

Teoría de errores de observación

MIGUEL J. SEVILLA

Instituto de Astronomía y Geodesia
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense. 28040 MADRID

1. INTRODUCCION

En Astronomía y en Geodesia, como en las restantes ciencias experimentales, se opera con frecuencia con valores numéricos obtenidos por observación y medida. Estos valores, por muy cuidadosa que sea la observación y por muy grande que sea la precisión de los aparatos empleados, vienen siempre afectados por un conjunto de errores que no en todos los casos es posible determinar, y que son debidos a varias causas de muy diversa naturaleza: deficiencias de los aparatos de observación, variación de las condiciones ambientales, defectos de los sentidos o distracciones del observador, etc, etc.

Si se repite un cierto número de veces una observación en la que se trata de determinar el valor de una magnitud, efectuando todas las observaciones con los mismos métodos y aparatos y con en máximo esmero posible, se obtendrán en general resultados distintos en las distintas observaciones. (En realidad esta discordancia depende en cierto modo de la precisión que se quiera obtener pues, por ejemplo, si se realiza una serie de medidas de un mismo ángulo solamente con la aproximación del grado puede ocurrir que varias de ellas coincidan; esto difícilmente sucedería si se pretendiesen aproximaciones del orden del segundo o fracción de éste).

Se presenta así el problema de definir, partiendo de estos datos de observación, cual ha de tomarse como valor de la magnitud medida, el que se llamará *valor más probable*, de modo que el error cometido al tomar dicho valor más probable como medida de la magnitud en cuestión sea el menor posible. Y adoptando ya este valor más probable interesa conocer el *grado de precisión* con que se han efectuado las observaciones, y la aproximación con que aquel representa la magnitud medida.

Por otra parte, la Ciencia llega por consideraciones teóricas a dar una explicación de determinados fenómenos observados, teorías que se enuncian me-

diante ciertas leyes matemáticas. Ahora bien, es necesario comprobar en cada caso, hasta qué punto dichas teorías están *de acuerdo* con la realidad, comprobación que ha de darla la observación del fenómeno estudiado. Efectuada esta observación, los resultados obtenidos no coincidirán exactamente con los deducidos de la ley matemática a que condujo la teoría; se encontrarán diferencias, que podrán ser pequeñas pero siempre existirán. Aparece así la duda de si la existencia de dichas diferencias es debida a errores en la observación o si, por el contrario, la causa está en no ser cierta la teoría desarrollada. En estas circunstancias es necesario algún proceso que nos permita dilucidar esta duda y conocer, como antes se dijo, hasta qué punto la teoría está de acuerdo con la realidad.

Estos son, en líneas generales, los principales problemas en los que ha de intervenir la Teoría de Errores de Observación, mediante la cual se tratará su resolución en el presente escrito. Se estudiará sucesivamente:

- 1) La determinación del valor más probable a partir del conjunto de medidas efectuadas de una magnitud.
- 2) La determinación de la precisión de la serie de medidas.
- 3) La determinación de la precisión del valor más probable adoptado.

El desarrollo histórico de la Teoría de Errores, que va muy ligado al de la Teoría de Probabilidades, comienza con los trabajos de *Simpson* de 1756 en los que aparecen las primeras discusiones matemáticas sobre las distribuciones de frecuencias de los errores de observación. *Laplace* en su «Théorie analytique des probabilités» de 1811 introduce la probabilidad de una función lineal de errores con el aserto de que una desviación o error es la suma de muchas pequeñas desviaciones y da fórmulas para la naturaleza de una distribución de frecuencias. *Poisson* en 1827 abunda en estas disquisiciones dando la distribución que lleva su nombre. *Thiele* en su «Teoría de las observaciones» de 1897 introduce los semiinvariantes en teoría de probabilidades y estudia diversas distribuciones de frecuencias. *Poincaré* también escribe su «Calcul des probabilités».

Pero es a *Gauss* con su «Theoria motus corporum Coelestium» de 1809 y su «Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae» de 1823, a quien se debe el establecimiento definitivo de la Teoría de Errores de observación, y su aplicación práctica, llegando a la deducción de la ley que los gobierna y que lleva su nombre.

2. DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Supóngase que para determinar el valor de una cierta magnitud se ha realizado una serie de observaciones.

Se denomina *error verdadero* a la diferencia existente entre el valor real o ideal de una magnitud y el valor observado de la misma. Este concepto generalmente no tiene realización práctica puesto que casi nunca se conocen los valores reales de la magnitud que se pretende determinar. El valor ideal o verdadero de

una magnitud puede conocerse en aquellos casos en los que es matemáticamente determinable, independientemente de las observaciones, (por ejemplo la suma de los tres ángulos de un triángulo plano, que es 180 grados). Conviene distinguir entre *error* y *equivocación*, esta última no es más que una diferencia debida, como su nombre indica, a una falsa interpretación teórica o a un despiste práctico.

Se establece el concepto de *exactitud* diciendo que una observación o resultado es más o menos exacto en tanto en cuanto sea más o menos aproximado a la verdad o bien a un patrón o modelo si existe; se estimará mediante la magnitud de los errores cometidos.

Por otra parte se llama *precisión* al grado de perfección o afinamiento con que se realiza una observación o se establece un resultado; dependerá principalmente de los aparatos utilizados, fórmulas empleadas y esmero de los observadores. Así pues, puede darse el caso de que una medida sea exacta sin ser precisa y viceversa.

Es interesante también el concepto de *discrepancia* utilizado por algunos autores. Puede definirse la discrepancia como la diferencia entre dos medidas obtenidas de una misma magnitud. Si se tienen dos series de observaciones de una misma magnitud y si la discrepancia entre las dos es pequeña, esto indica a priori que no se han cometido equivocaciones.

3. CLASIFICACION DE LOS ERRORES DE OBSERVACION

Los errores cometidos en una observación pueden obedecer, como ya se ha dicho, a causas muy diversas. Según esto puede hacerse una primera clasificación en:

Errores personales: Son los debidos a imperfecciones en los sentidos del observador (vista, oído, etc.) o bien a distracciones en el momento de la observación, o a tendencias nerviosas. La llamada *ecuación personal* es un ejemplo claro de esta clase de errores; un mismo fenómeno, por ejemplo el momento de paso de una estrella por detrás del hilo del retículo de un anteojo es señalada por distintos observadores en distintos instantes, presentando cada uno una tendencia a adelantar o a retrasar dicho instante.

Errores instrumentales: Como su nombre indica son debidos al aparato que se utiliza para la observación. Al observar con un aparato, su puesta en estación nunca es perfecta, ni sus componentes (ejes y círculos de lectura, por ejemplo) ocupan las posiciones que teóricamente deberían ocupar, lo que hace que los datos obtenidos no sean nunca los valores verdaderos. La utilización de fórmulas y parámetros de calibración es necesaria en muchas ocasiones.

Errores teóricos: Son debidos a deficiencias en la teoría en que se basan las observaciones. Por ejemplo, al determinar por observación la altura de una estrella sobre el horizonte o la distancia entre dos puntos con un distanciómetro electrónico ha de corregirse el resultado instrumental para tener en cuenta; entre otras cosas, el efecto de la refracción atmosférica; ahora bien, esta corrección por refracción

se introduce aplicando fórmulas obtenidas teóricamente, pero que sólo darán valores aproximados. Se tiene así una nueva causa de error.

A partir de esta clasificación puede hacerse otra más exhaustiva que es la que presenta mayor interés para la Teoría de Errores. Los errores de cualquiera de las tres categorías anteriores pueden clasificarse en:

Errores constantes: Un error es constante cuando produce el mismo efecto sobre todas las observaciones de una misma serie de medidas. Por ejemplo el error de orientación de un aparato, dado que todas las medidas realizadas vendrán afectadas del mismo error; el error de cero de una regla graduada, etc.

Errores sistemáticos: Un error sistemático es aquel que viene dado por medio de una relación, establecida de antemano, en función de alguna condición de las que intervienen en la observación. La naturaleza de las causas a las que obedecen estos errores no siempre se conocen con precisión pero son tales que siempre que se realiza un mismo tipo de observaciones en las mismas circunstancias, se presentan con el mismo valor y el mismo sentido.

Por ejemplo, si se hacen medidas con una cinta métrica a diferentes temperaturas, el error resultante de esta variación es sistemático y puede calcularse conociendo la temperatura y el coeficiente de dilatación del material de que está hecha la cinta. Otro ejemplo de error sistemático es el de graduación de un círculo, este hará que, siempre que se realice una lectura en la división afectada de error, la lectura aparecerá falseada, y siempre será en la misma magnitud y el mismo sentido. Un estudio previo del círculo graduado permitirá conocer estos errores y por lo tanto eliminarlos o corregirlos.

Este estudio previo de los aparatos, métodos y circunstancias de las observaciones, con objeto de determinar todas las causas posibles de errores sistemáticos, así como las leyes según las cuales influyen en los resultados de observación, es necesario con el fin de poder suprimir o eliminar todos estos errores sistemáticos, bien por el cálculo o bien por un procedimiento operatorio apropiado, lo que es preferible.

Errores accidentales: Los errores accidentales, también llamados fortuitos o aleatorios, provienen de causas variables, desconocidas de una forma precisa e imposibles de prever, que influyen de una manera irregular, variando su magnitud y sentido de una observación a otra. Se consideran como sucesos al azar.

