece el valor promedio entre el esfuerzo inicial y final (véase también figura 3). Por eso, en vez del esfuerzo resultante τ_{ij} en el primer problema debe, en el segundo proble-

ma, considerarse el esfuerzo $\sigma_{ij}^0 + \tau_{ij} = \sigma_{ij}$. Si se toma en cuenta también la otra analogía

en la ecuación (4):

$$W = \int_S u_i \dots dS$$

en la ecuación (22):

$$W = \int_S u_i \dots dS - \int_{\Sigma} u_i \dots d\Sigma$$

llegamos a la generalización de (9) en forma de

$$W = \int_S \int_0^1 \sigma_{ij} \dot{u}_i v_j dt dS - \int_{\Sigma} \int_0^1 \sigma_{ij} [\dot{u}_i] v_j dt d\Sigma \quad (23)$$

Esta deducción parece muy lógica, pero, similarmente a muchas otras suposiciones basadas en analogías, el resultado no es correcto. Nuestra consideración salió de las ecuaciones (4), (22), en que se tratan sólo los estados estáticos 0 y 1. No se trata en absoluto la energía relacionada con la penetración de la falla en el medio, la llamada energía de fractura (Kostrov y Das, 1988, capítulo 4.4). Desde este punto de vista la ecuación (23) debe considerarse sólo como una aproximación. Madariaga (1983, capítulo 10) mostró que esta aproximación es aceptable para los eventos más grandes, p. ej. para la magnitud mayor que 6.

La siguiente tarea, similar a la tratada en el capítulo 4, es estudiar relaciones entre la energía mecánica W y la energía sísmica E . Seguimos con V y S elegidos en la forma mostrada en la figura 4. Escribiendo el primer término de (23) en forma de $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \tau_{ij}$, e integrando el esfuerzo inicial σ_{ij}^0 (independiente del tiempo), se obtiene

$$\begin{aligned} W = & \int_S \int_0^1 (\sigma_{ij}^0 + \tau_{ij}) \dot{u}_i v_j dt dS - \int_{\Sigma} \int_0^1 \sigma_{ij} [\dot{u}_i] v_j dt d\Sigma = \\ & \int_S \sigma_{ij}^0 u_i^1 v_j dS + \int_S \int_0^1 \tau_{ij} \dot{u}_i v_j dt dS - \int_{\Sigma} \int_0^1 \sigma_{ij} [\dot{u}_i] v_j dt d\Sigma \end{aligned} \quad (24)$$

Ahora ya ha aparecido la energía sísmica $E = - \int_S \int_0^1 \tau_{ij} \dot{u}_i v_j dt dS$ en la ecuación (24) en forma explícita. Además, el último término lo integraremos por partes. Así mismo, consideraremos que al comienzo del proceso estudiado no existe ninguna discontinuidad del desplazamiento, $[u_i^0] = 0$. Eso dará

$$W = -E + \int_S \sigma_{ij}^0 u_i^1 v_j dS - \int_{\Sigma} \sigma_{ij}^1 [u_i^1] v_j d\Sigma + \int_{\Sigma} \int_0^1 \sigma_{ij}^1 [u_i] v_j dt d\Sigma \quad (25)$$

Hemos llegado a una ecuación sumamente importante, generalizando la ecuación (13), $W = -E$, para el caso de un medio con esfuerzo inicial y con la falla. otra vez, es la ley de conservación de la energía mecánica. La ecuación (25) indica que la energía del volúmen V no cambia ($W = 0$) sólo cuan-

do el trabajo en la falla (o sea el flujo de energía a través de Σ , dentro de V) está compensado por el trabajo efectuado en S (es decir, el flujo de energía a través de S fuera de V). El flujo de energía fuera de V a través de S está compuesto de dos partes, E y $\int_S \dots dS$. Evidentemente, ambas partes se podrían reunir en un solo término. Tal término podría comprenderse e introducirse como una nueva definición de la energía sísmica. Pero, en la práctica, ésto no se hace porque los valores del desplazamiento final u_i^1 y los del esfuerzo inicial σ_{ij}^0 , que aparecen en $\int_S \dots dS$, usualmente no se conocen.

¿Y qué pasa en el caso especial de la superficie libre S , ya mencionado anteriormente? En tal caso desaparece no sólo E , sino también $\int_S \dots dS$, en tal situación la ecuación (25) nos proporciona una igualdad entre W y el trabajo en Σ . Estas son justamente las integrales $\int_{\Sigma} \dots d\Sigma$ en (25) las que podríamos llamar la *energía mecánica del terremoto*. Sin embargo, la relación $W = \int_{\Sigma} \dots d\Sigma$ no daría ninguna posibilidad de determinar $\int_{\Sigma} \dots d\Sigma$ porque tampoco conocemos W . Una conclusión parcial es que tal vía para estimar la energía del terremoto no es la correcta. Pero, ¿hay alguna otra?

Si volvemos a la ecuación (25), podemos ver que cualquier otra superficie S , que no sea libre, (es decir, una superficie dentro de la tierra, como se presenta en figura 4) nos da la posibilidad de medir el flujo correspondiente, o determinar E . (En lo que sigue veremos cómo hacerlo en la práctica, p. ej., en la llamada esfera focal.) Sin embargo, este procedimiento tampoco nos informará sobre el trabajo en Σ debido al valor desconocido de W en la ecuación (25). Una posible solución a este problema se muestra en el capítulo siguiente.

7. ENERGIA MECANICA Y SISMICA

Una vía de cómo emplear los valores de la energía sísmica E para conocer el trabajo en la falla, consiste en eliminar la desconocida energía W de nuestras fórmulas. Esto se puede hacer al combinar el análisis estático (22) con el dinámico (25), lo cual da:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij}^0 u_i^1 v_j dS + \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij}^1 u_i^1 v_j dS - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sigma_{ij}^0 [u_i^1] v_j d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sigma_{ij}^1 [u_i^1] v_j d\Sigma = \\ & - E + \int_S \sigma_{ij}^0 u_i^1 v_j dS - \int_{\Sigma} \sigma_{ij}^1 [u_i^1] v_j d\Sigma + \int_{\Sigma} \int_0^1 \dot{\sigma}_{ij} [u_i^1] v_j dt d\Sigma \end{aligned} \quad (26)$$

o sea

$$E = \frac{1}{2} \int_S (\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}^1) u_i^1 v_j dS + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}^1) [u_i^1] v_j d\Sigma + \int_{\Sigma} \int_0^1 \dot{\sigma}_{ij} [u_i^1] v_j dt d\Sigma \quad (27)$$

Ya que E representa algún flujo a través de S , y por tanto puede sumarse con la integral $\int_S \dots dS$ en la parte derecha de (27), toda la ecuación puede comprenderse como una igualdad entre dos flujos:

un flujo a través de S - un flujo a través de $\Sigma = 0$.

Quizás, este resultado parece un poco sorprendente, teniendo en cuenta que la ecuación (25) nos dice que

un flujo a través de S - un flujo a través de $\Sigma = W$.

Por supuesto, eso es sólo una contradicción aparente, porque los flujos tratados en las últimas ecuaciones simbólicas son flujos relacionados con cantidades diferentes. El flujo gracias al cual hemos eliminado W en (27) es el flujo relacionado con la diferencia entre los valores iniciales y finales del esfuerzo total, $\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij} = -\tau_{ij}$. Por la misma razón, el flujo a través de Σ en (27) es también diferente del flujo en (25), lo que significa que la denominada energía mecánica del terremoto, introducida en (25), tampoco se puede determinar a base de (27). No obstante, la ecuación (27) nos promete determinar, a partir de E, por lo menos la integral $\int_{\Sigma} (\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}) [u_i^1] v_j d\Sigma$, que, sin duda, también representa una característica importante de los procesos en la falla (quizás otra definición de la energía mecánica del terremoto).

Ahora, concentrémonos en la ecuación (27), con la finalidad de emplearla para determinar $\int_{\Sigma} \dots d\Sigma$ a partir de E. Primero, tenemos que volver nuevamente al problema de elegir la superficie S. Consideraremos tres posibilidades presentadas en la figura 6, señalándose por la 'distancia' diferente entre S y Σ .

El caso c) es un caso límite, en el que la superficie S coincide con la superficie terrestre, pero, sólo en el sentido geométrico, sin ser libre. Llamaremos a este caso la superficie terrestre *transparente*. Esto nos dá la posibilidad de trabajar con la superficie donde se registran los sismogramas, y, al mismo tiempo, ésto evita el caso inútil de $E = 0$. Para la realización práctica de la superficie transparente, basta saber cómo evaluar (con base a mediciones en la superficie real) el movimiento sísmico correspondiente a las ondas incidentes y reflejadas, utilizando luego para el cálculo del flujo sólo las ondas incidentes. Para más detalles véase el capítulo 10.

