

# *Sensibilidad de la colocación respecto a las dimensiones y uso de las zonas de predicción*

GEMA RODRÍGUEZ VELASCO y MIGUEL J. SEVILLA  
Instituto de Astronomía y Geodesia (UCM-CSIC)  
Facultad de Ciencias Matemáticas  
Universidad Complutense. 28040 MADRID

## **RESUMEN**

Se han hecho una serie de pruebas sobre la influencia de distintos parámetros que aparecen en el ajuste de las funciones covarianza locales y regionales usadas para predecir ondulaciones de geoide por el método de colocación mínimo cuadrática sobre Portugal. Se presenta la contrastación de los resultados obtenidos así como un estudio de la colocación como método de predicción local y regional.

## **1. INTRODUCCION**

En la aplicación del método de colocación mínimos cuadrados tienen especial interés las funciones covarianza de distintas cantidades del campo de la gravedad que se calculan ajustando valores obtenidos empíricamente a determinados modelos que dependen de una serie de parámetros, (Tscherning and Rapp, 1974, Tscherning, 1985a, Knudsen, 1987). *Conviene estudiar la importancia e influencia en el resultado final de la predicción de estos parámetros a fin de establecer unos criterios de preferencia y metodología claros para aplicaciones posteriores.*

Relacionados con la elección de una función de covarianza que represente al campo de la gravedad localmente se encuentran también los problemas de influencia del tamaño de las zonas tanto de predicción como de datos y la posibilidad de usar el método de colocación como método de extrapolación.

Para evaluar tales efectos se llevaron a cabo una serie de pruebas de determinación del geoide (sin corrección topográfica), sobre Portugal, cuyos resultados se exponen en las secciones siguientes.

## **2. ZONAS DE TRABAJO**

Se consideran tres zonas de datos de tres grados de extensión en latitud cada una de ellas con datos distribuidos a una distancia media de 2' entre sí, aunque

no se trata de una cuadrícula perfecta. Los datos de que se dispone son anomalías aire libre de la gravedad referidas al sistema de referencia GRS80 validadas mediante aplicación reiterada del método de colocación (Sevilla et al. 1991), para calcular anomalías residuales se usó el modelo de geopotencial IFE88E2 (Basic et al. 1990), que se estimó el más adecuado para la zona.

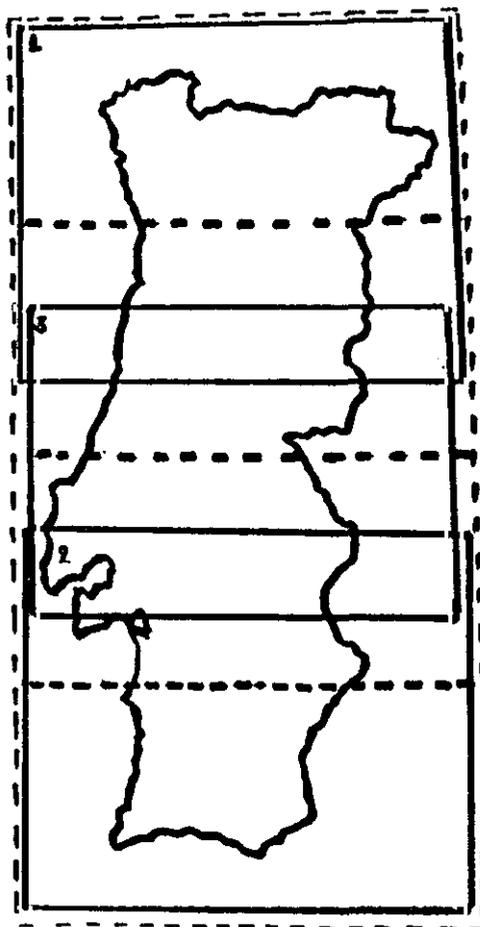


Figura 1. Distribución de zonas en Portugal.

Se obtuvieron las funciones covarianza de estos datos con las que se procedió a la predicción de ondulaciones del geoide en una zona interna a la de datos de  $2.5^\circ$  en latitud, siguiendo el esquema general de aplicación de la colocación (Sevilla et al, 1992a). Esta predicción se llevó a cabo usando el programa GEOCOL (Tscherning, 1985b).