Así, el estado fisiológico del observador influye en las lecturas hechas de una manera imposible de precisar. Una masa de aire más cargada de humedad que se interponga entre el observador y le objeto observado dará lugar a variaciones de la refracción. Una pequeña vibración del piso donde esté instalado un aparato producirá su descorrección, etc. Todas estas causas y otras muchas fáciles de intuir, son las que dan lugar a los errores accidentales.

En definitiva, estas dos últimas clases de errores son una sola con la salvedad de que para las primeras pueden conocerse sus causas y por tanto estudiarse y para las fortuitas no.

Además de lo dicho para los errores accidentales, también hay que considerar lo siguiente: después de eliminar un error constante o sistemático, queda siempre

un pequeño resto debido a que la magnitud de este error eliminado no ha sido perfectamente conocida o a que la eliminación ha sido imperfecta incluso por consideraciones aproximativas de las fórmulas, empíricas en la mayoría de los casos, utilizadas. Este remanente también puede considerarse como un error accidental.

El progreso de la Ciencia, al estudiar las condiciones, métodos y aparatos de observación por un lado y la habilidad de los observadores por otro, automatizando cuanto sea posible la toma de datos, han de tender a descubrir todas las causas posibles de errores sistemáticos dando así lugar a su estudio y corrección o eliminación.

Siempre que se utilizan datos de observación se suponen ya corregidos de todos los errores constantes y sistemáticos posibles, quedando estos datos teóricamente sólo influidos por los errores accidentales que es a los que se refiere el presente estudio.

4. PROBABILIDADES

Por ser de aplicación constante conviene recordar someramente algunas definiciones y teoremas del cálculo de probabilidades. (Para una mejor comprensión de lo que sigue es necesario el conocimiento de los conceptos fundamentales de Teoría de Probabilidades y Estadística Matemática que pueden adquirirse consultando un buen tratado en la materia). Supondremos conocidos los conceptos de frecuencia y probabilidad y sólo se darán a continuación aquellos conceptos que de una forma más directa van a intervenir en la Teoría de Errores.

Se distinguen tres tipos de probabilidades: simple, compuesta y total.

Probabilidad simple: La probabilidad simple o de ocurrencia de un suceso es la relación entre el número de casos favorables a la producción del mismo y el número total de casos posibles que pueden presentarse, siempre que, a priori, sean igualmente posibles todos los casos.

Ejemplo. En una urna que contiene n bolas de las cuales m_1 son blancas, m_2 verdes, m_3 rojas, etc. de modo que $n = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$, la probabilidad de sacar una bola blanca, verde, roja, etc. viene dada, respectivamente, por

$$p_1 = m_1/n, p_2 = m_2/n, p_3 = m_3/n \dots \quad (4.1)$$

Si todas las bolas fueran blancas $m_1 = n$ y la probabilidad de sacar bola blanca sería $p_1 = m_1/n = n/n = 1$, es decir, la unidad es el símbolo de la certeza.

Si no existieran bolas blancas $m_1 = 0$ y por tanto la probabilidad anterior sería $p_1 = m_1/n = 0/n = 0$, es decir, el cero es el símbolo de la imposibilidad.

Se desprende de lo anterior que la probabilidad de un suceso varía de cero a uno. Entonces, si es p la probabilidad del suceso sacar bola blanca, la probabilidad del suceso no sacar bola blanca o suceso complementario sería $1-p$.

Probabilidad compuesta: Cuando la ocurrencia de un fenómeno consiste en la coexistencia de otros varios independientes entre sí, se está en un caso de probabilidad compuesta. La probabilidad compuesta es igual al producto de las

probabilidades simples de los sucesos componentes, o dicho de otro modo, la probabilidad de coexistencia de varios sucesos independientes es igual al producto de sus probabilidades respectivas.

Ejemplo. Si se tienen dos urnas con bolas blancas y negras, siendo m_1 y m'_1 el número de bolas blancas contenidas en cada una de las urnas, la probabilidad del suceso obtener dos bolas blancas una de cada urna corresponde a una probabilidad compuesta.

Las probabilidades respectivas de sacar bola blanca en cada una de las urnas es

$$p_1 = m_1/n, p'_1 = m'_1/n' \quad (4.2)$$

siendo n y n' el número total de bolas en cada urna respectivamente.

Cada uno de los m_1 casos favorables a la extracción de bola blanca de la primera urna, combinado con cada uno de los m'_1 casos favorables a la extracción de bola blanca de la segunda urna, da lugar a la producción del fenómeno. El número de combinaciones favorables es pues, $m_1 m'_1$ y el número total de combinaciones posibles para sacar una bola de cada urna es nn' ; de modo que la probabilidad de extraer las bolas en cuestión será

$$p = m_1 m'_1 / nn' = p_1 p'_1 \quad (4.3)$$

Es condición indispensable que los distintos sucesos cuya coexistencia constituye el fenómeno considerado sean independientes. Si, por ejemplo, consideramos una urna con m_1 bolas blancas, m_2 negras, m_3 verdes, etc. la probabilidad de sacar dos bolas blancas no será $p = (m_1/n)(m_1/n)$ puesto que al sacar una bola blanca, el número de bolas que quedan en la urna es $n-1$ y de ellas m_1-1 son blancas, la probabilidad de sacar una segunda bola blanca será $(m_1-1)/(n-1)$ y no m_1/n . Esto es un caso de probabilidad modificada.

Probabilidad total: Cuando la ocurrencia de un fenómeno puede ser debida a varias causas, que se excluyen mutuamente, la probabilidad correspondiente se llama probabilidad total.

La probabilidad total es igual a la suma de las probabilidades correspondientes a cada una de dichas causas. O bien, la probabilidad de ocurrencia de uno cualquiera entre varios sucesos independientes entre sí, es igual a la suma de las probabilidades respectivas.

Ejemplo. Considérese la urna anterior con m_1 bolas blancas, m_2 verdes, m_3 rojas, etc. y n bolas en total. La probabilidad de sacar bola blanca, verde, roja, es, respectivamente,

$$p_1 = m_1/n, p_2 = m_2/n, p_3 = m_3/n \quad (4.4)$$

La probabilidad total correspondiente al suceso sacar bola blanca o verde indistintamente, sería

$$p = (m_1 + m_2)/n = p_1 + p_2 \quad (4.5)$$

Conviene recordar los siguientes teoremas del cálculo de probabilidades que se han de utilizar.

Ley de estabilidad de las frecuencias: En un gran número de experiencias independientes del mismo fenómeno aleatorio, cada suceso se presenta un número de veces proporcional a su probabilidad respectiva. Es decir, la frecuencia se aproxima a la probabilidad cuando n crece.

Principio de probabilidad inductiva. Dado un suceso que puede ser debido a varias causas distintas, igualmente posible y que se excluyen mutuamente, en cada una de las cuales corresponde una probabilidad distinta para el suceso, las probabilidades de que el suceso en cuestión sea debido a una de dichas causas son proporcionales a las probabilidades respectivas del suceso en cada una de ellas.

En consecuencia, dado un suceso realizado que puede ser debido a varias causas distintas igualmente posibles y que se excluyen mutuamente, la causa que tiene mayor probabilidad de haberlo producido y que se denomina *causa más probable* será aquella en la que la probabilidad del suceso sea mayor.

5. POSTULADOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE ERRORES

La Teoría de Errores se refiere exclusivamente, como ya se ha dicho, a los errores accidentales, suponiendo siempre que las observaciones que se utilizan están ya libres de toda clase de errores constantes y sistemáticos.

Para el estudio de errores, además de los teoremas del cálculo de probabilidades que se han enunciado, se partirá de los postulados fundamentales siguientes confirmados por la experiencia.

PRIMER POSTULADO. En una serie de un gran número de observaciones efectuadas en idénticas circunstancias y con el mismo esmero, los distintos errores posibles se presentan con tanta mayor frecuencia cuanto menor sea su valor absoluto.

En virtud del teorema antes enunciado según el cual, en una serie de un gran número de observaciones independientes, cada fenómeno se presenta un número de veces proporcional a su probabilidad, si es p_i la probabilidad de obtener un error de magnitud ε_i , esta probabilidad será función de la magnitud de dicho error, es decir, que puede ponerse:

$$p_i = \omega(\varepsilon_i) \quad (5.1)$$

En particular según este primer postulado, los errores grandes son muy poco probables. En la práctica, siempre que las observaciones se efectúen con todo el esmero posible, puede fijarse previamente para una determinada serie de observaciones un límite de error de modo que nunca se presentarán errores fuera de este límite.

SEGUNDO POSTULADO. En una serie de un gran número de observaciones efectuadas en idénticas circunstancias y con el mismo esmero, los errores del

mismo valor absoluto pero de distinto signo, se presentan con la misma frecuencia y son, por lo tanto, igualmente probables. Es decir, la distribución de errores accidentales es simétrica respecto del valor cero.

Según esto, a cada error $+\varepsilon_i$ cometido le deberá corresponder un error $-\varepsilon_i$; por lo tanto, siempre que se trate de un número grande de observaciones, se puede poner

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 0 \quad (5.2)$$

El admitir estos postulados no quiere decir que al efectuar una serie de observaciones hayan de verificarse exactamente, pero siempre que se trate de observaciones efectuadas en idénticas condiciones y con la máxima precisión posible, al crecer su número indefinidamente se verifican, extremo que viene confirmado por la experiencia, siempre, naturalmente, que se suponga que las observaciones son independientes y están libres de toda clase de errores constantes y sistemáticos.

