

Controlé intrinseque d'une trilatération pure

RAFAEL N. SÁNCHEZ ET SONIA SIMARD
Université Laval, Québec

RÉSUMÉ

La détermination des positions relatives de repères dans l'espace telle que requise dans les villes ou en montagne peut se faire rapidement et exactement à l'aide des distancemètres comme, par exemple, l'excellent Di2000, à condition de bien contrôler les excentricités verticales et réduire les distances aux repères permanents. Le choix de points appropriés est généralement beaucoup plus simple que les stations pour les récepteurs GPS. Les six points de l'exemple présenté dans cet article sont dans le campus de l'Université et se situent dans un espace de 400 m long, 250 m large et 45 m haut. Seulement deux de ces points seraient acceptables comme stations de récepteurs GPS. Le contrôle des côtés mesurés ainsi que la compensation par la technique des paramètres et des conditions ont manipulé les côtés intrinsèquement sans recours aux coordonnées.

INTRODUCTION

On sait que quatre points dans l'espace sont déterminés relativement par la mesure de six côtés, que cinq requièrent la mesure de neuf côtés mais laissent mesurer dix. Toujours limitées aux seules distances dont les mesures sont rapides et très précises, six points exigent au moins de mesurer douze côtés mais permettent d'en observer quinze, ce qui améliore le contrôle des opérations. Dans le campus le choix de six points a permis de mesurer quatorze côtés en quelques heures de travail de deux opérateurs. Douze des quatorze côtés —après leur réduction précise aux repères— ont permis de calculer les deux autres afin de comparer les résultats avec les valeurs observées —et aussi réduites aux repères— de ces deux derniers côtés. Le côté 46 impossible à observer fut aussi calculé et ce toujours sans avoir recours aux coordonnées.

LE CONTRÔLE INTRINSÈQUE

Expliquons d'abord le contrôle d'un côté à partir de neuf autres côtés pour cinq points dans l'espace. Le point #1 est un sommet commun à six triangles plans. Pour cinq de ces triangles les angles à #1 se calculent par trigonométrie plane en termes des trois côtés. Le triangle 135 est exclu afin de calculer le côté 35 à partir des neuf autres et contrôler la valeur mesurée. Les directions d #1 à #2, à #3, ... à #5 composent deux trièdres accolés dans l'espace dont les angles faciaux sont ceux calculés plus haut qui s'identifient aux cinq côtés des triangles sphériques (Fig. 1) sur une sphère centrée à #1. En suite par la trigonométrie sphérique on calcule les deux angles au sommet 2 et finalement leur somme permet de calculer le côté sphérique 35 à l'aide des côtés 23 et 25. Ce résultat est l'angle facial #3#1#5 qui se combine avec les distances mesurées (et naturellement bien réduites aux repères) #1#3 et #1#5 afin de calculer le côté #3#5 à comparer avec la valeur mesurée.

Bien entendu la trigonométrie sphérique pourrait être substituée par la manipulation de vecteurs unitaires dont l'origine est le point #1. L'axe X identifié, par exemple, à la direction vers #2 et le plan XY passant par le #4 on aura les vecteurs v_2 et v_4 transposés suivantes

$$v_2 = (1 \ 0 \ 0) \text{ et } v_4 = (\cos(24) \ \sin(24) \ 0)$$

Pour le vecteur v_3 on connaît le premier cosinus directeur $cX_3 = \cos(23)$ mais aussi le produit scalaire $v_3 \cdot v_4 = \cos(34)$ est connu de sorte que l'expression

$$v_3 \cdot v_4 = \cos(34) = (\cos(23) \ cY_3 \ cZ_3) \cdot (\cos(24) \ \sin(24) \ 0)^T$$

permet de calculer cY_3 et ensuite $cZ_3 = (1 - cX_3^2 - cY_3^2)^{1/2}$

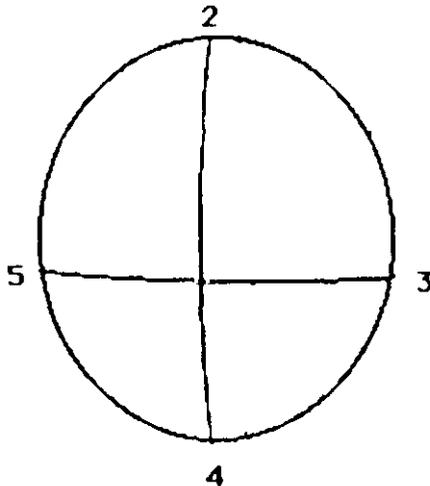


Figure 1

positif si l'axe Z est dirigé vers la droite dans la Fig. 1. Une fois répétée la procédure pour v_5 (où cZ_5 sera négatif) le produit scalaire $v_3.v_5$ laisse l'angle facial #3#1#5 et ensuite le côté #3#5 cherché pour le contrôle.