Las zonas elegidas como zonas de datos se encuentran superpuestas para conseguir que las zonas de predicción, internas a ellas, cubran todo el territorio. Estas zonas a su vez tienen una franja de medio grado de superposición entre sí que permita comparar las predicciones con datos de una y otra zona. (Fig.1). Las dimensiones de las respectivas zonas son las siguientes:

ZONAS DE DATOS	ZONAS DE PREDICCIÓN
ZONA 1: 39.5 < $\Phi$ < 42.5	ZONA 1: 40.0 < $\Phi$ < 42.5
ZONA 2: 36.5 < $\Phi$ < 39.5	ZONA 2: 36.5 < $\Phi$ < 39.0
ZONA 3: 38.0 < $\Phi$ < 41.0	ZONA 3: 38.5 < $\Phi$ < 40.5

### 3. ESTUDIO DEL EFECTO DEL CAMBIO DE LA REGION DE ARMONICIDAD

Una función covarianza global, armónica isótropa en el espacio, puede expresarse según la forma general (Moritz, 1980):

$$C(P,Q) = A \sum_{n=0} c_n \left( \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+2} P_n(\cos\psi) = C(\psi) \quad (1)$$

y que por el valor de las varianzas grado del modelo elegido en el caso de la gravedad admite un desarrollo de la forma:

$$C(P,Q) = a \sum_{n=2}^N c_n \left( \frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{n+2} P_n(\cos\psi) + \sum_{n=N+1} \frac{A(n-1)}{(n-2)(n+B)} \left( \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+2} P_n(\cos\psi) \quad (2)$$

(Tscherning et al., 1974), siendo  $R_B$  el radio de la esfera de Bjerhammar, o esfera totalmente interior a la Tierra que define la región de armonicidad de los desarrollos (1) y (2).  $R_B$  actúa como uno de los parámetros para proceder al ajuste de la función covarianza a un modelo, (Knudsen, 1987, Arabelos et al., 1987).

Con el fin de saber hasta qué punto un ajuste más fino de este parámetro frente al de los otros dará lugar a una mejor calidad de la predicción, se llevó a cabo un estudio de las variaciones presentadas en el cálculo de ondulaciones del geóide en cada zona considerando todos los parámetros locales (obtenidos de ajustar una covarianza local), y dichos parámetros locales salvo el radio  $R_B$ , que se sustituye por el radio correspondiente al ajuste de una función covarianza regional, con datos de todo Portugal. A este último lo llamamos radio regional.

Es decir, se trata de ver la influencia que tiene sobre la predicción, la variación de la región de convergencia que proporciona un cálculo local con la que resulta

de un cálculo regional. Este estudio será de mucha utilidad ya que no está claro que se puedan mezclar las predicciones para las distintas zonas, cada una calculada para una región de convergencia distinta, y lo que se hace es calcular usando un radio medio.

Tabla 1: Frecuencias de las diferencias entre predicción con radio local y con radio regional

RANGO DE LAS DIFERENCIAS OBTENIDAS	ZONAS		
	1	2	3
mayores que 10 cm	21	89	11
entre 5 y 10 cm	92	94	45
entre 1 y 5 cm	276	138	255
entre 0 y 1 cm	107	84	192
diferencias nulas	108	109	226
entre 0 y -1 cm	145	69	169
entre -1 y -5 cm	301	147	28
entre -5 y -10 cm	73	108	53
negativas mayores que 10 cm	24	97	6
<b>TOTAL DE PUNTOS</b>	1.147	925	1.225

## RESULTADOS

La Tabla 1 muestra las frecuencias de las diferencias obtenidas que agrupadas en intervalos de igual amplitud dan lugar al histograma de la Figura 2. Las diferencias mayores no se distribuyen según ningún criterio ni geográfico, ni de origen de los datos. Como puede verse, las diferencias rara vez llegan a superar los 5 centímetros y su distribución es bastante simétrica respecto del cero. Como conclusión, siempre que el campo no sea excesivamente rugoso en la zona, la elección de la región de convergencia de los desarrollos es más un problema teórico que práctico a efecto de los resultados obtenidos en predicción. No parecen observarse grandes diferencias si se selecciona como radio de la esfera de Bjerhammar un promedio de valores garantizados.