En otras palabras, en los tres casos incluidos en la figura 6, la superficie S tiene un flujo diferente de cero. Ahora nos concentraremos en el primer término de (27), escrito como $-\frac{1}{2} \int_S \tau_{ij}^1 u_i^1 v_j dS$. El desplazamiento final u_i^1 , relacionado con los efectos del campo cercano, decae con la distancia como r^{-2} . Empleando la ley de Hooke, lo mismo vale para τ_{ij} . Entonces, toda la función dentro de la integral $\int_S \dots dS$ disminuye como r^{-4} , y toda la integral como r^{-2} . El valor de $\int_S \dots dS$ por tanto depende de la posición actual de S (figuras 6a y 6b): $\int_{S1} \dots dS \neq \int_{S2} \dots dS$

Con relación a la integral que define E (véase la ecuación (12)), como hemos discutido en el capítulo 4, esa integral es independiente de la posición de S cuando el desplazamiento u_i , se considera en la aproximación del campo lejano. Justamente éste es el caso más típico en las determinaciones prácticas de E, y también el caso aceptado en nuestro tratamiento por de-

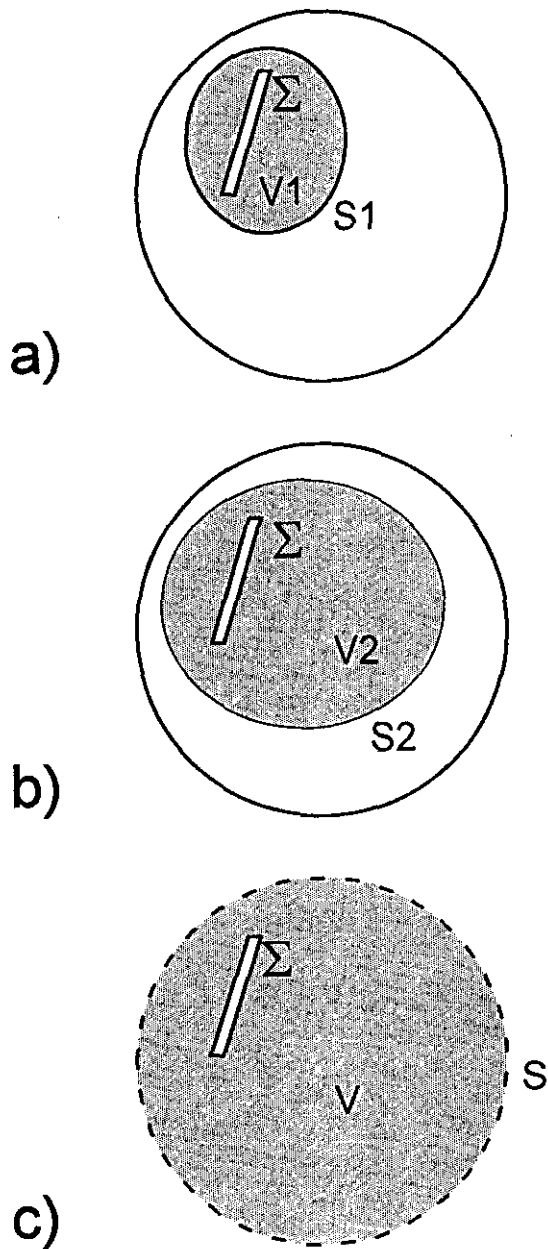


Figura 6. Tres ejemplos de la superficie S , para la cual se calcula el flujo de energía. Los tres casos difieren en la distancia entre S y Σ . El caso c) es la superficie terrestre 'transparente'. Esto es el caso que puede utilizarse en la práctica para los cálculos de la energía sísmica E .

finición. Por eso, dos opciones diferentes de S , S_1 y S_2 (figuras 6a,b), llevan a las energías iguales, $E_1 = E_2$. Ya que la integral $\int_{\Sigma} \dots d\Sigma$ no tiene por que ser dependiente de S , la ecuación (27) resulta en

$$E_1 = \int_{S_1} \dots dS + \int_{\Sigma} \dots d\Sigma + \int_{S_2} \dots dS + \int_{\Sigma} \dots d\Sigma = E_2 \quad (28)$$

o sea, $\int_{S_1} \dots dS = \int_{S_2} \dots dS$. Sin embargo, ésto es una contradicción con lo dicho arriba. La contradicción surge de nuestro tratamiento de E en la aproximación del campo lejano junto con la ecuación (27). En otras palabras, el tratamiento de E en el sentido del campo lejano, junto con la consideración de $\int_S \dots dS$ en (27), representa una violación de la conservación de energía. Hay dos salidas a esta situación:

a) Tratar E en su forma completa, sin despreciar los efectos del campo cercano. Queda claro, en tal caso, que el valor de E depende de la posición actual de S (Una pregunta surge inmediatamente: ¿Cómo elegir la posición de S ? Es decir, ¿cómo redefinir E ?). Además, cada tratamiento del campo cercano conlleva una complicación seria de todas las fórmulas. Por estas razones, esta vía no se utiliza en la práctica, todavía.

b) Tratar E en la aproximación del campo lejano y hacer lo mismo en la parte derecha de la ecuación (27), o sea, despreciar la integral $\int_S \dots dS$, es la vía más práctica.

Siguiendo el método (b), con E independiente de la posición particular de S , tenemos

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}) [u_i] v_j d\Sigma + \int_{\Sigma} \int_0^1 \dot{\sigma}_{ij} [u_i] v_j dt d\Sigma \quad (29)$$

La independencia de E respecto a S , no significa que S sea completamente arbitrario. Para despreciar el campo cercano la superficie S debe hallarse suficientemente lejos de Σ . Mejor dicho, a mayor distancia, más correcta es la ecuación (29). Desde este punto de vista nuevamente llegamos a la conclusión que una superficie terrestre transparente (figura 6c) sería muy útil para calcular E .

8. ENERGIA SISMICA Y PROCESOS EN LA FALLA

Supongamos que la energía sísmica ha sido ya determinada y mostramos cómo emplearla para estudiar los procesos sobre la falla a base de la ecuación (29). Una complicación seria surge del último término que contiene la derivada temporal del esfuerzo completo $\dot{\sigma}_{ij}$, normalmente desconocido. Afortunadamente, esta integral es despreciable respecto al resto de la ecuación, como mostró Kostrov y Das (1988, el capítulo 4.4), suponiendo los cambios no demasiado rápidos de σ_{ij} . La relación aproximada que resulta de (29) es

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}^1) [u^i] v_j d\Sigma \quad (30)$$

Esta ecuación ya sirve para un fin muy práctico, es decir, para relacionar E con la llamada caída de esfuerzos. Teniendo en cuenta que dentro de la integral se halla una cantidad escalar, ésta se puede representar en cualquier sistema de coordenadas sin perder generalidad o cambiar el resultado. Utilizaremos el sistema cartesiano con el tercer eje coincidiendo con la normal a la falla: $\vec{v} = (0, 0, 1)$. Para la cizalla pura $[\vec{u}] = \Delta u \vec{n}$, donde el vector unitario \vec{n} es perpendicular a \vec{v} , $\vec{n} = (1, 0, 0)$, llegamos a

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\sigma_{13}^0 - \sigma_{13}^1) [u^1] d\Sigma \quad (31)$$

Denotando (sin depender del sistema de coordenadas) el esfuerzo de cizalla por σ , la ecuación (31) se transforma en

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\sigma^0 - \sigma^1) [u^1] d\Sigma \quad (32)$$

Utilizando el valor promedio de $\sigma^0 - \sigma^1$ sobre la falla, es decir la llamada caída de esfuerzo $\Delta\sigma$, obtendremos

$$E = \frac{1}{2} \Delta\sigma \int_{\Sigma} [u^1] d\Sigma \quad (33)$$

Según (33) la energía sísmica E iguala al trabajo efectuado en la falla por la fuerza superficial de densidad $\frac{1}{2} \Delta\sigma$, en conexión con la fractura final $[u^1]$. En este sentido la energía sísmica está caracterizando directamente el proceso focal. La integral en (23) también puede escribirse a partir del momento sísmico escalar $M_0 = \int_{\Sigma} \mu \Delta u(\vec{\xi}, t_1) d\Sigma = \bar{\mu} \int_{\Sigma} [u^1] d\Sigma$.

$$E = \frac{1}{2} \Delta\sigma \frac{M_0}{\bar{\mu}} \quad (34)$$

Podemos ver que la energía sísmica depende del momento sísmico y de la caída del esfuerzo. Si la caída fuera la misma para todos los terremotos, E sería proporcional a M_0 , implicando, que en tal caso basta caracterizar los terremotos por sólo un parámetro, M_0 o E . Por esta razón vale la pena resumir aquí los resultados del estudio de la caída de esfuerzo y de sus variaciones de un terremoto a otro.