6. POSTULADO DE GAUSS. VALOR MAS PROBABLE

En la primera exposición de su teoría (en su obra *Theoria Motus Corporum Caelestium*) no aparecía el que se ha dado como segundo postulado, sino que Gauss daba el siguiente:

«Obtenidos por observación n valores distintos de una magnitud, siempre que todos ellos lo hayan sido en idénticas condiciones y se hayan efectuado con el mismo esmero, la medida más probable de la magnitud es la media aritmética de los valores obtenidos».

Convencido más tarde de las dificultades que presentaba el admitir este postulado, el mismo Gauss lo sustituyó por el que se ha dado anteriormente. Sin embargo, puede obtenerse este valor más probable como una consecuencia de dicho segundo postulado.

En efecto, sean $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$, los valores obtenidos al tratar de medir la magnitud ℓ , suponiendo que todas las observaciones se han efectuado con los mismos métodos y con idéntico cuidado, es decir, a priori todas las observaciones merecen la misma confianza; se supone, además, que los valores $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ no vienen afectados de ninguna otra clase de errores constantes ni sistemáticos.

Cada observación estará afectada de un cierto error verdadero

$$\varepsilon_i = \ell - \ell_i, \quad (i=1, \dots, n) \quad (6.1)$$

sumando todos los valores resulta

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n (\ell - \ell_i) = n\ell - \sum_{i=1}^n \ell_i \quad (6.2)$$

pero en virtud del segundo postulado, (6.2) será igual a cero

$$n \ell - \sum_{i=1}^n \ell_i = 0$$

de donde se deduce como valor más probable

$$\bar{\ell} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ell_i \quad (6.3)$$

Esto no quiere decir que la media aritmética sea el valor más exacto de la magnitud medida, ni que entre los distintos valores ℓ_i no pueda haber ninguno que se aproxime al valor verdadero más que esta media aritmética.

No obstante, se admitirá con las mismas restricciones con que han de admitirse los dos postulados fundamentales. En efecto, si las observaciones se han efectuado con todo el cuidado y precisión posibles, puede esperarse que los errores cometidos sean siempre pequeños, puesto que precisamente al hacer la observación se tiende a que dichos errores no existan. Si se realiza un gran número de observaciones, puede igualmente esperarse que, en general, los errores se presentan tanto en un sentido como en otro, no existiendo ninguna razón para que se presenten con más frecuencia los errores positivos o los negativos, de modo que al tomar la media aritmética, pueda esperarse una compensación de errores.

Basándonos en estas consideraciones, que carecen desde luego de rigor matemático, puede adoptarse como valor más probable la media aritmética, es decir, se admitirá que este valor más probable es el que tiene mayor probabilidad de acercarse al verdadero valor de la cantidad medida y el valor así obtenido merecerá mayor confianza cuanto más cuidadosas sean las medidas y mayor sea su número.

7. ERRORES RESIDUALES

Los errores accidentales considerados hasta ahora quedan definidos por la expresión (6.1), siendo ℓ el valor verdadero de la magnitud y ℓ_i el resultado de una de las medidas efectuadas. Pero, como en general no puede conocerse, como ya se dijo, el valor exacto de dicha magnitud ℓ , sino sólomente un valor más o menos aproximado, tampoco se conocerán exactamente los errores verdaderos por lo que con ellos no podría llegarse a resultado práctico alguno.

Aplicando los procedimientos que se indicarán en su momento, se adoptará como valor de una magnitud ℓ un cierto valor $\bar{\ell}$ que se denominará *valor más probable*. Con este valor $\bar{\ell}$ se definen los *errores residuales* por

$$\Delta_i = \bar{\ell} - \ell_i \quad (7.1)$$

esto es, como las diferencias entre dicho valor más probable y los valores obtenidos en cada una de las observaciones.

La magnitud de los errores residuales así definidos sí puede conocerse prácticamente para un conjunto de observaciones.

Es evidente que en una serie de un gran número de observaciones, todas de la misma confianza, si como valor más probable se toma la media aritmética (6.3), siempre se verifica

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i = 0 \quad (7.2)$$

puesto que

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i = \sum_{i=1}^n (\bar{\ell} - \ell_i) = n\bar{\ell} - \sum_{i=1}^n \ell_i = 0$$

es decir, los errores residuales, respecto de su suma, tienen el mismo comportamiento que los errores verdaderos

8. LEY DE ERRORES DE GAUSS

Supóngase que para determinar el valor de una magnitud ℓ se ha efectuado una serie de observaciones, todas ellas en idénticas condiciones y con el mismo esmero, habiéndose obtenido los valores ℓ_1, ℓ_2, \dots y los errores verdaderos $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, definidos por (6.1).

Como consecuencia del primero de los postulados fundamentales admitidos, la probabilidad de cometer un error tal que su magnitud esté comprendida entre ε y $\varepsilon + \delta$ será proporcional a la magnitud de dicho error, esto es:

$$P(\varepsilon) = \rho\delta$$

donde ρ depende de ε , $\rho = \varphi(\varepsilon)$; tomando notación diferencial para δ pequeño queda

$$P(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)d\varepsilon \quad (8.1)$$

Dicho de otro modo, $\varphi(\varepsilon)d\varepsilon$ representa la probabilidad de cometer un error comprendido entre ε y $\varepsilon + d\varepsilon$ y la función $\varphi(\varepsilon)$ representa el límite de la probabilidad de cometer un error entre ε y $\varepsilon \pm d\varepsilon$ cuando $d\varepsilon$ tiende a cero.

A esta función $\varphi(\varepsilon)$ se le llama *Ley de errores de Gauss*.

Se ha visto, por otra parte, que en una serie de observaciones pueden siempre definirse límites de error $(-K, +K)$, de manera que, siempre que todas las observaciones se realicen en idénticas condiciones y con la misma precisión, todos los errores que se cometan quedarán dentro del intervalo $(-K, +K)$.

Se va a determinar ahora el valor de la probabilidad de cometer un error entre dos límites a y b .

Para ello se divide el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales de amplitud $\delta = (b-a)/n$, obteniéndose así los subintervalos

$$[a, a+\delta], [a+\delta, a+2\delta], \dots, [a+(n-1)\delta, b]. \quad (8.2)$$

Si, como se supone, n aumenta indefinidamente, δ tiende a cero, entonces la probabilidad de cometer un error perteneciente a cada uno de estos subintervalos será, respectivamente:

$$\varphi(a)\delta, \varphi(a+\delta)\delta, \varphi(a+2\delta)\delta, \dots, \varphi(a+(n-1)\delta)\delta$$

en estas circunstancias y como la probabilidad de cometer un error perteneciente al intervalo $[a, b]$ es igual a la probabilidad de cometer un error perteneciente a cualquiera de los subintervalos (8.2), dicha probabilidad será la probabilidad total del suceso que como se vio por (4.5) es igual a la suma de las probabilidades correspondientes y por consiguiente resulta

$$P(a \leq \varepsilon \leq b) = \varphi(a)\delta + \varphi(a+\delta)\delta + \varphi(a+2\delta)\delta + \dots + \varphi(a+(n-1)\delta)\delta$$

y por tender δ a cero esto se convierte en la integral

$$P(a \leq \varepsilon \leq b) = \int_a^b \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \quad (8.3)$$

En particular, puesto que todos los errores han de estar comprendidos entre $+K$ y $-K$ será

$$\int_{-K}^{+K} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 1 \quad (8.4)$$

o, con más generalidad,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 1 \quad (8.5)$$

Visto esto hay que abordar el problema de determinar la forma de la función $\varphi(\varepsilon)$ (llamada en general función densidad de probabilidad)

Si se ordenan estos errores por magnitud creciente y se agrupan como se hizo anteriormente para el intervalo $[a, b]$, resultará que la probabilidad de cometer un error comprendido entre ε_1 y $\varepsilon_1 + d\varepsilon$ será por (8.1) $\varphi(\varepsilon_1)d\varepsilon_1$, entonces la probabilidad de cometer todos los errores simultáneamente será un caso de probabilidad compuesta, por ser los errores independientes, que por (4.3) es el producto de las probabilidades respectivas (en este caso las de cometer error en todos los intervalos) y valdrá

$$P = \varphi(\varepsilon_1)d\varepsilon_1 \varphi(\varepsilon_2)d\varepsilon_2 \dots \quad (8.6)$$

Esta probabilidad P es una función de ℓ por intermedio de las ecuaciones (6.1) de modo que a cada valor que asignemos a ℓ le corresponderá un valor de

la probabilidad P , y como se trata de un suceso realizado puede aplicarse el principio de probabilidad inductiva, ya enunciado, según el cual la causa más probable de un suceso es la que da mayor valor a la probabilidad de ocurrencia del mismo. Así pues, puesto que todos los errores se cometen teóricamente, el valor más probable de la magnitud ℓ quedará definido por la condición de ser máxima la probabilidad (8.6).