### 4. ESTUDIO DEL EFECTO DE LA EXTRAPOLACION DE LA FUNCION COVARIANZA LOCAL

La idea del método de la colocación es usar como núcleo reproductor una función covarianza obtenida por ajuste de valores empíricos de cantidades del campo de la gravedad observadas, y los resultados serán tanto más fiables según que la función obtenida represente en realidad al comportamiento del campo (Tscherning, 1985a).

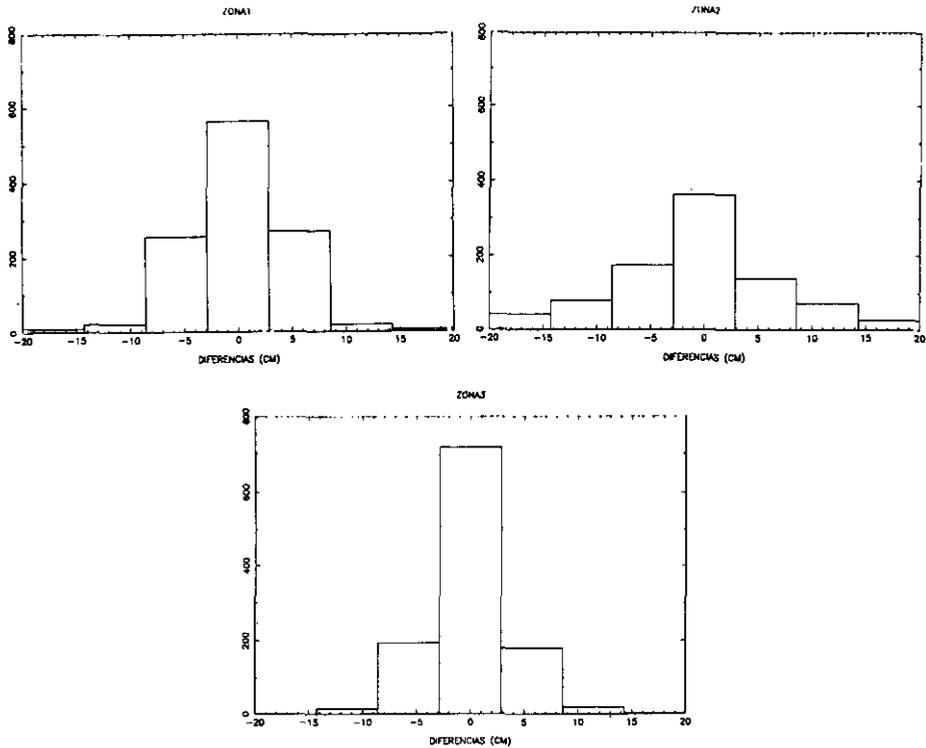


Figura 2. Histograma de las diferencias entre predicciones con radio local y regional.

Se trató de estudiar el efecto de la extrapolación en la predicción de geoides por colocación, es decir, si una covarianza local en una zona resulta igualmente

Tabla 2: Frecuencias de las diferencias entre predicción local y extrapolación

RANGO DE LAS DIFERENCIAS OBTENIDAS	ZONAS	
	1	2
mayor que 10 cm	186	235
entre 5 y 10 cm	116	74
entre 1 y 5 cm	180	90
entre 0 y 1 cm	57	22
diferencias nulas	91	25
entre 0 y -1 cm	59	21
entre -1 y -5 cm	141	92
entre -5 y -10 cm	110	120
negativas mayores que 10 cm	207	246
<b>TOTAL DE PUNTOS</b>	<b>1.147</b>	<b>925</b>

eficiente, o lo que es lo mismo, si es capaz de ser representativa del campo en una zona exterior a los datos que sirvieron para generarla. A priori suponemos que dependerá en gran medida de la rugosidad del campo. Para ello se compararon los resultados de dos predicciones: una usando la función covarianza local calculada a partir de los datos de la zona que engloba a la de predicción, y otra con una función de covarianza de una zona adyacente pero totalmente exterior. En este último caso también se usó el radio que hemos llamado regional para el ajuste de la función para dar una mayor uniformidad.