Un resultado sumamente importante desde este punto de vista, es la relación empírica establecida entre la dimensión característica de falla L (la llamada 'longitud' de falla, habitualmente determinada por la frecuencia de esquina), y el momento sísmico escalar M_0 . Para el rango ancho de M_0 el momento M_0 es proporcional a L^3 , véase p. ej. la figura 16 de Madariaga (1985). En la teoría de fracturas tal resultado también se ha encontrado. Por ejemplo, para las fallas homogéneas circulares, de cizalla pura, y en régimen estático, la relación viene dada por $M_0 = \frac{16}{7} \Delta\sigma L^3$. En otras palabras, el papel de la

constante de proporcionalidad lo juega $\Delta\sigma$. Para terremotos, esto quiere decir que la proporcionalidad entre M_0 y L^3 implica que $\Delta\sigma$ es constante. En otras palabras, dado que la relación entre M_0 y L^3 tiene alguna dispersión, implica que $\Delta\sigma$ se encuentra entre límites relativamente estrechos (de 1 a 10 MPa) para terremotos grandes ($M_0 > 10^{18}$ Nm). Desde este punto de vista parece inútil estudiar dos parámetros de cada terremoto, E y M_0 , es decir, parece suficiente sólo uno de ellos (o la magnitud; véase el capítulo siguiente). Sin embargo, en realidad la proporcionalidad entre M_0 y L^3 debe entenderse como un resultado 'suavizado', o general. Si estamos estudiando terremotos de las regiones tectónicas estables, como un grupo, y los de regiones tectónicas jóvenes como otro, se observan diferencias sistemáticas entre ellas (mayores valores de $\Delta\sigma$ para las regiones estables). Así mismo, si extendemos el rango de M_0 a eventos menos fuertes, $\Delta\sigma$ tampoco resulta constante. Desde este punto de vista más detallado podemos decir que la caída de esfuerzo $\Delta\sigma$ no es una constante universal, implicando por tanto la independencia de E y M_0 .

9. ENERGIA SISMICA Y MAGNITUD

En este momento sólo analizaremos el caso simplificado de E dependiente de M_0 (arriba discutido). Supongamos que tiene lugar la ecuación (34)

$$E = \frac{1}{2} \Delta\sigma \frac{M_0}{\bar{\mu}} \quad (35)$$

con $\Delta\sigma$ encontrándose en el intervalo de 1 a 10 MPa. Mostraremos cómo en tal caso el tamaño del terremoto puede caracterizarse con sólo un parámetro, la magnitud M. Un resultado empírico bien conocido (según Gutenberg y Richter) dice que la energía sísmica E (en J) y la magnitud de ondas superficiales M están relacionadas por

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5M \quad (36)$$

Esta relación ha sido establecida por regresión estadística de terremotos para los cuáles se determinaron ambos parámetros, E y M. Ella suele emplearse en la práctica para computar E si a partir del sismograma se determinó sólo M

Supongamos un valor razonable de $\bar{\mu}$, p. ej., $\bar{\mu} = 5 \cdot 10^5$ Pa. A partir de (35) tenemos que

$$E = (1 \div 10) 10^{-5} M_0 \quad (37)$$

o sea

$$\log_{10} E = (-4 \div -5) + \log_{10} M_0 = -4.5 + \quad (38)$$

Esta relación, junto con (36), muestra que la magnitud es proporcional al logaritmo del momento:

$$M = 0.67 \log_{10} M_0 - 6.2 \quad (39)$$

Sin embargo, para terremotos muy grandes la escala de M se satura (Udías 1989), y por tanto, la magnitud M pierde su significado, quedándose en los valores cercanos a 8 independientemente del tamaño del terremoto. ¿De qué sirve la ecuación (39) en tal caso? Esa ecuación sirve para definir una nueva cantidad, denotada habitualmente por M_w y llamada la magnitud de momento. En otras palabras, teniendo un valor de M_0 , calculamos M_w , evitando por tanto la saturación. (Es decir, aumentando M_0 , aumenta también M_w) Hanks y Kanamori (1979) definieron M_w por la relación similar a (39):

$$M_w = 0.67 \log_{10} M_0 - 6.03 \quad (40)$$

De esta manera M_w sirve para cuantificar el tamaño de terremotos, incluso los muy grandes. Como ejemplo, comparemos los terremotos de California 1906 y Chile 1960, iguales desde el punto de vista de la magnitud saturada, $M=8.3$, pero sustancialmente diferentes a partir de $M_w=8$ y 9.5, respectivamente. Hay que recalcar que la escala de M_w se ha introducido por (35), empleando la simplificación de $\Delta\sigma$ constante (es decir, E proporcional a M_0). En el capítulo siguiente volveremos al caso más realístico de E independiente de M_0 .

10. PRINCIPIOS DE DETERMINACION DE LA ENERGIA SISMICA

En los capítulos precedentes hemos discutido el significado físico de la energía sísmica E . Hemos concluido que E puede servir para mejorar la clasificación de terremotos, formando, con M_0 , un par de cantidades independientes. E y M_0 tienen una relación estrecha con los procesos en la falla, sobre todo con la caída de esfuerzos. Ahora hay que mostrar cómo determinar E a partir de los sismogramas, o sea cómo 'medir E '.

Nuestro punto de partida es la definición (12), que dice que

$$E = - \int_S \int_0^1 \tau_{ij} \dot{u}_i v_j \, dt dS \quad (41)$$

Comenzaremos por representar la densidad del flujo de potencia $\tau_{ij} \dot{u}_i v_j$ por el desplazamiento. Ya que la función integrada es un escalar, independiente del sistema de coordenadas, vamos a utilizar el sistema local. En cada punto de la superficie S ese sistema cartesiano tiene sus ejes x_1, x_2, x_3 ele-

gidos de tal manera que el eje X_3 coincide con la normal local: $\vec{v} = (0, 0, 1)$; véase figura 7a. Ahora, como ya hemos decidido antes, utilizaremos la aproximación del campo lejano. Eso nos permite estudiar separadamente las ondas P y S. Para simplificar, supongamos en este momento sólo la onda P incidente perpendicularmente a la superficie S (figura 7b): $\vec{u}^P = u^P \vec{v} = (0, 0, u^P)$. Por tanto, $\tau_{ij} \dot{u}_i^P v_j = \tau_{33} \dot{u}^P$, donde $\tau_{33} = (\lambda + 2\mu) \epsilon_{33} = \alpha^2 \rho \partial u^P / \partial x_3$. En el campo lejano la onda P tiene, localmente, el carácter de una onda plana, $u^P = u^P(t - x_3/\alpha)$. Entonces, $\partial u^P / \partial x_3 = -(1/\alpha) u^P$, y finalmente

$$\tau_{ij} \dot{u}_i^P v_j = \alpha \rho (\dot{u}^P)^2 \quad (42)$$

Ya que en ésta fórmula se ha descrito la densidad superficial del flujo perpendicular a S, entonces una onda incidente con un ángulo $\theta \neq 0$ respecto a la normal (figura 7c), tiene su densidad en S representada por la proyección: $-\alpha \rho (\dot{u}^P)^2 \cos \theta$. Entonces, la energía sísmica de la onda P viene dada por

$$E^P = \int_S \int_0^1 \alpha \rho (\dot{u}^P)^2 \cos \theta \, dt dS \quad (43)$$

Notaremos que para el flujo fuera de V la energía E es siempre positiva, lo que nuevamente da verificación al signo '-' en la definición (12). De igual manera puede representarse la energía de las ondas S, que da la energía completa en forma de

$$E = \int_S \int_0^1 (\alpha \rho (\dot{u}^P)^2 + \beta \rho (\dot{u}^S)^2) \cos \theta \, dt dS \quad (44)$$

Aunque ya la ecuación (44) en principio permite determinar la energía E a partir de mediciones sísmicas en la superficie terrestre, la realización práctica de esto no es fácil. Seguidamente se mencionarán las complicaciones más serias.

a) La superficie S, introducida en el capítulo 7 (figura 6c), es una superficie terrestre transparente. Es decir, el u^P en la expresión (43) no es el desplazamiento completo de la onda P, sino el desplazamiento correspondiente a la onda incidente a la superficie por debajo. La onda incidente puede calcularse a partir de los llamados coeficientes de conversión (Cerveny et al., 1977). Ese procedimiento se llama la corrección respecto a la superficie libre.

b) En todo nuestro tratamiento de la energía hemos despreciado transformaciones de la energía mecánica en otros tipos, p. ej. en la energía térmica. Sin embargo, los desplazamientos medidos en la superficie están influenciados por tales transformaciones, conocidas como atenuación, o amortiguamiento de las ondas sísmicas. Si nos interesa sólo el flujo actual a través de S, basta utilizar los desplazamientos medidos, sin correcciones. Claro está que un flujo de este tipo, calculado en la superficie transparente