Si la probabilidad P ha de ser máxima, su logaritmo $Q = \log P$ también lo será, esto es

$$Q = \log[\varphi(\varepsilon_1)d\varepsilon_1] + \log[\varphi(\varepsilon_2)d\varepsilon_2] + \dots = \text{máximo} \quad (8.7)$$

y para que Q sea máximo su derivada con respecto a ℓ ha de ser nula; entonces, derivando en (8.7) con respecto a ℓ e igualando a cero, queda

$$\frac{dQ}{d\ell} = \frac{d}{d\ell} [\log(\varphi(\varepsilon_1)d\varepsilon_1)] + \frac{d}{d\ell} [\log(\varphi(\varepsilon_2)d\varepsilon_2)] + \dots = 0 \quad (8.8)$$

y dado que los términos $\varphi(\varepsilon_i)d\varepsilon_i$ tienen forma análoga, el desarrollo de uno cualquiera de ellos será

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\ell} [\log(\varphi(\varepsilon)d\varepsilon)] &= \frac{\frac{d}{d\varepsilon} [\varphi(\varepsilon)d\varepsilon] \frac{d\varepsilon}{d\ell}}{\varphi(\varepsilon)d\varepsilon} = \\ &= \frac{\frac{d\varphi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\ell} - \varphi(\varepsilon) \frac{d^2\varepsilon}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\ell}}{\varphi(\varepsilon) d\varepsilon} = \frac{\varphi'(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)} \end{aligned}$$

esto resulta teniendo en cuenta que

$$\frac{d\varepsilon}{d\ell} = -\frac{d(\ell - \varepsilon)}{d\ell} = 1, \text{ y que } \frac{d^2\varepsilon}{d\varepsilon} \rightarrow 0$$

Así pues, la expresión (8.8) se convierte en

$$\frac{\varphi'(\varepsilon_1)}{\varphi(\varepsilon_1)} + \frac{\varphi'(\varepsilon_2)}{\varphi(\varepsilon_2)} + \dots = 0 \quad (8.9)$$

Por otra parte $\sum_i \varepsilon_i = 0$, y teniendo esto en cuenta puede ponerse

$$\sum_i \frac{\varphi'(\varepsilon_i)}{\varphi(\varepsilon_i)} = k \sum_i \varepsilon_i \quad (8.10)$$

donde k es una constante que puede introducirse sin pena y que proviene del significado de (5.2) y de (8.9).

Como los distintos errores ε_i son independientes entre sí, la igualdad (8.10) ha de verificarse término a término y por tanto puede ponerse en general

$$\frac{\varphi'(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)} = k \varepsilon \quad (8.11)$$

Entonces, multiplicando por $d\varepsilon$ e integrando resulta

$$\log(\varphi(\varepsilon)) = \frac{1}{2} k \varepsilon^2 + C'$$

de donde

$$\varphi(\varepsilon) = C e^{\frac{k}{2} \varepsilon^2} \quad (8.12)$$

siendo C una constante de integración $C = e^{C'}$.

Según el primero de los postulados fundamentales, el valor de la probabilidad decrece al aumentar el valor absoluto del error; esto exige que el coeficiente k sea negativo. Si se pone $k = -2h^2$, la función φ toma la forma

$$\varphi(\varepsilon) = C e^{-h^2 \varepsilon^2} \quad (8.13)$$

Aún falta determinar el valor de la constante de integración C . Para ello aplicamos la condición (8.5) y resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 1 = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \quad (8.14)$$

Para calcular el valor de esta integral se hace el cambio de variable $h\varepsilon = t$ con el cual quedará

$$C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} e^{-t^2} dt = \frac{C}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 \quad (8.15)$$

Por ser la función e^{-t^2} simétrica respecto al eje y y continua (en virtud del segundo postulado de la Teoría de Errores) se verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (8.16)$$

Ahora bien, (Wittaker and Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 1969)

$$2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (8.17)$$

donde Γ es la función de Euler o integral euleriana de segunda especie. Con esto resulta

$$\frac{C}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{C}{h} \sqrt{\pi} = 1 \quad (8.18)$$

de donde

$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \quad (8.19)$$

y por tanto la Ley de errores de Gauss adopta la forma clásica

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \quad (8.20)$$

En función de las propias observaciones ℓ_i y de su valor verdadero ℓ la ley de Gauss se escribe

$$\varphi(\varepsilon_i) = \varphi(\ell_i - \ell) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(\ell_i - \ell)^2} \quad (8.21)$$

entonces su derivada respecto de ε vale

$$\varphi'(\varepsilon_i) = -2(\ell_i - \ell) \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(\ell_i - \ell)^2} \quad (8.22)$$

de manera que el valor de ℓ que verifica la condición (8.6) (valor más probable) es evidentemente el que verifica la propiedad de máximo (8.10)

$$\sum_i \frac{\varphi'(\varepsilon_i)}{\varphi(\varepsilon_i)} = (\ell_1 - \ell) + (\ell_2 - \ell) + \dots = 0 \quad (8.23)$$

de donde

$$\bar{\ell} = \frac{1}{n} \sum_i \ell_i \quad (8.24)$$

por consiguiente el valor más probable es precisamente la media aritmética de las observaciones como se dijo anteriormente.

Por otra parte, esta media, en el caso continuo de infinitas observaciones se determina por la integral

$$\bar{\ell} = \frac{1}{n} \sum_i \ell_i = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \ell e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \quad (8.25)$$

que en teoría de Probabilidades recibe el nombre de momento de orden 1.

Desde el punto de vista estadístico puede decirse que la Ley de errores de Gauss $\varphi(x)$ representa la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria que sigue la ley normal siendo su función de distribución

$$F(x) = \Pr(\varepsilon \leq x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx \quad (8.26)$$

y representa la probabilidad de cometer un error menor o igual a x .

Conviene aclarar que siendo $\varphi(\varepsilon)$ la función de densidad de una variable aleatoria continua, la probabilidad de un suceso aislado $\varepsilon = a$ es cero a pesar de que el suceso no sea imposible

$$\Pr(\varepsilon \leq a) = \int_a^a \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \quad (8.27)$$

así pues, la probabilidad de cometer un error de magnitud a es cero aunque realmente pueda cometerse dicho error.

Hay que aclarar que la Ley Normal o Ley de errores de Gauss no es universal, como comprobó Hausdorff (1901) para algún caso, y esto ha llevado a grandes confusiones resumidas en la observación clásica de Lippmann a Poincaré: «Todo el mundo admite la Ley exponencial de errores: los experimentadores porque piensan que está probada por los matemáticos y estos porque creen que está establecida por observación» (Para más referencias ver Hausdorff, leipzig Ber. 53 (1901), pag 152 y Poincaré, Calcul de probabilités, pág. 149).

No obstante, si no se hacen hipótesis previas sobre la frecuencia de distribución de los errores cabe esperar que estos sigan la Ley Normal y aquí así se supondrá mientras no se diga lo contrario.

9. CURVA DE ERRORES DE GAUSS

Si en un sistema de ejes cartesianos se representa la función de Gauss (8.20) resultará una curva del tipo de la representada en la figura 1.

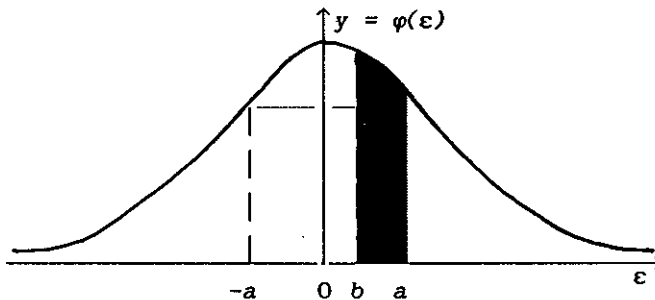


Figura 1. Curva de errores de Gauss $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$.

Al error $\varepsilon=0$ corresponde el máximo valor de y : $y_0=h/\sqrt{\pi}$. A los distintos valores que puede tomar el parámetro corresponden curvas de probabilidad homográficas. El área limitada por las abscisas $\varepsilon=a$, $\varepsilon=b$, el eje de abscisas y la curva vendrá dada por la expresión

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon \quad (9.1)$$

y representa la probabilidad de cometer un error comprendido entre a y b .

La integral (9.1) entre $-\infty$ y $+\infty$ representa la probabilidad de cometer un error cualquiera, esta probabilidad como ya se ha dicho, es la unidad.

La ley de errores de Gauss y la curva que la representa se han obtenido por consideraciones teóricas, partiendo de los postulados fundamentales que, como se indicó al enunciarlos, aparecen confirmados por la experiencia.

En efecto, supongamos que para medir una magnitud se ha efectuado una serie de un gran número de observaciones, todas en idénticas condiciones y con el mismo esmero, y supóngase, además, que los datos de observación se han corregido ya de toda clase de errores constantes y sistemáticos.

Tómese como valor más probable de la magnitud la media aritmética de las observaciones y determinense los errores residuales correspondientes. Agrúpense estos errores por magnitud: así, será: errores comprendidos entre 0 y 0,1; entre 0,1 y 0,2; entre 0,2 y 0,3; etc y análogamente los comprendidos entre 0 y $-0,1$; entre $-0,1$ y $-0,2$; etc. En general clasificaríamos los errores residuales en clases de magnitud comprendida entre (Δ_1, Δ_2) , (Δ_2, Δ_3) , ..., (Δ_i, Δ_{i+1}) , ...etc. El *diagrama de frecuencias* se obtendría sobre dos ejes rectangulares llevando en abscisas los valores de $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ que constituyen los intervalos y en ordenadas aquellos valores y tales que el área del rectángulo construido sobre Δ_i, Δ_{i+1} sea proporcional al número n_i de errores comprendidos entre Δ_i y Δ_{i+1} .