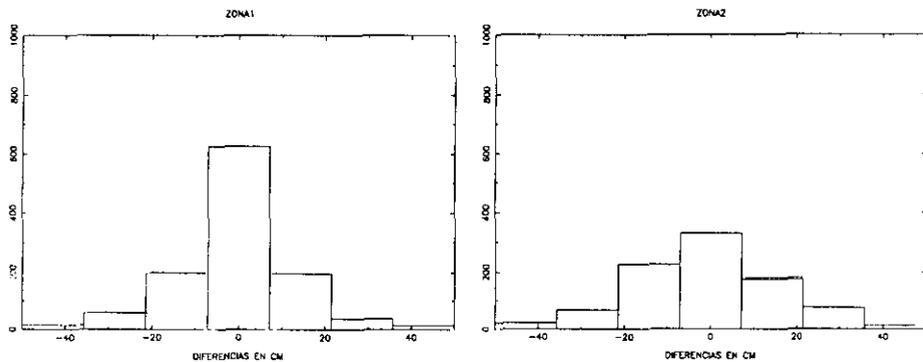


Figura 3. Histograma de las diferencias entre predicciones locales y extrapolaciones.

Este experimento no se repitió para la zona 3 puesto que ninguna de las zonas de datos es totalmente exterior a ella, (ver Figura 1).

Como puede verse en la Tabla 2 y en la Figura 3, las diferencias son bastante mayores que en el caso anterior, por lo que se concluye que la extrapolación debe evitarse en el uso de la colocación mínimo cuadráticas. La base teórica de este resultado es clara.

## 5. ESTUDIO DEL EFECTO DEL CAMBIO DE COVARIANZA LOCAL A COVARIANZA REGIONAL

### 5.1. Predicciones locales

Se trata de estudiar el efecto producido en el geoide predicho al cambiar sólomente de una función covarianza local a una regional, manteniendo tanto la zona de predicción como los datos en ambos casos. Es decir, se usa el método de colocación para predicciones locales pero tomando como función de covarianza una que represente al campo de la gravedad en una región considerablemente mayor, construida a partir del bloque total de datos. Con esta mezcla de aplicación local/regional se pretende ver la influencia de la covarianza elegida siempre y cuando la zona esté representada en la región.

Como se ve en la Figura 4 y en la Tabla 3, en general las diferencias son pequeñas y en las zonas 1 y 2 muestran una distribución bastante simétrica respecto del cero, lo que nos dice que no existe sesgo en la predicción según se obtenga con uno u otro tipo de función covarianza.

Tabla 3: Frecuencias de las diferencias entre predicción con covarianza local o con covarianza regional

RANGO DE LAS DIFERENCIAS OBTENIDAS	ZONAS		
	1	2	3
mayores que 10 cm	7	103	0
entre 5 y 10 cm	71	72	54
entre 5 y 1 cm	288	142	362
entre 0 y 1 cm	138	89	156
diferencias nulas	142	93	162
entre 0 y -1 cm	122	70	155
entre -1 y -5 cm	298	160	254
entre -5 y -10 cm	63	76	73
negativas mayores que 10 cm	18	120	9
<b>TOTAL DE PUNTOS</b>	<b>1.147</b>	<b>925</b>	<b>1.225</b>

Las diferencias mayores se obtienen en la zona 2, sur de Portugal. La covarianza local para esta zona resultaba ser la que tenía unos parámetros de ajuste que más se apartan de los valores medios mientras que la zona norte y centro tenían un comportamiento más uniforme (Sevilla et al. 1992b). Es por esto que la covarianza regional reproduce peor el campo de la gravedad en ella.