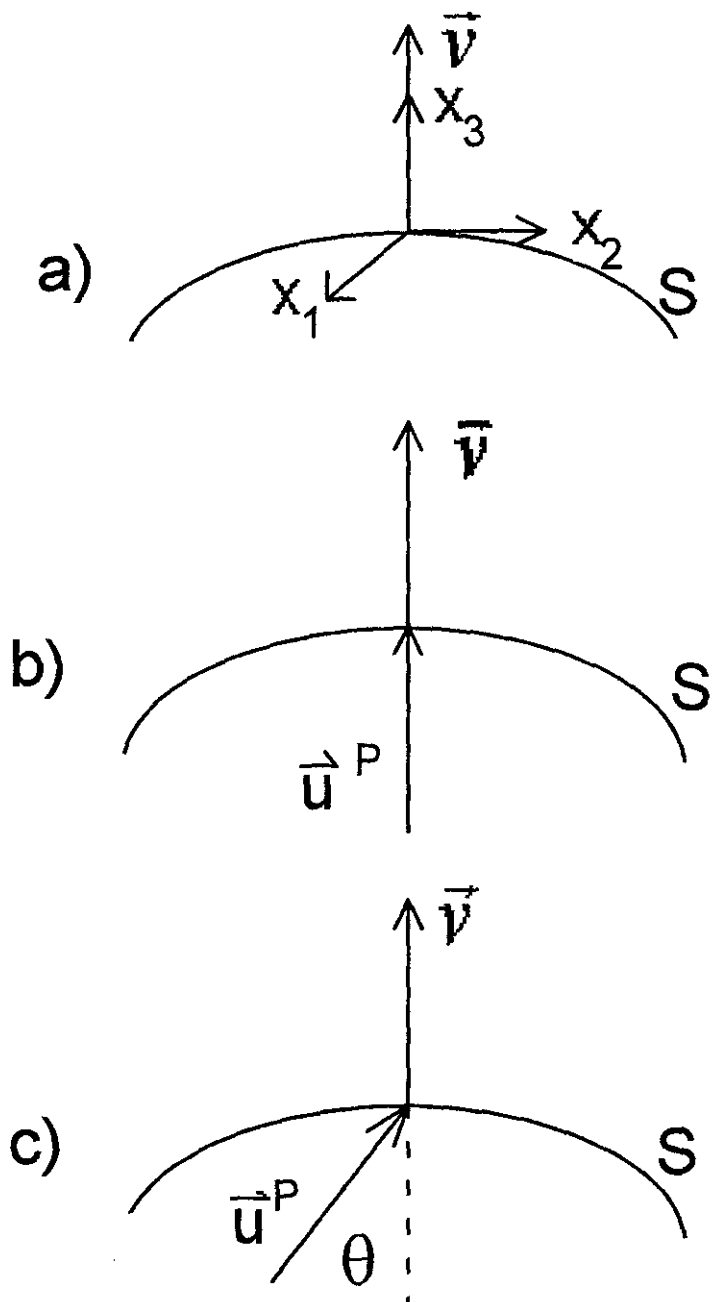


Figura 7. Una superficie S , su normal \vec{v} , el sistema local de coordenadas, y el vector de desplazamiento de la onda P .

de la Tierra, sería menor que el flujo a través de otra superficie que se encuentre más cerca de la fuente. Además, utilizando los desplazamientos reales afectados por la atenuación, no puede emplearse la ecuación (34) para estimaciones de la caída de esfuerzo $\Delta\sigma$, porque esa ecuación fue obtenida sin considerar la atenuación. Resumiendo, llegamos a la conclusión que u^p en (43) debe entenderse como el desplazamiento corregido por la atenuación. Hay muchos métodos que pueden emplearse para este fin. El método (aproximado) más sencillo es multiplicar el desplazamiento medido por el factor exponencial, $\exp(\pi f t_p / Q_p)$, donde t_p es el tiempo de recorrido desde Σ hasta la superficie S , f la frecuencia predominante, y Q_p representa el llamado factor de calidad de las ondas P. Ya que Q_p depende de la profundidad de manera poco conocida una corrección aún más conveniente será $\exp(\pi f t^*)$, donde t^* , la integral de $1/(\alpha Q_p)$ a lo largo de la trayectoria, varía relativamente poco en la tierra.

c) El desplazamiento ocurrido en la ecuación (43) es el movimiento del terreno. Es decir, se obtiene desde los desplazamientos medidos sólo después de la *corrección instrumental*. Sin embargo, tal corrección es, en general, bastante difícil. Esto se refiere sobre todo a las frecuencias poco amplificadas por el instrumento, p. ej. $f \rightarrow 0$. Por otro lado, los aparatos modernos proporcionan los registros proporcionales al movimiento del terreno en una banda de frecuencias bastante ancha. Por lo tanto, la corrección instrumental no es siempre necesaria. (Nótese que, para las distancias epicentrales cortas, de unas docenas de kilómetros, una banda 'suficientemente ancha' puede ser del orden de $1 \div 30$ Hz, mientras que para las distancias telesísmicas puede ser en el rango de $0.001 \div 0.2$ Hz.

d) El cómputo de la energía E^p mediante (43) se efectúa por una integración sobre una superficie y , por tanto, necesita en principio una buena cobertura de S , realizada por las observaciones de muchas estaciones sísmicas. Este requerimiento surge del hecho de que la radiación sísmica no es igual en todas direcciones. Dos factores contribuyen a la desigualdad espacial de la radiación: el mecanismo focal (descrito por el bien conocido patrón de radiación) y las dimensiones finitas del foco (la llamada directividad, similar al efecto de Doppler). Mientras que el primer factor tiene lugar siempre, el segundo importa más, cuanto menor es la longitud de onda respecto de la falla. Si estamos interesado por varias razones prácticas en las ondas relativamente largas, $\lambda \gg L$, la directividad debida a la dimensión finita de la falla se puede despreciar. otro punto de vista (más práctico) es despreciar la directividad, porque el cómputo sin directividad es menos complicado, y entender el resultado como una aproximación que es mejor cuanto más larga es la longitud de onda. La complicación más seria es el desconocimiento de la dirección en que se propaga la fractura así como de su velocidad. (Nótese, que en general, la dirección de propagación de la fractura no tiene nada en común con el deslizamiento en la falla, o sea con el vector unitario $[\vec{u}] / \Delta u \approx \vec{n}$ obtenido a partir del análisis del meca-

nismo focal.) Existe un solo caso donde no tenemos que interesarnos por la dirección de propagación de la fractura: el caso de terremotos débiles. Estos a menudo permiten una modelización a base de una falla circular, sin dirección preferida de la propagación de fractura (la fractura está propagándose radialmente).

Debido a la variabilidad espacial de la radiación sísmica (el patrón de radiación y la directividad, arriba mencionados) es bastante conveniente incluir de forma explícita dicha variabilidad en la ecuación (43). De este modo se logrará reducir sustancialmente el requerimiento de una densa cobertura de la superficie S por medio de observaciones.

11. DETERMINACION DE LA ENERGIA SISMICA A PARTIR DE UNA ESTACION

Mostraremos que el número de observaciones necesarias en S para calcular E se puede reducir en principio hasta una estación. Por supuesto, esto no quiere decir que en la práctica nos satisface una sola medición, sino que las mediciones de muchas estaciones se hacen independientemente. Si además estamos en posición de evaluar los errores de cada una, todas se pueden procesar por los métodos estadísticos para obtener el valor resultante de E . Por ejemplo, es claro que las estaciones que se hallan cerca de los planos nodales tienen poca fiabilidad. Igualmente problemáticas son las observaciones cerca de los llamados ángulos críticos de los coeficientes de conversión de las ondas S (Cerveny et al., 1977). Hay también otros requerimientos respecto al número relativamente grande de estaciones, que se refieren a la localización del sismo, y determinación de su mecanismo focal. La localización así como el mecanismo, se necesitan con alta exactitud en la determinación de la energía sísmica.

En lo que sigue en este capítulo supondremos los terremotos de cizalladura pura. El tratamiento se basará en el concepto de la llamada esfera focal. Este es el concepto conocido desde los métodos de determinación del mecanismo focal. Vamos a discutirlo un poco más porque a veces el mismo concepto crea dudas. Por la esfera focal se comprende una esfera homogénea por dentro (λ_0, μ_0, ρ_0) con su centro en el hipocentro, y teniendo el radio pequeño, pero finito, r_0 . El tamaño actual de r_0 no es de importancia ya que, como veremos adelante, su valor desaparece en las fórmulas resultantes. Por este motivo a veces se le llama la esfera de 'radio unitario', o mejor, se habla sólo sobre la integración por dos ángulos esféricos Θ, Φ .