Afin d'additionner le #6 et contrôler, par exemple, la mesure du côté #5#6 on fait appel en plus aux côtés #1#6, #2#6 et #3#6. Toujours dans l'approche sphérique (Fig 2) le calcul des angles à 2 permet de résoudre le triangle 256 et déterminer le côté 56 qui est l'angle facial #5#1#6 cherché pour le calcul du côté #5#6. C'est le cas du réseau du campus où deux côtés surabondants ont été contrôlés —pour six points— à partir de douze côtés indispensables. Le Tableau I présente les 14 distances réduites aux repères de ce réseau. Les différences des côtés contrôlés (calculé - observé) ont été

$$\#3\#5: -2,7\text{mm} \quad \#5\#6: 0,4\text{mm}$$

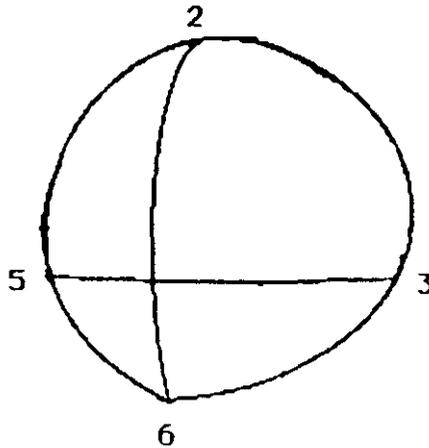


Figure 2

REPÈRES	2	3	4	5	6
1	495,9321	529,5564	266,1770	161,6178	458,5753 m
2		76,58,54	389,7116	506,6916	395,3770 m
3			384,0181	559,1746	470,8382 m
4				394,0566	
5					340,9924 m

Tableau I

LA COMPENSATION PAR MOINDRES CARRÉS (MC)

Choisissons les douze côtés de base (tous les côtés mesurés sauf #3#5 et #5#6) comme les paramètres définissant le polyèdre. Les équations d'observation pour les douze côtés de base s'écrivent comme suit,

$$v_{ij} = S(\text{compensé})_{ij} - S(\text{obs.})_{ij} = X_{ij}$$

c'est-à-dire v_{ij} égale la correction à déterminer par MC si la valeur provisoire est identifiée à celle mesurée. Pour les observations #3#5 et #5#6 les distances compensées doivent tenir compte des douze paramètres ainsi que des dérivées partielles des éléments 35 et 56 par rapport aux douze côtés de base ainsi que des deux valeurs de contrôle calculées tel qu'expliqué plus haut,

$$v_{35} = S(\text{comp.})_{35} - S(\text{obs.})_{35} = S(\text{calc.})_{35} + d(S_{35})/d(S_{12})x_{12} + \dots - S(\text{obs})_{35}$$

Les dérivées partielles s'obtiennent numériquement par perturbations de 1 mm par tour des douze côtés de base, toujours à l'aide de l'algorithme utilisé pour le contrôle déjà expliqué. Le Tableau II présente la matrice A correspondant au réseau du campus. Le Tableau III donne les x_{ij} de la solution à poids constant.

Par:	\bar{x}_{12}	\bar{x}_{13}	\bar{x}_{14}	\bar{x}_{15}	\bar{x}_{16}	\bar{x}_{23}	\bar{x}_{24}	\bar{x}_{25}	\bar{x}_{26}	\bar{x}_{34}	\bar{x}_{36}	\bar{x}_{45}
Obs												
12	1											
13		1										
14			1									
15				1								
16					1							
23						1						
24							1					
25								1				
26									1			
34										1		
35	,254	-,277	,030	-,013	,000	,835	-,935	,897	,000	,931	,000	,155
36											1	
45												1
56	-2,55	1,983	-,059	-,566	1,037	-1,938	1,842	,953	-1,305	-1,829	1,021	-,304

Tableau II. Matrice A

$$\begin{aligned} x_{12} &= -0,1646 \text{ mm} \\ x_{13} &= 0,0677 \\ x_{14} &= 0,0154 \\ x_{15} &= -0,0814 \\ x_{16} &= 0,1491 \\ x_{23} &= 0,3801 \\ x_{24} &= -0,4742 \\ x_{25} &= 0,8450 \\ x_{26} &= -0,1877 \\ x_{34} &= 0,4721 \\ x_{35} &= -0,7893 \\ x_{36} &= 0,1467 \\ x_{45} &= 0,0786 \\ x_{56} &= -0,1438 \text{ mm} \end{aligned}$$

Tableau III

Quant à l'autre voie on pose les deux conditions

$$C1: S(\text{calc})_{35} + d(S_{35})/d(S_{12})x_{12} + \dots - (S(\text{obs})_{35} + x_{35}) = 0$$

C2: (forme équivalente pour 56)

Or, le minimum de

$$(x_{12})^2 + \dots + (x_{56})^2 - 2k_1C_1 - 2k_2C_2$$

pour poids constant, laisse écrire les équations corrélatives

$$x_{12} = d(S_{35})/d(S_{12})k_1 + d(S_{56})/d(S_{12})k_2$$

.....

et finalement celles normales typiques

$$\begin{aligned} D_{11}k_1 + D_{12}k_2 + w_1 &= 0 \\ D_{12}k_1 + D_{22}k_2 + w_2 &= 0 \end{aligned}$$

où les D sont les sommes bien connues des carrés ou des produits des dérivées partielles. La voie des conditions a permis de confirmer les résultats du Tableau III.

Evidemment le polyèdre contrôlé et ajusté est indépendant des verticales et de toute hypothèse sur la forme de la terre. Les côtés étant de centaines de mètres, leur précision pourrait bien se situer aux environs du mm. A condition de bien calibrer le distancemètre la méthode s'appliquerait particulièrement à la surveillance de déformations étant donné le coût minime des opérations de mesure et la facilité quant aux choix des sites d'implantation des repères.

.....
Ste-Foy, 19 mars 1993.