## 5.2. Predicciones regionales

Las predicciones efectuadas hasta ahora eran «locales» en el sentido de que se hacían sobre una zona de tamaño reducido a partir de puntos dato de una zona algo más grande. Las que se han hecho después pueden llamarse «regionales» por tratarse de predicciones sobre la zona completa de datos usando para ello también una selección de observaciones sobre todo el territorio distribuidas a una distancia media de 1'.5, 2'.0 y 3'.0 según las tres distintas pruebas de este estudio.

Con esto se pretendió ver, por un lado, las diferencias entre predicciones locales y regionales, que de nuevo dependerán de la rugosidad del campo de la gravedad, pero que pueden aclarar ideas sobre el tamaño óptimo de las zonas que conviene considerar al aplicar colocación. Por otro, estudiando la comparación entre las tres predicciones se pretende estimar hasta qué punto influye en el resultado de la colocación la discretización de los datos seleccionados para calcular la función covarianza, es decir, encontrar una distancia entre datos que nos asegure

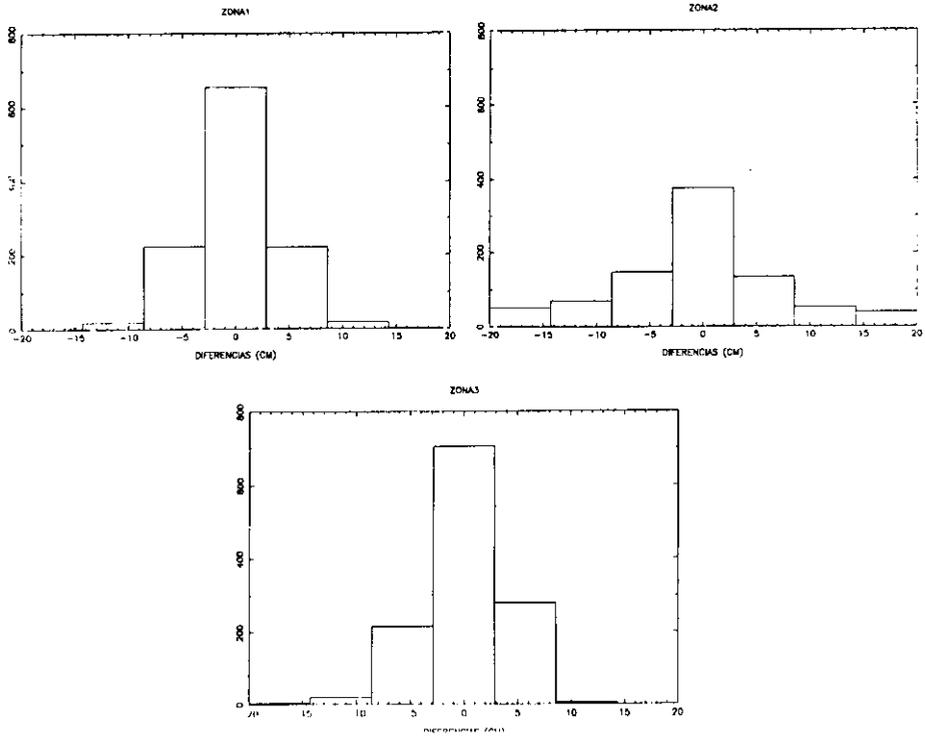


Figura 4. Histograma de las diferencias entre predicciones con covarianza local y regional.

que se reproduce bien el campo de la gravedad en la región sin aumentar excesivamente el tamaño del sistema de ecuaciones que se ha de resolver.

A la vista de la Figura 5 que muestra las diferencias entre las predicciones obtenidas usando datos con los distintos discretizados, podemos concluir que las

