El potencial gravitatorio terrestre: Un problema de Dirichlet en la «esfera»

JUAN PEDRAZA
Departamento de Matemática Aplicada
Sección Departamental. Facultad de C. Químicas
Universidad Complutense de Madrid

MIGUEL J. SEVILLA
Instituto de Astronomía y Geodesia
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

1. INTRODUCCION

Una de las ecuaciones fundamentales de la Geodesia Física es la ecuación de Laplace $\triangle V=0$ que debe verificar el potencial gravitatorio terrestre en el exterior de las masas de la Tierra. La obtención de soluciones aceptables de dicha ecuación es un problema clásico de la Teoría del Potencial. Después, fijadas unas condiciones de contorno adecuadas, es necesario resolver el correspondiente problema de Dirichlet para obtener la expresión y los valores de los coeficientes de la función potencial gravitrarorio terrestre en cualquier punto exterior a la Tierra.

Se trata de resolver un problema de Dirichlet en el exterior de una esfera S_a que contenga a la Tierra en su interior, viendo, que en el caso de que las condiciones de contorno estén dadas por funciones sobre la superficie esférica S^2_a, las funciones propias del operador $\triangle^2_0$ nos resuelven el problema de una forma fácil.

El interés en la resolución de este problema se debe a que siendo el potencial gravitatorio V la componente del potencial terrestre que no está bien determinada, pues depende de la forma de la Tierra y de la distribución de masas en su interior, y al no ser ésta uniforme, (la densidad ϱ no varía de forma continua en el interior de la Tierra), resulta que V, que tiene derivadas primeras continuas, no tiene continuas las segundas derivadas, por lo que V verifica en el interior de la Tierra la ecuación de Poisson (Levallois, 1970)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G\varrho \tag{1.1}$$

donde G es la constante de la gravitación universal; y en el exterior, como $\varrho = 0$, V verifica la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{1.2}$$

La resolución de (1,2) la haremos por tres caminos: el primero utilizando el método de separación de variables; por tener las condiciones de contorno sobre S_a^2 se emplearán coordenadas esféricas. En un segundo lugar se utilizará la propiedad del operador laplaciano de ser invariante frente a los desplazamientos del plano, y en particular del grupo de trasformaciones que dejan invariante la distancia al origen, G_R, llegando a que las funciones definidas sobre S_a^2 están relacionadas con las funciones propias del operador $\triangle_0^2$, parte angular del operador laplaciano, lo que nos permitirá encontrar la solución que verifica las condiciones de contorno dadas. Por último, al considerar grandes distancias, (los astros actúan como masas puntuales), V se toma como la función escalar $V = G \dfrac{m}{\ell}$ (m es la masa atrayente y ℓ la distancia entre la masa unidad y la masa atrayente) y suponiendo que admite un desarrollo en serie de potencias de x, y, z, V se expresa como combinación lineal de armónicos esféricos.

2. SOLUCION DE $\triangle^2(V) = 0$ POR SEPARACION DE VARIABLES

Se considera la resolución del problema de Dirichlet en la esfera S_a^2 por lo que emplearemos coordenadas esféricas r, θ, λ;

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen} \theta \cos \lambda \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \lambda \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

que es un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales, siendo su elemento de arco

$$ds^2 = h_1^2 \, dr^2 + h_2^2 \, d\theta^2 + h_2^2 \, d\lambda^2,$$

con

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2; \; (q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \lambda)$$

bajo estas condiciones (1.2) se expresa en la forma (Heiskanen y Moritz, 1985)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (2.1)$$

y suponiendo que existe solución $V(r, \theta, \lambda) = R(r) \cdot \Theta(\theta) . \Phi(\lambda)$, ésta se determina por las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - kR = 0 \tag{2.2a}$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\lambda^2} - a\Phi = 0 \tag{2.2b}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(k + \frac{a}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\Theta = 0 \tag{2.2c}$$