Estos diagramas conservan su forma típica (Figura 2) independientemente de la naturaleza del fenómeno estudiado. Cuando en número n de errores tiende a

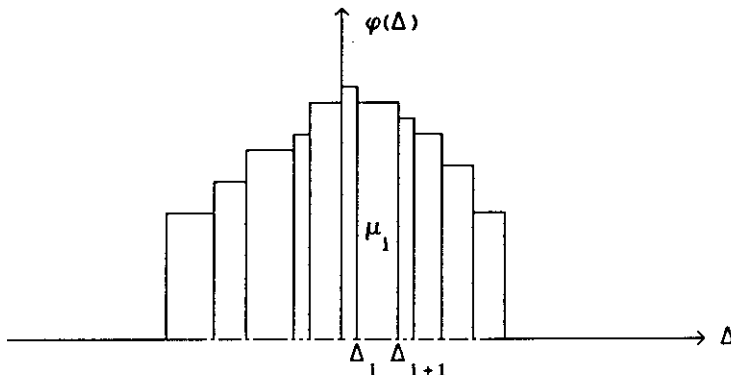


Figura 2. Diagrama de frecuencias de errores residuales.

infinito y cuando $\Delta_{i+1} - \Delta_i$ tiende a cero, la curva límite es evidentemente la curva de Gauss.

La simple inspección de esta curva muestra que:

- 1.- Se trata de una curva exponencial e y tiende rápidamente a cero cuando Δ aumenta. Los errores más pequeños se presentan con mayor frecuencia.
- 2.- La curva es simétrica respecto del eje Y (función par). Los errores del mismo valor absoluto y distinto signo se presentan con la misma frecuencia.

Estos son precisamente los postulados fundamentales de la teoría de errores y de aquí la conexión entre la teoría y la experiencia.

Las curvas de errores son obtenidas siempre de la forma antes indicada pero a condición de que se trate de un gran número de observaciones y que estas estén ya corregidas de errores constantes y sistemáticos.

Si al representar la curva de errores correspondiente a una serie de observaciones no apareciera la curva de errores de Gauss podría ser debido o bien a no haber eliminado todos los errores constantes y sistemáticos o bien a que el número de observaciones no fuese suficientemente grande. Si al aumentar progresivamente el número de observaciones la curva de errores no tendiera a adoptar la forma de la curva de Gauss puede asegurarse que existen errores sistemáticos sin eliminar. En este caso deberá buscarse la valoración de la magnitud de los errores con los elementos que puedan intervenir en cada caso particular, según la naturaleza del problema, con objeto de determinar la causa y la ley de variación de los errores.

Un clásico ejemplo de un problema de esta naturaleza se tiene en el estudio de la aberración anual. Tratando Bradley de determinar la paralaje de la estrella Draconis, efectuó una serie de determinaciones de la distancia polar de dicha estrella en el transcurso de un año. Comparando los distintos valores medidos con la media aritmética de las distancias polares medidas, encontró que estas diferencias presentaban una variación periódica a lo largo del año. Dibujó la correspondiente curva de errores que resultó ser una senoide. Existía, pues, una causa de error sistemático que, no habiendo sido eliminada producía variaciones periódicas con el período de un año. Esto hizo pensar a Bradley que la causa debía estar íntimamente ligada con el movimiento de la Tierra alrededor del Sol; pero los valores obtenidos no correspondían con los que deberían dar lugar al fenómeno de la paralaje anual. Por último llegó Bradley a la conclusión de ser la aberración de la luz la causa buscada.

10. LA FUNCION ERROR

La probabilidad de cometer un error comprendido entre los límites $-a$ y $+a$ o bien la probabilidad de cometer un error menor que a en valor absoluto es, según se vio

$$P(-a < \varepsilon < a) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^a e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \quad (10.1)$$

que por ser la curva de Gauss simétrica, puede ponerse igual a

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon$$

y mediante el cambio de variable $t = h\varepsilon$, queda

$$\theta(ah) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt \quad (10.2)$$

que representa la probabilidad de cometer un error entre $-a$ y $+a$. Esta integral, representada por $\theta(ah)$, define la función

$$\theta(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} - \int_0^a e^{-t^2} dt \quad (10.3)$$

que es la llamada *Función error*.

Existen varios métodos para calcular el valor de la integral (10.3), pero todos ellos se basan en la utilización de desarrollos en serie. Veamos algunos de estos procedimientos.

1.- Tomemos el desarrollo de la función exponencial

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots \quad (10.4)$$

entonces, el valor de la integral es

$$\theta(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(a - \frac{a^3}{1!3} + \frac{a^5}{2!5} - \frac{a^7}{3!7} + \dots \right) \quad (10.5)$$

Estas series son convergentes para todos los valores de t y de a .

2.- Pongamos ahora

$$\int_0^t e^{-t^2} dt = e^{-t^2} z \quad (10.6)$$

diferenciando queda,

$$\frac{d}{dz} (e^{-t^2} z) = e^{-t^2}$$

o bien

$$\frac{dz}{dt} - 2tz = 1 \quad (10.7)$$

evidentemente z comienza con un término en t , entonces tomamos el desarrollo

$$z = t + \alpha t^3 + \beta t^5 + \gamma t^7 + \dots$$

lo derivamos y sustituimos en la ecuación diferencial (10.7) identificando coeficientes de las potencias de t , resulta

$$3\alpha - 2 = 0$$

$$5\beta - 2\alpha = 0$$

$$7\gamma - 2\beta = 0$$

.....

resolviendo el sistema y volviendo al desarrollo original queda

$$z = t + \frac{2}{3} t^3 + \frac{2^2}{3 \times 5 \times 7} t^5 + \dots \tag{10.8}$$

y sustituyendo en (10.6), resulta

$$\theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} t [1 + \frac{1}{3} (2t^2) + \frac{1}{3 \times 5} (2t^2)^2 + \frac{1}{3 \times 5 \times 7} (2t^2)^3 + \dots] \tag{10.9}$$

y estas series son convergentes para todos los valores de t .

3.- Otro método desarrollado por Whittaker and Watson (*The Calculus of Observations*, Blackie, 1924) consiste en partir de la igualdad (8.17)

$$\sqrt{\pi} = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dt \tag{10.10}$$

y escribir

$$\sqrt{\pi} - \sqrt{\pi} \theta(t) = 2 \int_t^\infty e^{-t^2} dt \tag{10.10}$$

con el cambio de variable $t^2 = u$ se escribe

$$\begin{aligned} \int_u^\infty e^{-u} u^{-1/2} du &= \left[-e^{-u} u^{-1/2} \right]_u^\infty - \frac{1}{2} \int_u^\infty e^{-u} u^{-3/2} du = e^{-u} u^{-1/2} - \frac{1}{2} \left[e^{-u} u^{-3/2} \right]_u^\infty + \\ &+ \frac{3}{2^2} \int_u^\infty e^{-u} u^{-5/2} du = e^{-u} u^{-1/2} - \frac{1}{2} e^{-u} u^{-3/2} + \frac{1 \times 3}{2^2} e^{-u} u^{-5/2} - \dots \end{aligned}$$

En definitiva

$$\theta(t) = 1 - \frac{e^{-t^2}}{t\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1 \times 3}{(2t^2)^2} - \frac{1 \times 3 \times 5}{(2t^2)^3} + \dots \right] \tag{10.12}$$

Este desarrollo asintótico es conveniente para valores grandes de t .

11. MODULO DE PRECISION

Ha quedado establecido en las secciones precedentes que para determinar el valor de una magnitud ℓ se efectúa una serie de observaciones, tales que todas merezcan a priori la misma confianza. A esta serie de observaciones corresponderá una ley de distribución de errores

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 \varepsilon^2} \quad (11.1)$$

siendo h_1 un parámetro cuyo significado se va a determinar.

Supóngase realizada una segunda serie de observaciones, para determinar el valor de la misma magnitud ℓ , efectuadas todas estas observaciones con el mismo esmero y en las mismas condiciones. Si en esta segunda serie se utilizan métodos y aparatos distintos a los utilizados en la primera serie, el valor más probable de la magnitud ℓ aquí obtenido será diferente del obtenido anteriormente y es evidente que una serie tendrá más precisión que la otra. Para esta segunda serie se tendrá una ley de errores del tipo

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 \varepsilon^2} \quad (11.2)$$

Este supuesto se presentará por ejemplo al medir una distancia para lo cual se han efectuado dos series de observaciones con dos aparatos de distinta precisión. Es evidente que si el aparato utilizado en la segunda serie es de más garantía o está mejor ajustado que el utilizado en la primera, la segunda serie deberá ser de más precisión.