¿Cuáles son los problemas, a menudo poco entendidos, en relación con la esfera focal? Este concepto conlleva dudas si no es contradictorio respecto del pequeño radio de la esfera focal y los grandes tamaños de los focos reales. También aparece oscuro cómo se combina el pequeño radio de la esfera focal con la suposición del campo lejano. Mostraremos que ni los

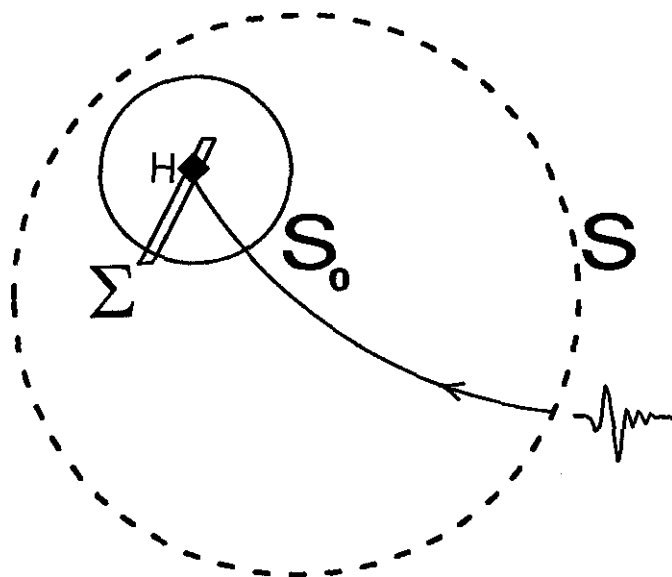


Figura 8. La esfera focal S_0 con su centro en el hipocentro H . Se muestra de forma esquemática que las observaciones sísmicas se proyectan desde la superficie terrestre ('transparente') S sobre S_0 , a lo largo de los rayos.

tamaños finitos ni la consideración del campo lejano son contradictorios con el empleo de la esfera focal.

Un ejemplo de la esfera focal S_0 , con su centro en el hipocentro H se representa en la figura 8. Las observaciones sísmicas se proyectan desde la superficie terrestre sobre S_0 . En este procedimiento, efectuado a base de la teoría de rayos, puede tomarse en cuenta la conocida estructura heterogénea de la Tierra, incluso no sólo las velocidades variables y discontinuas, sino también la atenuación y la presencia de la superficie libre (véase el concepto arriba mencionado de la superficie transparente). El uso de la aproximación del campo lejano es fundamental en este procedimiento de proyección. Por supuesto, se proyectan de ese modo las mediciones del desplazamiento real en la Tierra, que contienen algunos efectos del campo cercano. Se procesan a partir de las fórmulas de la teoría de rayos que (en la llamada aproximación nula) desprecian estos efectos. Así mismo, el campo real de las ondas sísmicas está influenciado siempre por el tamaño finito de la falla. Proyectando las mediciones a la esfera focal, pueden emplearse las fórmulas de diversos tipos que más o menos tienen este tamaño finito en cuenta.

El procedimiento bastante complicado de la proyección se justifica por las sencillas fórmulas resultantes. Suponiendo que las mediciones ya se conocen en S_0 , no importa ahora si éstos son los valores proyectados desde la

superficie terrestre, o valores obtenidos al propagar las ondas a S_0 'por dentro'. Lo último por supuesto es formalmente más fácil debido a la homogeneidad de la esfera focal. Según Aki y Richards (1980), trabajando con el valor absoluto del vector de desplazamiento $[\vec{u}] = u$, y con su derivada temporal \dot{u} , tenemos que

$$\dot{u}^P = \frac{\mu_0}{4\pi\rho_0\alpha_0^3} \frac{F^P}{r_0} \int_{\Sigma} \Delta\dot{u}(\vec{\xi}; t - \frac{r(\vec{\xi})}{\alpha_0}) d\Sigma \quad (45)$$

donde la llamada función temporal del foco viene dada por

$$\Omega^P = \int_{\Sigma} \Delta\dot{u}(\vec{\xi}; t - \frac{r(\vec{\xi})}{\alpha}) d\Sigma \quad (46)$$

Esta función depende en general de dos ángulos esféricos Θ, Φ debido al tamaño finito de la falla (véase la directividad mencionada arriba). Por esta misma razón, la función análoga para las ondas S, Ω^S , no iguala a Ω^P . Expresando el elemento superficial en un sistema de coordenadas esféricas como $r_0^2 \sin\Theta d\Theta d\Phi$, y siguiendo la ecuación (44), tenemos finalmente que

$$E = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2\rho_0 r_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{(F^P)^2}{\alpha_0^3} \int_0^1 (\Omega^P)^2 dt + \frac{(F^S)^2}{\beta_0^3} \int_0^1 (\Omega^S)^2 dt \right) r_0^2 \sin\Theta d\Theta d\Phi \quad (47)$$

Si denotaremos

$$\psi^P = \int_0^1 (\Omega^P)^2 dt, \quad \psi^S = \int_0^1 (\Omega^S)^2 dt, \quad (48)$$

la ecuación (47) se transforma a

$$E = \frac{\mu_0^2}{(4\pi)^2\rho_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{(F^P)^2}{\alpha_0^3} \psi^P + \frac{(F^S)^2}{\beta_0^3} \psi^S \right) \sin\Theta d\Theta d\Phi \quad (49)$$

Es evidente que nos acercamos a nuestro objetivo en el sentido que la ecuación (49) ya contiene la dependencia espacial de la radiación debida

al mecanismo focal, incluida en forma *explícita* mediante los patrones de radiación F. El siguiente procedimiento depende de nuestra opción si despreciamos la directividad debida al tamaño finito de la falla, o no.

11.1. Despreciando el tamaño finito de la falla

Si estamos interesados en ondas cuya longitud es mucho más grande respecto a la falla, $\lambda \gg L$, la distancia r en la integral en (46) puede sustituirse por un valor de referencia r_0 , y por tanto la función Ω^p pierde totalmente su variación angular. Por la misma razón tiene lugar $\Omega^p(t+r_0/\alpha) = \Omega^s(t+r_0/\beta)$, diciendo que la forma de ambas funciones temporales para las ondas P y S es igual. Por lo mismo tenemos también $\psi^p = \psi^s$. Entonces la ecuación (49) se transforma en

$$E = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 \rho_0} \psi^p \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{(F^p)^2}{\alpha_0^2} + \frac{(F^s)^2}{\beta_0^2} \right) \sin\Theta d\Theta d\Phi \quad (50)$$

Introduciendo los valores promedios espaciales $\langle \dots \rangle$, es decir, los promedios sobre todos los Θ y Φ , designados por $\langle (F^p)^2 \rangle$ y $\langle (F^s)^2 \rangle$ llegamos a

$$E = \frac{\mu_0^2}{4\pi\rho_0} \langle (F^p)^2 \rangle + \frac{\mu_0^2}{4\pi\rho_0} \langle (F^s)^2 \rangle - \frac{\mu_0^2}{\beta_0^2} = E^p + E^s \quad (51)$$

La energía sísmica se descompone en energías de las ondas P y S, los cuales, a partir de $\psi^p = \psi^s$, vienen proporcionales una a la otra:

$$\frac{E^s}{E^p} = \frac{\langle (F^s)^2 \rangle \alpha_0^2}{\langle (F^p)^2 \rangle \beta_0^2} = q \quad (52)$$

La constante de proporcionalidad q depende de la razón de las velocidades de P y S, α_0/β_0 y de los valores promedios de los patrones de radiación. Con $\langle (F^p)^2 \rangle = 4/15$, y $\langle (F^s)^2 \rangle = 2/5$, y suponiendo que $\alpha_0/\beta_0 = \sqrt{3}$, la ecuación da el valor aproximado de $q = 20$. En otras palabras, una fuente puntual de cizalla está radiando las ondas S con la energía 20 veces más grande que P. Finalmente tenemos

$$E = E^p + qE^p = E^p(1 + q) \quad (53)$$

La ecuación (53) sugiere que para determinar E , es suficiente determinar E^p , que a partir de (51) viene dado por

$$E^p = \frac{\mu_0^2}{4\pi\rho_0\alpha_0^3} = \langle (F^p)^2 \rangle \psi^p \quad (54)$$

Aquí, ya se muestra que el radio de la esfera focal no tiene ningún significado físico, es decir que el resultado no depende de un valor definido de r_0 , ya que r_0 no aparece en (54). La energía ha sido representada por el valor de $\psi^p = \int f(\Omega^p)^2 dt$ independiente de los ángulos esféricos. En otras palabras se ha demostrado que la integral $\int f(\Omega^p)^2 dt$ es de importancia fundamental para las determinaciones de E . (Nótese que una integral similar, la de $\int \Omega^p dt$, es de igual importancia para la determinación del momento sísmico escalar M_0 .)

En las ecuaciones (47)-(54) se comprobó que la determinación de la energía sísmica es sumamente fácil si se conoce la función temporal del terremoto, $\Omega(t)$. En la práctica, no es necesario añadir ninguna corrección a estas ecuaciones. Claro que esta simplicidad tiene su contraparte en todas las complicaciones (mencionadas en los puntos a-d del capítulo 10) con las cuales debe contarse en la determinación práctica de $\Omega(t)$.