donde a) es una ecuación lineal de Euler, que se resuelve por métodos elementales y su solución general depende del valor de k; la ecuación b) también se resuelve elementalmente y su solución general depende de a; y en la ecuación c), por el cambio de varible $t = \cos\theta$, se obtiene

$$(1-t^2)\frac{d^2\Theta}{dt^2} - 2t\frac{d\Theta}{dt} + \left[k + \frac{a}{1-t^2}\right]\Theta = 0 \tag{2.3}$$

ecuación diferencial de segundo orden con $1, -1, \infty$ como puntos singulares regulares (p.s.r.), ecuación Fuchsiana de tipo hipergeométrico, cuya expresión mediante el P-símbolo de Riemann es

$$\Theta = \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & \infty & \\ \sqrt{-a/2} & \sqrt{-a/2} & 1/2 + \sqrt{1/4+k} & t \\ -\sqrt{-a/2} & -\sqrt{-a/2} & 1/2 - \sqrt{1/4+k} & \end{array}\right)$$

que por el cambio de variable independiente $u = \dfrac{1-t}{2}$ se transforma en la ecuación diferencial

$$\Theta = \left(\begin{array}{cccc} 0 & -1 & \infty & \\ \sqrt{-a/2} & \sqrt{-a/2} & 1/2 + \sqrt{1/4+k} & \dfrac{1-t}{2} \\ -\sqrt{-a/2} & -\sqrt{-a/2} & 1/2 - \sqrt{1/4+k} & \end{array}\right)$$

Esta ecuación, como toda hipergeométrica, se resuelve siguiendo los métodos clásicos escogiendo dos soluciones linealmente independientes entre las 24 soluciones de Kummer (Rainville 1964).

Deshaciendo los cambios de variable y multiplicando las soluciones de (2.2a), (2.2b) y (2.2c) se obtiene una solución general $V = R(r)\Phi(\lambda)\Theta(\theta)$ de la ecuación (1,1).

3. SOLUCION DEL PROBLEMA DE DIRICHLET EN LA ESFERA

Dadas unas condiciones de contorno en la esfera S_a^2, o sea dando

$$f(a,\theta,\lambda) = f(\theta,\lambda),\ 0 \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \lambda < 2\pi \tag{3.1}$$

la determinación de soluciones de (1.2) en el exterior de S_a^2 que verifiquen la condición (3.1), dependerá de $f(a,\theta,\lambda)$; por ejemplo si $f(a,\theta,\lambda)$ es una funcion definida y acotada en S_a^2, la solución de (1.2) se obtiene por las de (2.2a), (2.2b), (2.2c) que verifiquen estas condiciones.

Respecto de (2.2b), por ser la solución buscada univaluada, y por ello periódica de período 2π, las únicas soluciones válidas son las correspondientes a los valores $a=-m^2$, o sea para cada $m \in \mathbf{Z}$, tenemos una solución del tipo

$$\Phi_m(\lambda) = A_m \cos m\lambda + B_m \operatorname{sen} m\lambda;\ m \in \mathbf{Z}$$

En la ecuación (2.2c) para cada valor de m las soluciones acotadas en $(-\pi,\pi)$ son las soluciones polinómicas correspondientes a los valores $k_n=(m+n)(m+n+1)$ con $n = 0,1,2,3,\ldots$, dado que (2.2c) es una ecuación diferencial que con el cambio de variable $\cos\theta=t$ toma la forma

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} - \frac{2t}{1-t^2}\frac{d\Theta}{dt} + \left(\frac{k(1-t^2)-m^2}{(1-t^2)^2}\right)\Theta = 0$$

que es una ecuación diferencial de tipo hipergeométrico con $\sigma(t) = 1-t^2$, $\tau(t)=-2t$, $\sigma(t) = k(1-t^2)-m^2$ que verifican las condiciones (Nikiforov 1988) para las que las únicas soluciones no triviales y acotadas en $1 \leqslant t \leqslant 1$ son las soluciones polinómicas correspondientes a los valores μ_n que verifiquen

$$\mu_n + n\frac{d\tau}{dt} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{d\sigma^2}{dt^2} = 0,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots$$

y que con $\mu = k-m^2-m$, $k=(m+n)(m+n+1)=\ell(\ell+1)$ con $m+n=\ell$; entonces, en la resolución de (2.2c) distinguiremos los casos $m=0$ y $m\neq 0$.