Introduciendo la función error se tiene que la probabilidad de cometer un error menor que a_1 en la primera serie será

$$\theta(h_1 a_1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h_1 a_1} e^{-t^2} dt \quad (11.3)$$

y análogamente, la probabilidad de cometer un error menor que a_2 en la segunda serie de observaciones será

$$\theta(h_2 a_2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h_2 a_2} e^{-t^2} dt \quad (11.4)$$

Si se impone la condición de que ambas probabilidades sean iguales, es decir, que un error menor que a_1 en valor absoluto en la primera serie y un error menor que a_2 en valor absoluto en la segunda serie sean igualmente probables se verifica

$$\theta(h_1 a_1) = \theta(h_2 a_2) \quad (11.5)$$

y teniendo en cuenta (11.3) y (11.4) se verificará que

$$h_1 a_1 = h_2 a_2$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a_2}{a_1} \quad (11.6)$$

Esta ecuación expresa que siendo igualmente probable el cometer errores $|\varepsilon_i| < a_1$ y $|\varepsilon_i| < a_2$ en las respectivas series, dichos límites de error son inversamente proporcionales a las magnitudes h_1 y h_2 .

Ahora bien, una serie de observaciones tendrá más precisión que otra si, obtenidos dos límites de error igualmente probables uno para cada serie, el límite de la primera es menor que el de la segunda, o dicho de otro modo, una serie de observaciones será tanto más precisa cuanto menor sea su límite de error igualmente probable, esto es, cuanto mayor sea el correspondiente valor de h .

Así pues, el parámetro h define la precisión de una serie de observaciones. Este parámetro h fue denominado por Gauss «módulo de precisión» de la serie de observaciones.

Se establecerá a continuación una relación entre el módulo de precisión h y las magnitudes de los errores que probará de una forma efectiva que h crece cuando los errores disminuyen.

Sea una serie de observaciones de igual confianza l_1, l_2, \dots, l_n , en la que se han cometido los errores $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. La probabilidad de cometer todos los errores según (8.6) será

$$P = \prod_{i=1}^n \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_i^2} d\varepsilon_i = \frac{h^n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2 \sum \varepsilon_i^2} \prod_{i=1}^n d\varepsilon_i \quad (11.7)$$

como se trata de errores que efectivamente se han cometido esta probabilidad debe ser máxima, estando los errores ε_i determinados, se determinará h con la condición de que P sea máxima. Para esto se iguala a cero la derivada de P en (11.7) con respecto de h , entonces queda,

$$\frac{dP}{dh} = \frac{nh^{n-1}}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2 \sum \varepsilon_i^2} \prod_{i=1}^n d\varepsilon_i - \frac{2h^{n+1} \sum \varepsilon_i^2}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2 \sum \varepsilon_i^2} \prod_{i=1}^n d\varepsilon_i = 0 \quad (11.8)$$

es decir

$$\frac{h^{n-1}}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-h^2 \sum \varepsilon_i^2} (n - 2h \sum \varepsilon_i^2) = 0 \quad (11.9)$$

de donde se deduce $h = 0$ y también

$$\boxed{h = \sqrt{\frac{n}{2 \sum \varepsilon_i^2}}} \quad (11.10)$$

lo que muestra que h crece cuando ε_i disminuye.

12. PESOS DE LAS OBSERVACIONES

El *peso* p de una observación es una cantidad que indica su grado de confianza. Los pesos de las observaciones dan una idea acerca de la precisión de las mismas y se dan diferentes pesos a las medidas de diferente confianza. Puede considerarse el peso de una observación como el número de veces que la observación se repite dando el mismo resultado numérico. Los pesos son pues, relativos y dependen de la base que se tome.

Se llama *media ponderada* o peso medio de una serie de observaciones a la suma de los productos de cada observación por su peso respectivo dividida por la suma de los pesos, esto es,

$$\frac{p_1 \ell_1 + p_2 \ell_2 + \dots + p_n \ell_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum p_i \ell_i}{\sum p_i} \quad (12.1)$$

Así pues, resulta igual multiplicar una observación ℓ_i por su peso p_i que tomar p_i observaciones a ℓ_i

Se introducen también los pesos diciendo que son cantidades proporcionales a los cuadrados de los módulos de precisión.

$$\frac{p_1}{h_1^2} = \frac{p_2}{h_2^2} = \dots = \frac{p_n}{h_n^2} \quad (12.2)$$

13. ERROR PROBABLE

Se llama *error probable* r de una serie de observaciones al que goza de la propiedad de que la probabilidad de cometer un error menor que él en valor absoluto es igual a 1/2. Dicho de otro modo, es aquel error tal que en la serie total de observaciones existen tantos errores mayores que él como menores.

De acuerdo con (10.2), el error probable, r , queda definido por la condición

$$\theta(hr) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hr} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \quad (13.1)$$

Puede comprobarse mediante una valoración de la integral que se verifica la igualdad para $hr = 0.476936$ de manera que

$$r = 0.476936/h \quad (13.2)$$

Indica esta expresión que el error probable de una serie de observaciones es inversamente proporcional al módulo de precisión, de modo que cuanto menor sea el error probable tanto más precisas son las medidas efectuadas. El nombre de error probable se debe a Galton.

14. ERROR PROMEDIO

El *error promedio* η de una serie de observaciones es la media aritmética de los valores absolutos de los errores verdaderos.

$$\eta = \frac{\sum |\varepsilon_i|}{n} \quad (14.1)$$

Sea una serie de observaciones $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$, en la que se han cometido los errores $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, supuesto que $\varphi(\varepsilon)d\varepsilon$ es la probabilidad de cometer un error de magnitud comprendida entre ε y $\varepsilon+d\varepsilon$, el número de errores pertenecientes a este intervalo será $n|\varepsilon|\varphi(\varepsilon)d\varepsilon$ con su valor. Al considerar todos los errores cometidos en la serie la suma de sus valores absolutos puede representarse por

$$\sum |\varepsilon_i| = \int_{-\infty}^{\infty} n|\varepsilon|\varphi(\varepsilon)d\varepsilon \quad (14.2)$$

y por tanto la media aritmética será

$$\eta = \frac{\sum |\varepsilon_i|}{n} = \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon|\varphi(\varepsilon)d\varepsilon \quad (14.3)$$

tomando $\varphi(\varepsilon)$ por su expresión (8.20)

$$\eta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon| e^{-h^2|\varepsilon|^2} d\varepsilon \quad (14.4)$$

El cálculo de esta integral va a dar la relación existente entre el módulo de precisión h y el error promedio η . En efecto,

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon| e^{-h^2|\varepsilon|^2} d\varepsilon = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \int_0^{\infty} e^{-h^2\varepsilon^2} (-2h^2|\varepsilon|)d\varepsilon \\ &= -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \left[e^{-h^2\varepsilon^2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \cdot (\text{pues } \left[e^{-h^2\varepsilon^2} \right]_0^{\infty} = -1) \end{aligned}$$

Luego

$$\eta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \quad (14.5)$$

Tomando el valor de $\sqrt{\pi} = 1.772465$, resulta

$$\eta = 0.564189/h \quad (14.6)$$

y en virtud de (13.2)

$$\eta = 1.182946r \quad (14.7)$$

También se obtienen las relaciones inversas

$$h = 0.564189\eta \quad (14.8)$$

$$r = 0.845347\eta \quad (14.9)$$

Este parámetro η que se ha llamado error promedio fue llamado por Laplace *error medio*.

15. ERROR MEDIO CUADRÁTICO

Efectuada una serie de observaciones, se llama *error medio cuadrático* m de esta serie a la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de los errores verdaderos correspondientes. (Gauss llama a este error, error medio).

$$m = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} \quad (15.1)$$

Desde el punto de vista estadístico $m = \sigma$ recibe el nombre de desviación típica y σ^2 el de varianza.

Análogamente a como se hizo en el epígrafe anterior, dada una serie de observaciones, la media aritmética de los cuadrados de los errores cometidos viene dada por (momento de orden 2)

$$m^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \quad (15.2)$$

y siguiendo el mismo proceso anterior se van a establecer ahora las relaciones entre el error medio cuadrático y las demás medidas de la precisión. Para ello basta calcular la integral (15.2), esto es

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} 2\varepsilon^2 h^2 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \\ &= \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon e^{-h^2 \varepsilon^2} (-2h^2 \varepsilon) d\varepsilon = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon d(e^{-h^2 \varepsilon^2}) d\varepsilon \end{aligned}$$

Integrando por partes, resulta

$$\begin{aligned} m^2 &= -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \left[\varepsilon e^{-h^2 \varepsilon^2} - \int_0^{\infty} \varepsilon e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \right]_0^{\infty} = \\ &= \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{h^2 \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} h d\varepsilon \end{aligned}$$

puesto que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \varepsilon e^{-h^2 \varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{e^{h^2 \varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{2h^2 \varepsilon e^{h^2 \varepsilon^2}} = 0$$

haciendo el cambio $t = h\varepsilon$ queda

$$m^2 = \frac{1}{h^2 \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{h^2 \sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2h^2}$$

Teniendo en cuenta (8.17). Luego

$$m = \frac{1}{h\sqrt{2}} \quad (15.3)$$

Obsérvese que de (21.3) $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = n/2h^2$, que sustituido en (15.1) da la relación

(15.3). Tomando valores numéricos queda

$$\begin{aligned} m &= 0.707107/h \\ h &= 0.707107/m \end{aligned} \quad (15.4)$$

Sustituyendo h por su valor en (13.2) resulta

$$\begin{aligned} m &= 1.482603r \\ r &= 0.674489m \end{aligned} \quad (15.5)$$

Por otra parte, sustituyendo en (15.3) h por su valor de (14.5) resulta

$$\begin{aligned} m &= \eta \sqrt{\pi/2} = 1.25333 \eta \\ \eta &= m \sqrt{2/\pi} = 0.79787 m \end{aligned} \quad (15.6)$$

Resumiendo, se ha definido el módulo de precisión, peso, error probable, error promedio y error medio cuadrático de una serie de observaciones y también las relaciones existentes entre ellos, las cuales permiten, una vez conocida una de dichas medidas de la precisión, calcular las restantes. En Europa se utiliza preferentemente el error medio cuadrático mientras que en Estados Unidos se usa el error probable. Cada uno presenta sus ventajas y sus inconvenientes.