Probablemente por esta razón también continúa el interés en los métodos que no necesitan la determinación de $\Omega(t)$. (La situación es análoga a la determinación de la dimensión de falla, L . La determinación más exacta de L es a base de $\Omega(t)$, pero, suelen utilizarse aún métodos menos exactos y más fáciles a partir de la frecuencia de esquina.) Con el fin de determinar E sin conocer Ω tenemos que introducir en la expresión para E las cantidades relacionadas con los desplazamientos medidos en la superficie de tierra. El valor absoluto del desplazamiento para un punto de observación en la superficie libre de la tierra no homogénea se puede escribir de forma

$$u^p = \frac{\mu_0}{4\pi\rho_0\alpha_0^3} \frac{\rho_0\alpha_0}{\rho_1\alpha_1} \frac{F^p(\Theta, \Phi)}{\Gamma} \Omega^p(\Theta, \Phi) \quad (55)$$

Esto es la aproximación del campo lejano y de la fuente puntual. Las constantes α_1, ρ_1 se refieren al medio bajo la superficie. Esas constantes han aparecido en la ecuación (55) por razones puramente formales, que se aclararán a continuación. Resulta sumamente importante el término designado por (Γ) que describe los efectos de heterogeneidad (el coeficiente de la expansión geométrica, los coeficientes de reflexión y transmisión en las discontinuidades internas), el efecto de la superficie libre (los coeficientes de conversión), así

como la atenuación. El cómputo de Γ se realiza mediante los programas a base de la teoría de rayos. El desplazamiento u^p en la ecuación (55) se entiende como el movimiento del terreno, sin efectos del instrumento, o el registro corregido por el instrumento. Se supone también que u^p es el desplazamiento correspondiente a una onda P (un rayo) solamente, es decir la onda 'directa'. Sin embargo, lo que realmente se registra al inicio del sismograma habitualmente no es sólo la onda directa P, sino una superposición de más fases, p. ej. P + pP + sP. Este hecho importante no se puede tomar en cuenta a partir de la ecuación (55) sin emplear términos adicionales con F^{pp} , F^{sp} , Ω^{pp} y Ω^{sp} . Para una generalización, véase el capítulo 12. Por tanto, lo que sigue con sólo la onda directa es una aproximación.

Utilizando (55) para computar ψ^p , y sustituyendo en (54), obtendremos

$$\psi^p = \frac{(4\pi)^2 \rho_0 \alpha_0^3}{\mu_0^3} \rho_1 \alpha_1 \frac{\Gamma^2}{(F^p)^2} \int_0^1 (\dot{u}^p)^2 dt \quad (56)$$

$$E^p = \rho_1 \alpha_1 \frac{\int_0^1 (\dot{u}^p)^2 dt}{(F^p)^2} 4\pi \Gamma^2 \frac{\langle (F^p)^2 \rangle}{(F^p)^2} \quad (57)$$

Como se puede ver en el presente método de determinación de EP según (57), la única cantidad que debe obtenerse a partir de los sismogramas es $\int (\dot{u}^p)^2 dt$. Esta se puede medir en una estación. En este sentido, hemos llegado a una solución práctica, bastante sencilla.

El significado físico de la ecuación (57) se comprende mejor en un caso simplificado (no realista), esto es, para un modelo de la tierra homogénea sin absorción, con la superficie transparente y, además, con un foco sísmico situado en su centro. En tal caso $\alpha_0 = \alpha_1$, $\rho_0 = \rho_1$, $\Gamma = R$ (donde R denota el radio de la tierra), y

$$E^p = \rho_1 \alpha_1 \int_0^1 (\dot{u}^p)^2 dt 4\pi R^2 \frac{\langle (F^p)^2 \rangle}{(F^p)^2} \quad (58)$$

La ecuación (58) dice que la energía de ondas P viene dada por el producto de tres factores: la densidad local de la energía $\rho_1 \alpha_1 \int_0^1 (\dot{u}^p)^2 dt$, la superficie de la esfera $4\pi R^2$, y el factor que está corrigiendo la densidad local respecto al mecanismo focal del terremoto $\langle (F^p)^2 \rangle / (F^p)^2$. (Nótese que justamente aquí necesitamos α_1 , ρ_1 incluido formalmente en (55), para dar una interpretación simple al primer término de (58).)

El significado físico de la ecuación (57) es igualmente claro. Sin embargo, siendo más realista, la ecuación (57) es un poco más complicada. Como ya hemos dicho, el término Γ es de gran importancia. Es de interés ver su interpretación física; Ya que los valores de E^p en la superficie de la esfera focal S_0 (con $\Gamma = r_0$) y en la superficie transparente de tierra S son iguales, podemos escribir a partir de (57) para una dirección arbitraria Θ, Φ (es decir, para un rayo) que

$$\frac{\epsilon_s \Gamma^2}{\epsilon_{s_0} r_0^2} = 1 \quad (59)$$

donde ϵ_s y ϵ_{s_0} denotan los términos $\rho \alpha \int_0^1 (\dot{u}^p)^2 dt$ en S y en S_0 , respectivamente. Esta ecuación también puede comprenderse como la definición de Γ .

11.2. Tomando en cuenta el tamaño finito de la falla

Este caso se señala por una mayor complejidad. Sin embargo, nuevamente podemos partir desde la ecuación (49):

$$E = \frac{\mu_0^2}{(4\pi)^2 \rho_0} \psi_0 \quad (60)$$

$$E = \left(\frac{(F^p)^2}{\alpha_0^2} \psi^p + \frac{(F^s)^2}{\beta_0^2} \psi^s \right) \sin \Theta d\Theta d\Phi \quad (61)$$

Aquí hemos introducido una nueva denotación ψ_0 , mientras que los ψ^p y ψ^s tienen la misma definición que se les dió anteriormente. Sin embargo, ahora los ψ^p y ψ^s son dependientes de los ángulos esféricos, y $\psi^p(\Theta, \Phi)$ es diferente a $\psi^s(\Theta, \Phi)$, reflejando los efectos de la propagación de fractura para las longitudes de onda comparables o menores que la longitud de la falla, $\lambda \leq L$.

A pesar de que la ecuación (60) ya ha tomado en cuenta todo lo necesario para computar la energía, su uso es bastante difícil. La dificultad está en que para emplear (60) se necesita el conocimiento completo de la dependencia espacial de dos funciones diferentes, $\Omega^p(\Theta, \Phi)$ y $\Omega^s(\Theta, \Phi)$. Sin embargo, el último requerimiento no indispensable necesita muchas mediciones. Mostraremos cómo emplear, con fines prácticos, unas pocas mediciones compensadas con más modelado teórico. Combinando las ecuaciones (60) y (56) llegamos a

$$E = \frac{\alpha_0^2 \rho_1 \alpha_1 \Gamma^2}{(F^p)^2} \int_0^1 (\dot{u}^p)^2 dt \frac{\psi_0}{\psi^p} \quad (62)$$

que puede representarse de manera artificial como

$$E = E^p(\text{sin directividad}) \frac{\psi_0}{\psi^p} \frac{\alpha_0^2}{4\pi < (F^p)^2 >} \quad (63)$$

Aquí E^p tiene el significado físico de la energía de ondas P evaluada sin tomar en cuenta la directividad (expresada por (57)). La razón de E/E^p , proporcional a ψ_0/ψ^p véase (63), fue estudiado por Boatwright (1980) para fallas circulares, quien ha mostrado que esa función espacial es bastante simple y suave. Entonces, en modelización de terremotos débiles por las fuentes circulares la energía E puede computarse a base de la ecuación (63) sin problemas, y la única cantidad que debe determinarse a partir de sísmogramas es (de nuevo) la densidad local de la energía $\alpha_1 \rho_1 \int_0^1 (\dot{u}^p)^2 dt$ medida (perpendicular al rayo) en una estación.

Por otro lado, para terremotos fuertes, que no permiten modelización por medio de una falla circular, la determinación de la función ψ_0/ψ^p es difícil. Aplicando (63) en la práctica, tenemos que suponer algún modelo de falla finita (incluso alguna dirección de propagación de fractura, etc.), y computar Ω^p y Ω^s , que resultará en las requeridas funciones ψ^p , ψ^s y en la requerida razón ψ_0/ψ^p . Por supuesto, tal aceptación de 'algún modelo' de falla es bastante difícil, o peligroso, porque, sin conocimiento de $\Omega^p(t, \Theta, \Phi)$, $\Omega^s(t, \Theta, \Phi)$, el modelo no se puede verificar. (De nuevo hay que recalcar la semejanza con las evaluaciones de L : La estimación de L a partir de la frecuencia de esquina equivale al uso de alguna fórmula que implícitamente refleja un sólo modelo de la fuente, sin posibilidad de verificarla durante su aplicación.) Claro que por estas razones el presente método (a base de (63)) es de uso limitado. Concluimos que para la determinación de la energía que cuente correctamente con el tamaño finito de la falla el conocimiento de $\Omega^p(t, \Theta, \Phi)$, $\Omega^s(t, \Theta, \Phi)$, no se puede evitar, lo cual nos lleva atrás al método más complejo descrito por las ecuaciones (60) y (61).