Si $m=0$, $\ell=n$ la ecuación (2.3) se expresa

$$(1-t^2)\frac{d^2\Theta}{dt^2} - 2t\frac{d\Theta}{dt} + [\ell(\ell+1)]\,\Theta = 0 \tag{3.2}$$

que es una ecuación de Legendre, que como toda Fuchsiana de 3 p.s.r. por cambios de variable se transforma en hipergeométrica.

Expresada (3.2) mediante el P-símbolo de Riemann

$$\Theta = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & -1 & \infty & \\ 0 & 0 & -\ell & t \\ 0 & 0 & \ell+1 & \end{pmatrix}$$

se transforma por el cambio de variable $u = \frac{1-t}{2}$ en la ecuación diferencial

$$\Theta = P\left(\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -\ell & \frac{1-t}{2} \\ 0 & 0 & \ell+1 & \end{matrix} \right)$$

ecuación hipergeométrica, con $\alpha = -\ell$, $\beta = \ell+1$, $\gamma = 1$ cuya solución en torno a $u = 0$ es la función hipergeométrica

$$\Theta = {}_2F_1\left(-\ell, \ell+1 \; ; \; 1 \; ; \; \frac{1-t}{2} \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\ell+1)_r \, (-\ell)_r}{1_r} u^r \tag{3.3}$$

con $(\ell)_r = \ell \cdot (\ell+1) \cdot (\ell+2) ... (\ell+r-1)$; $1_r = (r!)$; $\frac{1-t}{2} = u$, válida para u tal que $|u|<1$, y para todo valor de ℓ, solución conocida como la función de Legendre $P_\ell\,(u)$ de primera clase, y que para ℓ entero positivo es el polinomio de Legendre $P_{\ell 0}\,(u)$ de grado ℓ.

$$P_{\ell 0}\,(u) = 1 + \left[(\ell+1)\,(-\ell)\right] u + \frac{1}{2!}\left[(\ell+1)_2\,(-\ell)_2\right] u^2 + \ldots$$

$$+ \frac{1}{\ell!}\left[(\ell+1)_\ell\,(-\ell)_\ell\right] u^\ell.$$

Una segunda solucion linealmente independiente de (3.3) en torno de $u = 0$ es logarítmica, al presentar la ecuación indicial en u=0 exponentes iguales y se obtiene de la siguiente manera (Rainville, 1964): Dado que en la ecuación (3.2) se ha hecho el cambio de variable $u = \frac{1-t}{2}$ esta ecuación se trasforma en

$$u(1-u)\frac{d^2\Theta}{du^2} + (1-2u)\frac{d\Theta}{du} + \ell(\ell+1)\,\Theta = 0 \tag{3.2}$$

de la que $u = 0$ es un p.s.r., y por tanto admite soluciones de la forma

$$\Theta = \sum_{r=0}^{\infty} a_r\, u^{r+c};$$

Se verifican las relaciones de recurencia

$$c^2 = 0 \text{ para } r = 0$$

$$(r+c)^2 a_r - [(r+c)\,(r+c-1) - \ell\,(\ell+1)]\, a_{r-1} = 0 \text{ si } r \geqslant 1 \; ;$$

los exponentes de la ecuación indicial para $u = 0$, son iguales a 0, luego dos soluciones linealmente independientes son

$$\text{i) } \Theta_{11} = [\theta\,(u,c)]_{c=0} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\ell+1)\,(-\ell)_r}{1_r}\, u^r = {}_2F_1\,(-\ell,\, \ell+1;1;u)$$