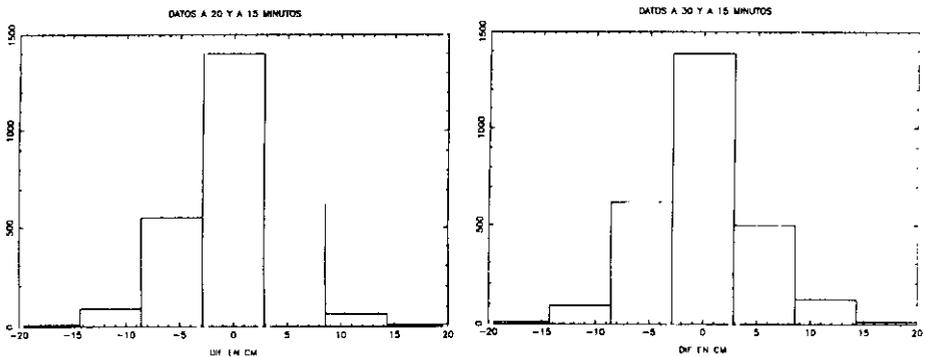


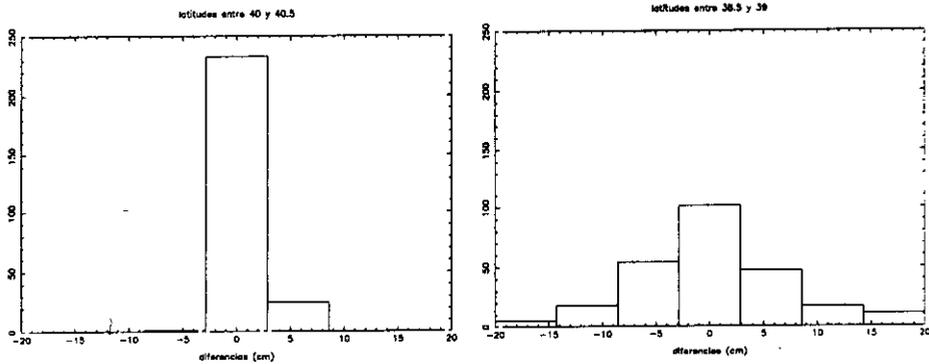
Figura 5. Histograma de las diferencias entre predicciones regionales.

variaciones de los resultados no son muy grandes. Sin embargo, se aprecia un mayor número de diferencias positivas al comparar las predicciones hechas con datos a 2 y a 1.5 minutos, lo que nos indica que los resultados en el primer caso son algo más grandes, mientras que ocurre lo contrario al comparar las predicciones a partir de datos a 3 y a 1.5 minutos, con lo que vemos que la primera de ellas nos da valores algo más pequeños. No puede hablarse de sesgos en las predicciones de forma general puesto que éstas diferencias no se aprecian en todos los datos comparados sino sólo, y en ambos casos, en las diferencias de valores entre 3 y 8 centímetros.

## 6. COMPARACION EN LAS ZONAS DE SOLAPAMIENTO

Como ya se ha dicho en la descripción de las zonas de trabajo, existen dos partes comunes de medio grado en latitud entre las zonas de predicción que tienen

### COVARIANZAS Y DATOS LOCALES



### COVARIANZAS REGIONALES Y DATOS LOCALES

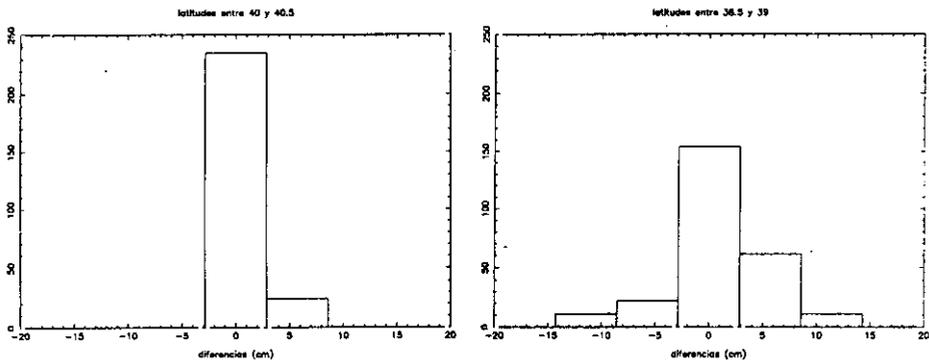


Figura 6. Histograma de las diferencias entre predicciones en las zonas de solapamiento.

la doble finalidad de servir para comparar las predicciones obtenidas según qué zona de datos se utilice, y permitir que el geoide final, unión de las tres zonas, sea más suave al determinarse en estas zonas comunes como media de las dos predicciones disponibles.