12. ENERGIA SISMICA Y TENSOR MOMENTO SISMICO

En los capítulos precedentes hemos discutido varios métodos para determinar la energía sísmica bajo suposición de la cizalladura pura, es decir, $[\vec{u}]$ perpendicular a \vec{v} . El tamaño del sismo ha sido representado por el mo-

mento sísmico escalar M_0 . El mecanismo focal ha sido descrito por los patrones de radiación $F^p(\Theta, \Phi)$, $F^s(\Theta, \Phi)$, relacionados con los vectores $[\vec{u}]$ y \vec{v} en un sólo punto, el hipocentro. La función temporal ha sido expresada por $\Omega^p(t, \Theta, \Phi)$ y $\Omega^s(t, \Theta, \Phi)$, tomando en cuenta su directividad debida a las dimensiones finitas de la falla, o no.

En realidad, durante los terremotos los vectores $[\vec{u}]$ y \vec{v} hay que comprenderles como funciones de posición en la falla. El deslizamiento $[\vec{u}]$ varía por causa de la heterogeneidad de la falla. Así mismo, ya que la superficie de falla Σ no es siempre plana, la normal \vec{v} también varía. Y además, $[\vec{u}]$ no tiene por qué ser perpendicular a \vec{v} , en general. Por éste motivo la descripción de un terremoto por el momento sísmico escalar M_0 , los patrones de radiación $F^p(\Theta, \Phi)$, $F^s(\Theta, \Phi)$, y las funciones temporales Ω^p , Ω^s necesitan una generalización.

Esto nos lleva al uso del llamado tensor momento sísmico M_{pq} (Udías, 1985), y su función temporal $M_{pq}(t)$, relacionados por $M_{pq} = M_{pq}(t_1)$. Existen diversos métodos para determinar los M_{pq} y $M_{pq}(t)$ a partir de sismogramas, o sus espectros, en una red de estaciones (por lo menos 2 estaciones, cada una de tres componentes, para determinar 6 componentes independientes de estos tensores simétricos). El principio de estos métodos se verá más adelante en la ecuación (64). Las dificultades prácticas de estos métodos son similares a las mencionadas anteriormente en relación con $\Omega(t)$. Sin embargo hay que mencionar una diferencia sustancial entre $\Omega(t)$ y $M_{pq}(t)$: $M_{pq}(t)$ es una función siempre definida en la aproximación del foco puntual.

Por tanto, $M_{pq}(t)$ es siempre independiente de Θ, Φ a diferencia de $\Omega(t, \Theta, \Phi)$ que depende de Θ, Φ en general. Aunque pareciera que, desde este punto de vista, el uso de $M_{pq}(t)$ es similar al uso de $\Omega(t)$ sin directividad, eso no es así. El concepto del tensor momento sísmico, a pesar de ser una aproximación puntual, es mejor respecto al caso de $\Omega(t)$ sin directividad. Eso es porque M_{pq} incluye la información sobre $[\vec{u}]$ y \vec{v} no sólo de un punto concreto de la falla (el hipocentro) sino de un punto en sentido promedio. Si los vectores reales $[\vec{u}]$ y \vec{v} varían sobre la superficie de la falla, pues incluso $[\vec{u}]$ no es perpendicular a \vec{v} , el tensor M_{pq} representa esta variabilidad en el sentido del promedio sobre la falla Σ . Esta propiedad de M_{pq} y $M_{pq}(t)$ se refleja también en el hecho que éstos tensores se calculan siempre a partir de unas porciones relativamente largas de sismogramas a diferencia del método de los signos de primeros impulsos.

Así, nuestra finalidad en este capítulo es representar la energía sísmica a partir de la función $M_{pq}(t)$. Trabajando en la aproximación del campo lejano, el desplazamiento de onda P es de forma (Udías, 1985)

$$u_i^p = G_{ip,q}^p(t) * M_{pq}(t) \quad (64)$$

donde $G_{ip,q}$ es el tensor de Green derivado respecto a la coordenada de la fuente. Nótese que justamente ésta es la ecuación que también se emplea

para determinar $M_{pq}(t)$ y \dot{M}_{pq} . Los desplazamientos vienen de las mediciones sísmicas, la función de Green se calcula, habitualmente por la teoría de rayos, que permite tomar en cuenta la heterogeneidad de la Tierra, su atenuación y la superficie libre. Hay que acentuar la sumatoria sobre los índices p y q en la parte derecha de (64), diciendo que un valor de u_i depende en general de los seis componentes independientes de M_{pq} . Por eso, la determinación de M_{pq} necesita las soluciones de sistemas de ecuaciones algebraicas (Correig y Lana, 1985).

La formulación (64) permite resolver un problema práctico, ya brevemente mencionado en el capítulo precedente. Es el problema de la *multiplicidad de fases* que forman el comienzo de los sismogramas. En tal caso la ecuación (64) debe generalizarse para dar cuenta de la superposición de las fases P , pP , sP , etc., las cuáles, llegando con un pequeño desfase, forman un complejo de interferencia. En tal caso, cada fase tiene su función de Green, correspondiente a su mismo rayo, con su misma amplitud y tiempo de llegada. Lo más importante es que, debido a la aproximación puntual del foco, los efectos de propagación (las funciones de Green) y de la fuente (la función M_{pq}) están perfectamente separadas una de la otra, es decir, todas las funciones de Green se combinan con la misma función temporal de $M_{pq}(t)$. Entonces, en vez de (64), tenemos

$$u_i^{p+pp+sp} = G_{ip,q}^p(t) * M_{pq} \quad (65)$$

En este sentido la superposición de fases no representa ninguna complicación fundamental en la práctica. No obstante, para simplificar el tratamiento, volveremos al caso de (64).

Supongamos que la función $M_{pq}(t)$ ya se ha determinado a partir de mediciones sísmicas. Lo siguiente es mostrar cómo se emplearía esta función para determinar la energía sísmica. $M_{pq}(t)$ trae información pura sobre la fuente. Todos los efectos del medio ya se tuvieron en cuenta durante los cálculos de $M_{pq}(t)$. Por tanto, la determinación de la energía es bastante fácil porque puede efectuarse mediante la esfera focal homogénea. La situación es semejante a la precedente con $\Omega(t)$ en el capítulo 11. Para el medio homogéneo tenemos que, en S_0

$$u_i^p = \frac{\gamma_q}{\alpha_0} \dot{G}_{ip}^p * M_{pq}(t) = \frac{\gamma_q}{\alpha_0} G_{ip}^p * \dot{M}_{pq}(t) =$$

$$\frac{\gamma_q}{\alpha_0} \frac{\gamma_p \gamma_p}{4\pi\rho_0\alpha_0^2 r_0} \delta(t - \frac{r_0}{\alpha_0}) * \dot{M}_{pq}(t) \quad (66)$$

Aquí $\vec{\gamma}$ y es el radio vector unitario desde la fuente al observador, el cual, ahora (en el medio homogéneo y con el observador en la superficie de la esfera focal), es $\vec{\gamma} = \vec{v}$. La derivada viene dada por

$$\dot{u}_i^p = \frac{\gamma_i \gamma_p \gamma_q}{4\pi \rho_0 \alpha_0^3 r_0} \ddot{M}_{pq} \left(t - \frac{r_0}{\alpha_0} \right) \quad (67)$$

y empleando la definición de la energía de ondas P (43), con $\theta = 0$, llegamos a

$$E^p = \frac{1}{(4\pi)^2 \rho_0 \alpha_0^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\gamma_p \gamma_q)^2 \sin \Theta d\Theta d\Phi \int_0^1 (\ddot{M}_{pq}(t))^2 dt \quad (68)$$

En esta ecuación estamos empleando la ventajosa propiedad de $M_{pq}(t)$ mencionada arriba, de no ser espacialmente variable, por lo que no se integra respecto a Θ y Φ . Introduciendo el promedio espacial $\langle \dots \rangle$, el resultado es

$$E^p = \frac{1}{(4\pi)^2 \rho_0 \alpha_0^3} \langle (\gamma_p \gamma_q)^2 \rangle \int_0^1 (\ddot{M}_{pq}(t))^2 dt \quad (69)$$

La energía E^s de las ondas S viene dada por una ecuación análoga utilizando la misma función $M_{pq}(t)$ y, por tanto, proporcional a E^p . Podemos ver que la cantidad más importante para determinar la energía sísmica es la integral $\int (\ddot{M}_{pq})^2 dt$, cuyo papel jugado en (69) es similar al de $\int (\Omega)^2 dt$ en la ecuación (54).