De todas las medidas de la precisión la mayor es el error medio cuadrático y la menor es el error probable.

Ahora bien, las definiciones de las medidas de la precisión vistas hasta ahora no son calculables en la práctica. En particular, el error medio cuadrático se define como la raíz cuadrada de la media aritmética de los errores verdaderos; pero estos errores verdaderos no son conocidos ni pueden conocerse a partir de los datos de observación de que se disponga. Es pues necesario buscar por otro camino el

modo de calcular estas medidas de la precisión, según el tipo de observación de que se trate; normalmente esto se hace en función de los errores residuales posibles de determinar prácticamente.

Como $h^2 = 1/2\sigma^2$ por (15.3), si sustituimos en (8.20) resulta que en términos de σ la ley normal de Gauss queda representada por una función de densidad del tipo

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\varepsilon^2/2\sigma^2} \quad (15.7)$$

diciéndose que se trata de una variable aleatoria normal de media 0 y varianza σ^2 y se escribe $N(0, \sigma)$. En el caso de considerar errores residuales (7.1) se tiene

$$\varphi(\ell) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\ell - \bar{\ell})^2/2\sigma^2} \quad (15.8)$$

entonces se escribe $N(\bar{\ell}, \sigma)$ donde $\bar{\ell}$ es la media aritmética (el valor más probable de la serie) también denominado *esperanza matemática de ℓ* que se calcula por la integral.

$$\bar{\ell} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \ell \varphi(\ell) d\ell \quad (15.9)$$

Partiendo de los postulados de la Teoría de Errores resulta que el valor de σ dado por (15.1) es el que hace máxima la probabilidad de ocurrencia de los errores, en efecto, escribamos la expresión (8.6) en términos de σ utilizando (15.7), esto es

$$P = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\varepsilon_i^2/2\sigma^2} d\varepsilon_i = \frac{h^n}{\sigma^n (\sqrt{2\pi})^n} e^{-\sum \varepsilon_i^2/2\sigma^2} \prod_{i=1}^n d\varepsilon_i \quad (15.10)$$

el máximo de esta función se obtiene igualando a cero su derivada respecto de σ , es decir

$$\frac{dP}{d\sigma} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \left[\frac{-n}{\sigma^{n+1}} + \frac{1}{\sigma^{n+3}} \sum \varepsilon_i^2 \right] e^{-\sum \varepsilon_i^2/2\sigma^2} \prod_{i=1}^n d\varepsilon_i = 0$$

de manera que,

$$-n\sigma^2 + \sum \varepsilon_i^2 = 0$$

o bien

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum \varepsilon_i^2 \quad (15.11)$$

como queríamos confirmar.

16. EXACTITUD EN LA DETERMINACION DEL MODULO DE PRECISION Y DEL ERROR MEDIO CUADRATICO

Sea una serie de observaciones $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ en la que se han cometido unos errores $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ y sea h el módulo de precisión de la serie

Si se supone que h toma el valor H en toda la serie la probabilidad de ocurrencia de todos los errores, según (11.7) es

$$\frac{H^n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-H^2 \sum \varepsilon_i^2} \prod_{i=1}^n d\varepsilon_i \quad (16.1)$$

Análogamente si se supone que h toma el valor $H+\lambda$ la probabilidad de ocurrencia del mismo suceso anterior es

$$\frac{(H+\lambda)^n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-(H+\lambda)^2 \sum \varepsilon_i^2} \prod_{i=1}^n d\varepsilon_i \quad (16.2)$$

aplicando el principio de probabilidad inductiva la proporcionalidad entre la probabilidad de que $H+\lambda$ sea el verdadero valor de h y la probabilidad de que lo sea H será el cociente entre las expresiones (16.2) y (16.1), esto es,

$$R = \left(1 + \frac{\lambda}{H}\right)^n e^{-(2H\lambda + \lambda^2) \sum \varepsilon_i^2} \quad (16.3)$$

Ahora bien, si se supone que H es el valor más probable de h , es decir aquel que hace (26.1) máximo, según (21.3) resulta

$$H = \sqrt{\frac{n}{2\sum \varepsilon_i^2}} \quad (16.4)$$

de donde

$$\sum \varepsilon_i^2 = \frac{n}{2H^2} \quad (16.5)$$

y por consiguiente la expresión (16.3) puede escribirse

$$R = \left(1 + \frac{\lambda}{H}\right)^n e^{-(2H\lambda + \lambda^2)n/2H^2} \quad (16.6)$$

o bien

$$R = \text{Exp} \left\{ -\frac{\lambda n}{H} \left(1 + \frac{\lambda}{2H}\right) + n \log \left(1 + \frac{\lambda}{H}\right) \right\} \quad (16.7)$$

y desarrollando en serie queda:

$$R = \text{Exp} \left\{ \frac{n\lambda^2}{H^2} + \frac{n\lambda^3}{H^3} - \dots \right\} \quad (16.8)$$

y como λ es muy pequeño en comparación con H , en una primera aproximación queda

$$R = \text{Exp} \left\{ - \frac{n\lambda^2}{H^2} \right\} \quad (16.9)$$

Por tanto la probabilidad de que el valor h esté comprendido entre $H+\lambda$ y $H+\lambda+d\lambda$ es, en primera aproximación

$$K e^{-n\lambda^2/H^2} d\lambda \quad (16.10)$$

donde K es una constante, la cual y puesto que

$$\int_{-\infty}^{\infty} K e^{-n\lambda^2/H^2} d\lambda = 1 \quad (16.11)$$

viene dada para $h = \sqrt{n/H^2}$ por (ver 8.19)

$$K = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \quad (16.12)$$

por consiguiente la probabilidad de que el valor de h esté comprendido entre $H+\lambda$ y $H+\lambda+d\lambda$ es

$$\frac{1}{H} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n\lambda^2/H^2} d\lambda \quad (16.13)$$

Esto quiere decir que el módulo de precisión para la determinación de h por (11.10) es

$$\sqrt{\frac{n}{h}} \quad (16.14)$$

A partir de aquí se deduce inmediatamente que la probabilidad de que el error medio cuadrático m determinado por (15.1) esté comprendido entre $m+\varepsilon$ y $m+\varepsilon+d\varepsilon$ es

$$\frac{\sqrt{n}}{m\sqrt{\pi}} e^{-n\varepsilon^2/m^2} d\varepsilon \quad (16.15)$$

También se deduce que el módulo de precisión para la determinación del error medio cuadrático por el método de la raíz cuadrada es $\sqrt{n/m}$

A estos resultados y otros similares llega Gauss en: Werke, 4, pág. 109. (cf. Whittaker and Robinson *The Calculus of Observations*, Blackie 1924).

17. DETERMINACION DE LAS MEDIDAS DE LA PRECISION DE UNA FUNCION DE MAGNITUDES DETERMINADAS EXPERIMENTALMENTE

Sea la función

$$X = F(y_1, y_2, \dots, y_k) = F(y_i) \quad i=1, \dots, k \quad (17.1)$$

de las magnitudes y_1, y_2, \dots, y_k cuyos valores han sido determinados por observación. Supóngase que realizadas las respectivas series de observaciones se han obtenido los valores

$$x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n \text{ para } y_1$$

$$x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n \text{ para } y_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n \text{ para } y_k$$

en general

$$x_i^j \text{ para } y_i, \quad i=1, \dots, k; \quad j=1, \dots, n \quad (17.2)$$

entonces los errores cometidos serán

$$\varepsilon_1^j = y_1 - x_1^j$$

$$\varepsilon_2^j = y_2 - x_2^j$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varepsilon_k^j = y_k - x_k^j$$

en general

$$\varepsilon_i^j = y_i - x_i^j \quad (17.3)$$

Supongamos conocidas las medidas de la precisión de las series de observaciones, por ejemplo, sean m_1, m_2, \dots, m_k los errores medios cuadráticos correspondientes. El problema que se plantea consiste en determinar las medidas de la precisión de X en función de las medidas de la precisión de y_i .