La comparación se hizo, por un lado sobre los resultados de la predicción por colocación estándar, y por otro sobre los resultados de la que se hizo tomando datos locales pero covarianza regional. (Figura 6).

En ambos casos, para la franja de latitudes entre  $40^\circ$  y  $40.5^\circ$ , las diferencias obtenidas son muy pequeñas, pero con tendencia notablemente marcada a ser positivas. Es decir, la predicción con la zona de datos 1, da valores de ondulación de geoide mayores, tanto si se usa covarianza de datos locales como regionales. En la otra franja común, comprendida entre latitudes de  $38.5^\circ$  y  $39^\circ$ , las diferencias son mayores, llegando en ocasiones, aunque muy pocas, a sobrepasar los 10 centímetros. En este caso, si se usan covarianzas locales no se aprecian sesgos en las diferencias. Sí hay un mayor número de diferencias positivas si se obtienen las predicciones a partir de covarianzas regionales y además, sus valores son más pequeños.

## 7. CONCLUSIONES

De la primera parte de este trabajo se puede concluir que para la zona estudiada, la elección de la región de convergencia de los desarrollos que aparecen en la colocación no afecta notablemente a los resultados de predicción de geoide y que la colocación no es un buen método de extrapolación, debiendo evitarse siempre que no tengamos la seguridad de que el campo de gravedad en la zona estudiada es muy homogéneo. En cuanto a la utilización de covarianzas regionales o de zonas más grandes, en el caso de Portugal se ve que funciona bien para el norte y centro, donde el campo es lo suficientemente suave, pero que se debe de estudiar más en profundidad en el sur que no parece adaptarse al comportamiento regional. Es por esto que conviene analizar más detenidamente la gravimetría de esta zona, las causas de este comportamiento, así como a partir de dónde comienza a presentarse esta irregularidad.

## REFERENCIAS

- ARABELOS, D. P. KNUDSEN, CC. TSCHERNING (1987). Covariance and bias treatment when combining gravimetry, altimeter and gradiometer data by collocation. Proceedings Intersection Symposium. «Advances in Gravity Field Modelling». General Assembly IAG, Vancouver. Canada. (pp 443-454).
- BASIC. T, H. DENKER, P. KNUDSEN, D. SOLHEIN, W. TORGE (1990). A new geopotential model tailored to gravity data in Europe. En «Gravity, gradiometry and gravimetry», R. Rummel and R. G. Hipkin (Eds.). IAG Symp. 103. (pp 109-118). Spinger-Verlag.

- KNUDSEN, P. (1987). Estimation and modelling of the local empirical covariance function using gravity and satellite altimeter data. *Bull. Geod.* Vol 61. (pp 145-160).
- MORITZ, H. (1980). *Advanced Physical Geodesy*. Wichmann. Karlsruhe.
- SEVILLA, M. J., A. J. GIL, F. SANSÓ (1991) The gravimetric geoid in Spain: first results, en «Determination of the geoid present and future». R. H. Rapp y F. Sansó (Eds.). IAG Symp. 106. (pp 276-285) Springer-Verlag.
- SEVILLA, M. J., G. RODRÍGUEZ CADEROT, A. J. GIL (1992a) A gravimetric geoid in the Mediterranean Sea. En «Mare Nostrum 1» (pp 37-83). Milan.
- SEVILLA, M. J., G. RODRÍGUEZ, M. LISBOA (1992b) Análisis y validación de la gravimetría de Portugal. *Revista do Instituto Geográfico e Cadastral* (pp 5-20). Lisboa.
- TSCHERNING, CC., R. RAPP (1974) Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations and deflection of the vertical implied degree-variance models. Dept. of Geodetic Science Report 208. Ohio State University.
- TSCHERNING, CC. (1985a) Local approximation of the gravity potential by least squares collocation. En «Local gravity field approximation» ed by K. P. Schwarz. University de Calgary (pp 277-362).
- TSCHERNING, CC. (1985b) GEOCOL-A fortran program for gravity field approximation by collocation. Technical note, Geodaetisk Institut, 3ª edn.