Claro que la determinación de la función $M_{pq}(t)$ es bastante laboriosa. Sin embargo, los métodos correspondientes reciben día a día más atención y desarrollo en sismología práctica. Por tanto, y sobre todo para considerar las variaciones del mecanismo sobre la falla (incluso sus potenciales desviaciones desde la cizalla pura), hay que preferir el presente método sobre los descritos en el capítulo precedente. Por supuesto no tenemos que olvidar que el uso de M_{pq} automáticamente implica el no considerar la directividad de las ondas sísmicas a partir de las dimensiones finitas de la falla. Este hecho requiere determinar la función $M_{pq}(t)$ a partir de mediciones sísmicas en numerosas estaciones para evitar desvalorizar la estimación de la energía debido a que las observaciones representan sólo las direcciones particulares, p. ej. los de mínimos o máximos de la radiación.

En conclusión podemos comprobar que en el caso especial de la cizalla pura la ecuación (69) lleva al resultado mostrado en el capítulo precedente. Para la cizalla pura tenemos

$$M_{pq}(t) = \int_{\Sigma} m_{pq}(\vec{\xi}, t) d\Sigma = \int_{\Sigma} \mu (n_p v_q + n_q v_p) \Delta u(\vec{\xi}, t) d\Sigma \quad (70)$$

que, aproximando \vec{n} y \vec{v} por sus valores en el hipocentro, equivale a

$$M_{pq}(t) = (n_p v_q + n_q v_p) \int_{\Sigma} \mu \Delta u(\vec{\xi}, t) d\Sigma \quad (71)$$

Empleando también el momento escalar M_0 y la función temporal $\Omega(t)$, la segunda derivada del M_{pq} es

$$\ddot{M}_{pq}(t) = (n_p v_q + n_q v_p) \ddot{M}_0(t) = (n_p v_q + n_q v_p) \mu \dot{\Omega}(t) \quad (72)$$

Finalmente, a partir de la ecuación (69):

$$E^p = \frac{\mu_0^2}{4\pi\rho_0\alpha_0^3} \langle (\gamma_p \gamma_q)^2 (n_p v_q + n_q v_p)^2 \rangle \int_0^1 \dot{\Omega}^2 dt \quad (73)$$

y empleando $F^p = 2(\vec{\gamma} \cdot \vec{v})(\vec{\gamma} \cdot \vec{n})$

$$E^p = \frac{(\mu_0)^2}{4\pi\rho_0\alpha_0^3} \langle (F^p)^2 \rangle \Psi^p \quad (74)$$

que equivale al resultado previo de la ecuación (54).

13. DISCUSION Y PROBLEMAS ABIERTOS

Sin duda, la determinación de la energía sísmica E pertenece a las tareas sismológicas más difíciles. Los problemas resultan de la necesidad de contar con la *heterogenidad* de la Tierra, así como con la *superficie libre y atenuación*. Muchos de ellos se pueden resolver empleando la teoría de rayos en la aproximación del campo lejano. Los cálculos más confiables de E son los que se basan en la función temporal del foco, sobre todo la función temporal del tensor momento sísmico $M_{pq}(t)$.

El problema más serio entre todos los mencionados es el de la atenuación. Primero, aún no se conoce bien ni la distribución de Q en la tierra ni su dependencia de la frecuencia. Segundo, y lo más importante, parte de la energía

radiada por la fuente no se puede determinar en absoluto (la parte de frecuencias altas) porque se pierde totalmente por atenuación a lo largo del camino, sin posibilidad de ‘restablecerse’ a partir de correcciones aplicadas a los registros sísmicos. Este no es el problema de un buen o mal método, o una mejor o peor instrumentación, pero es el problema fundamental. Por tanto todas las determinaciones de la energía sísmica sirven sólo como una *estimación* de E , refiriéndose a *un limitado rango de frecuencias*. Este hecho destaca la importancia de completar las observaciones sísmicas en distancias telesísmicas por las de distancias muy cercanas al foco (los registros de movimientos fuertes) en las cuales aparecen las frecuencias relativamente altas.

Por otro lado, el uso de los movimientos fuertes conlleva complicaciones muy serias debidas a la presencia de efectos del *campo cercano*. Los métodos de cálculo de la energía sísmica que consideren el campo cercano no se han desarrollado todavía lo suficiente, aunque los primeros trabajos ya aparecieron (Vavrycuk, en prensa).

Una vez que la energía sísmica ha sido determinada para un terremoto, su empleo es múltiple. Por supuesto, el empleo práctico consiste en la clasificación relativa de los terremotos. Esta aplicación de E está relacionada con el perfeccionamiento de las escalas de las magnitudes sísmicas. Sin embargo, lo más importante es que la energía sísmica tiene un significado físico muy profundo y tiene una relación estrecha con los procesos en la falla. Como se muestra a partir de las correlaciones empíricas entre el momento sísmico escalar M_0 y la longitud de la falla L , la caída de esfuerzo $\Delta\sigma$ en la falla no es una constante universal, implicando que la energía sísmica E y el momento M_0 son independientes uno del otro. Por tanto, la importancia práctica de la energía sísmica E es que, junto con el momento sísmico, representa una descripción más completa del tamaño de un terremoto.

Otra aplicación de la energía sísmica E permite cuantificar el trabajo (30) en la falla relacionado con la *caída de esfuerzo* $\Delta\sigma$ (es decir, una forma posible de la definición de la llamada energía mecánica del terremoto). Pero, como hemos visto, la relación entre E , $\Delta\sigma$ y M_0 , dada por las ecuaciones (30)-(34), contienen muchas simplificaciones que provocan dudas sobre su aplicación. Por tanto estas ecuaciones necesitan reconsideraciones teóricas más detalladas. P. ej., debe reconsiderarse el desprecio del campo cercano, de la energía de fractura, y del miembro que contiene σ_{ij} . Parece que las mediciones continuas de esfuerzos en el campo, sobre todo en fallas sísmicas contribuirán a resolver los problemas mencionados.

Problemas totalmente ignorados en este texto, pero de una importancia enorme para mejorar nuestra comprensión de los terremotos, se refieren a la energía mecánica no elástica y a la energía térmica. Estos tipos de energía, que, sin duda, juegan un papel muy importante en los procesos de la fracturación y fricción en las fallas, deben estudiarse más para entender las relaciones entre sismos y procesos tectónicos. El actual nivel del conocimiento sismológico mantiene este problema muy abierto.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece a los estudiantes que participaron en el curso "Generación de ondas sísmicas" por su interés en este tema. El curso se realizó en el año 1992 en la Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica, dentro del proyecto sísmico centroamericano (CEPREDENAC), dirigido por Prof. Ota Kulháněk (Universidad de Uppsala, Suecia). Un agradecimiento especial a mis amigos Victor Gonzales Salas, Jaime Toral Boutet y Ronnie Quintero Quintero quienes corrigieron el lenguaje. El trabajo ha sido parcialmente financiado por el grant No. O507 de la República Checa y el grant No. 321 de la Universidad Carolina.

14. REFERENCIAS

- AKI, K. y P. RICHARDS (1980): *Quantitative seismology, theory and methods I and II*. W.H. Freeman, San Francisco.
- BOATWRIGHT, J. (1980): A spectral theory for circular seismic sources; simple estimates of source dimension, dynamic stress drop, and radiated seismic energy. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 70, 1-27.
- CORREIG, A. y X. LANA (1985): Determinación del tensor del momento sísmico, in *Mecanismo de los terremotos y tectónica*, eds. A. Udías, D. Muñoz y E. Buforn, pp. 101-116. Universidad Complutense, Madrid.
- ČERVENÝ, V., I.A. MOLOTKOV y I. PSENCIK (1977): *Ray method in seismology*. Univerzita Karlova, Praha.
- ERINGEN, A.C. (1967): *Mechanics of continua*. J. Wiley, New York.
- HANKS, T.C. y H. KANAMORI (1979): A moment magnitude scale. *J. Geophys. Res.*, 84, 2348-2350.
- KOSTROV, B.V. y S. DAS (1988): *Principles of earthquake source mechanics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- LANDAU, L.D. y E.M. LIFSHITZ (1965): *Teoría de elasticidad (en ruso)*. Nauka. Moscú.
- MADARIAGA, R. (1983): Earthquake source theory: a review, in *Earthquakes: observation, theory and interpretation*, eds. H. Kanamori y E. Boschi, pp. 1-44. North-Holland, Amsterdam.
- UDÍAS, A. (1985): Fundamentos teóricos del mecanismo de generación de ondas sísmicas, in *Mecanismo de los terremotos y tectónica*, eds. A. Udías, D. Muñoz y E. Buforn, pp. 41-59. Universidad Complutense, Madrid.
- UDÍAS, A. (1989): *Parámetros del foco de los terremotos*, in *Movimientos fuertes del suelo y riesgo de terremotos*. Física de la Tierra, No. 1, eds. A. Udías, D. Muñoz, pp. 87-104. Universidad Complutense, Madrid.
- VAVRYČUK, V. (en prensa): Energy balance of simple elastodynamic sources. *Pure and Appl. Geophys.*
- ZAHRADNIK, J. (1989): *Generation of seismic waves by earthquake sources (notas del curso)*. Uppsala University, Uppsala.