Sustituyendo en (17.1) las y_i por sus valores observados x_i^j resultará el conjunto de expresiones

$$X^j = F(x_1^j, x_2^j, \dots, x_k^j) = F(x_i^j), \quad i=1, \dots, k; \quad j=1, \dots, n$$

reemplazando los x_i^j por sus verdaderos valores deducidos de (17.3) resulta

$$X = F(y_1 - \varepsilon_1^j, y_2 - \varepsilon_2^j, \dots, y_k - \varepsilon_k^j) = F(y_i - \varepsilon_i^j) \quad (17.4)$$

Desarrollando en serie de Taylor estas expresiones y limitando los desarrollos a los términos de primer grado en ε_i^j resulta

$$\begin{aligned} X^j &= F(y_1, y_2, \dots, y_k) - \frac{\partial F}{\partial y_1} \varepsilon_1^j - \frac{\partial F}{\partial y_2} \varepsilon_2^j - \dots - \frac{\partial F}{\partial y_k} \varepsilon_k^j + \dots \\ &= F(y_1) - \sum_{i=1}^k \frac{\partial F}{\partial y_i} \varepsilon_i^j + \dots \end{aligned}$$

En estas condiciones los errores globales de la magnitud X obtenida mediante la función (1.1) serán, en las diferentes observaciones de la serie

$$\delta_j = X - X^j = \sum_{i=1}^k \frac{\partial F}{\partial y_i} \varepsilon_i^j + \dots$$

y si se adopta la notación

$$D_i = \frac{\partial F}{\partial y_i}$$

resulta

$$\delta_j = \sum_{i=1}^k D_i \varepsilon_i^j + \dots \quad (17.5)$$

En estas condiciones el error medio cuadrático de X será

$$M = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \delta_j^2}$$

de donde

$$M^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_j^2 \quad (17.6)$$

Sustituyendo en (17.6) δ_j por su valor en (17.5) queda

$$M^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^k D_i \varepsilon_i^j \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^k D_i^2 \varepsilon_i^j{}^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} D_i \varepsilon_i^j \sum_{p=i+1}^k D_p \varepsilon_p^j + \dots \right)$$

ordenando respecto de D_i

$$M^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k D_i^2 \sum_{j=1}^n \varepsilon_i^j{}^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} D_i \sum_{p=i+1}^k D_p \sum_{j=1}^n \varepsilon_i^j \varepsilon_p^j + \dots$$

Ahora bien, según el segundo postulado de la teoría de errores a cada ε_i^j le corresponde un $-\varepsilon_i^j$ de tal forma que la suma de los productos $\sum_{j=1}^n \varepsilon_i^j \varepsilon_p^j$ tiende a cero y queda

$$M^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k D_i^2 \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}^2 \quad (17.7)$$

Ahora bien, por definición

$$m_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}^2$$

y sustituyendo en (17.7) resulta

$$M^2 = \sum_{i=1}^k D_i^2 m_i^2$$

de donde

$$M = \sqrt{\sum_{i=1}^k D_i^2 m_i^2} \quad (17.8)$$

Desarrollando y volviendo a la notación original, resulta

$$M^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial y_1} \right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_2} \right)^2 m_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} \right)^2 m_k^2$$

donde los m_i^2 son los errores medios cuadráticos de las observaciones y_i que se han supuesto conocidos.

Teniendo en cuenta las relaciones (15.3) a la (15.6) existentes entre el error medio cuadrático y las restantes medidas de la precisión, resultan las siguientes expresiones para las distintas medidas de la precisión de la función $X = F(y_i)$ (M, H, R, P, η) en función de las medidas de la precisión de las y_i (m, h, r, p, η).

$$\begin{aligned} M^2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial y_1} \right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_2} \right)^2 m_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} \right)^2 m_k^2 \\ \frac{1}{H^2} &= \left(\frac{\partial F}{\partial y_1} \right)^2 \frac{1}{h_1^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial y_2} \right)^2 \frac{1}{h_2^2} + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} \right)^2 \frac{1}{h_k^2} \\ R^2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial y_1} \right)^2 r_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_2} \right)^2 r_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} \right)^2 r_k^2 \quad (17.10) \\ \frac{1}{P} &= \left(\frac{\partial F}{\partial y_1} \right)^2 \frac{1}{P_1} + \left(\frac{\partial F}{\partial y_2} \right)^2 \frac{1}{P_2} + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} \right)^2 \frac{1}{P_k} \\ \eta^2 &= \left(\frac{\partial F}{\partial y_1} \right)^2 \eta_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_2} \right)^2 \eta_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} \right)^2 \eta_k^2 \end{aligned}$$

Como caso particular se va a suponer ahora que la función F es una función lineal de las magnitudes y_i . Sea

$$X = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_k y_k = \sum_{i=1}^k a_i y_i$$

En este caso

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = a_i$$

y por tanto si m_i , h_i , r_i , p_i y η_i son las medidas de la precisión de las y_i , resultan para la X los parámetros siguientes:

$$\begin{aligned} M^2 &= a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + \dots + a_k^2 m_k^2 = \sum a_i^2 m_i^2 \\ \frac{1}{H^2} &= \frac{a_1^2}{h_1^2} + \frac{a_2^2}{h_2^2} + \dots + \frac{a_k^2}{h_k^2} \\ R^2 &= a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2 + \dots + a_k^2 r_k^2 \\ \frac{1}{P} &= \frac{a_1^2}{P_1} + \frac{a_2^2}{P_2} + \dots + \frac{a_k^2}{P_k} \\ \eta^2 &= a_1^2 \eta_1^2 + a_2^2 \eta_2^2 + \dots + a_k^2 \eta_k^2 \end{aligned} \quad (17.11)$$

Esta función lineal presenta tres casos interesantes

1.- F es la **suma** de las y_i

$$X = \sum_{i=1}^k y_i, \text{ entonces, } \frac{\partial F}{\partial y_i} = 1$$

y resulta

$$M^2 = \sum_{i=1}^k m_i^2, \frac{1}{H^2} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{h_i^2}, R^2 = \sum_{i=1}^k r_i^2, \frac{1}{P} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{P_i}, \eta^2 = \sum_{i=1}^k \eta_i^2$$

2.- F es la **media aritmética** de las y_i

$$X = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i, \text{ entonces, } \frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{1}{k}$$

y resulta

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k m_i^2, \frac{1}{H^2} = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{h_i^2}, R^2 = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k r_i^2, \frac{1}{P} = \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{P_i}, \eta^2 = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \eta_i^2 \end{aligned}$$

Si todas las observaciones son de la misma confianza resulta

$$M^2 = \frac{1}{k} m_i^2, \frac{1}{H^2} = \frac{1}{k} \frac{1}{h_i^2}, R^2 = \frac{1}{k} r_i^2, \frac{1}{P} = \frac{1}{k} \frac{1}{P_i}, \eta^2 = \frac{1}{k^2} \eta_i^2$$

3.- Por último, sea $F = ca$, donde c es una constante y a una magnitud determinada por observación

$$F = ca, \text{ entonces } \frac{\partial F}{\partial a} = c$$

y resulta

$$M = cm_a, \frac{1}{H} = \frac{c}{h_a}, R = cr_a, P = \frac{P_a}{c}, \eta = c\eta_a$$

Obsérvese que $P = p_a/c$ indica que si se tiene una magnitud a de peso p_a y se multiplica a por la raíz cuadrada de su peso $\sqrt{p_a}$, resulta la función $a\sqrt{p_a}$ que tiene peso unidad, pues

$$P = p_a/p_a = 1.$$

Esta última relación es muy utilizada en Teoría de Errores. La generación de estas fórmulas conduce a la llamada Ley de Propagación de las Varianzas.

BIBLIOGRAFIA DE CONSULTA

- BJERHAMMAR, A. (1973): «Theory of errors generalized matrix inverses». Elsevier Scientific Pub. Co. Amsterdam.
- FAREBROTHER, R.W. (1988): «Linear Least Squares Computations». Marcel Dekker Inc. New York.
- FRANKLIN, W.S. (1925): «An Elementary treatise on Precision of Measurements». Franklin and Charles. Lancaster Pa.
- GOEDSEELS, P.J.E. (1907): «Theorie des erreurs d'observation. Louvain.
- GOODWIN, H.M. (1920): «Precision of measurements and graphical methods». McGraw Hill. New York.
- GRAYBIL, F.A. (1976): «Theory and Application of the Liner Model». Wadsworth and Brooks. California.
- HIRVONEN, R.A. (1971): «Adjustment by Least Squares in Geodesy and Photogrammetry». Frederick Ungar Publ. C. New York.
- HROMADKA II, TH.V., CH.CH YEN, G.F. PINDER (1987): «The best Approximation Method an Introduction». Springer Verlag. Berlín.
- JASCHEK, C. and F. MURTAGH (1990): «Errors, Bias and Uncertainties in Astronomy». Cambridge Univ. Press. Cambridge.

- KOCH, K.R. (1990): «Bayesian Inference with Geodetic Applications». Springer Verlag. Berlín.
- KUBACKOVA, L., L. KUBACEK and J. KUKUCA (1987): «Probability and Statisticsw in Geodesy and Geophysics». Elsevier. Amsterdam.
- LEVALLOIS, J.J. (1970): «Géodésie Générale». Tomo 1. Eyrolles. París.
- LINNIK, I.V. (1963): «Méthode des Moindres Carrés». Dunod. París.
- LIPTSER, R.S. and A.N. SHIRYAYEV (1978): «Statistics of Random Processes. General Theory». Springer Verlag. New York.
- MIKHAIL, E.M. (1976): «Observations and Least Squares». IEP A Dun-Donnelley Pub. New York.
- MIKHAIL E.M. and G. GRACIE (1981): «Analysis and adjustment of Survey Measurements». Van Nostrand. New York.
- THIELE, T.N. (1903): «Theory of Observations». Layton, London.
- WRIGHT, I.W. and J.F. HAYFORD (1906): «The Adjustment of Observations». D. Van Nostrand Company Inc. New York.