$$\text{ii) } \Theta_{12} = \left[\frac{\partial}{\partial\theta}\,\theta(u,c\right]_{c=0} = \sum_{r=0} \frac{(\ell+1)_r\,(-\ell)_r}{(r!^2)}\, u^r \ln u +$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-\ell)_r\,(\ell+1)_r}{(r!)^2}\, u^r\,[\mathrm{H}(\ell+1,r) + \mathrm{H}(-\ell,r)\; 2\mathrm{H}(1,r)]$$

con

$$\mathrm{H}(c,\, r) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c+1} + \ldots\ldots + \frac{1}{c+r-1}\;;\ \text{para } \ell \in \mathbf{Z}$$

Θ_{11} es el polinomio de grado ℓ (3.3), y Θ_{12} no es polinómica, por lo que no cumple las condiciones de acotación.

Deshaciendo los cambios $u = \dfrac{1-t}{2}$, $t = \cos\theta$ obtenemos la solución $\Theta_{\ell 0} = p_\ell\,(\theta)$ de la ecuación (2.2c).

Las soluciones de (2.2a), para $k=\ell(\ell+1)$, esto es de la ecuación

$$r^2\,\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\,\frac{dR}{dr} - \ell(\ell+1)R = 0$$

son

$$R(r) = A_\ell\, r^{\ell+1}\, B_\ell\, r^{-(\ell+1)}$$

que por tener que ser acotadas para $r \rightarrow \infty$, $A_\ell = 0$ y por tanto la solución queda

$$R_\ell\,(r) = B_\ell\;\; r^{-(\ell+1)},$$

luego la solución de (1.1) para $m=0$ es:

$$V(r,\, \theta,\, \lambda) = B_\ell r^{-(1+1)}\cdot\, \Theta_{\ell,0}(\theta)\cdot(A_1\lambda + A_2) = C_\ell\cdot P_\ell(\theta)\cdot\lambda + D_\ell\, P_\ell\,(\theta)$$

donde C_ℓ, D_ℓ, son constantes arbitrarias.

Si $m \neq 0$ tenemos que resolver la ecuación (2.3) que en función de t se escribe

$$(1-t^2)\,\frac{d\Theta}{dt^2} - 2t\,\frac{d\Theta}{dt} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right]\Theta = 0 \qquad (3.4)$$

Esta ecuación tiene 1, -1, ∞ como puntos singulares regulares, se expresa mediante el P-símbolo de Riemann

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \infty & \\ \frac{m}{2} & \frac{m}{2} & -\ell & t \\ \frac{-m}{2} & \frac{-m}{2} & \ell+1 & \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

y tras sucesivos cambios de variable dependiente e independiente se trasforma en la ecuación hipergeométrica (Rainville, 1964)

$$\Theta = (t+1)^{m/2}\,(t-1)^{m/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & m-\ell & u \\ -m & -\ell & \ell+1 & \end{pmatrix}$$

que admite la solución (la y_{11} de las soluciones de Kummer)

$$\Theta_{11} = (t^2-1)^{m/2}\,{}_2F_1\,(m-\ell,\ m+\ell+1;\ 1+m;\ u) \tag{3.6}$$

válida para los valores de u que verifiquen $|u| < 1$, y que si $m \in \mathbf{N}$, es polinómica y proporcional a la derivada m-esima de $P_\ell(t)$, pues

$$\frac{d^m}{dt^m} P_\ell(t) = \frac{(-\ell)_m\,(\ell+1)_m}{(-2)^m\, m!}\,{}_2F_1\left(m-\ell+\ell+1;\ 1+m;\ \frac{1-t}{2}\right)$$

por lo que (32.16), en el caso que $m \in \mathbf{N}$ se puede expresar por

$$\Theta_{11} = \frac{\Gamma(\ell+m+1)}{2^m\, m!\, \Gamma(\ell-m+1)}\,(t^2-1)^{m/2}\,{}_2F_1\left(\mathrm{m}-\ell,\ \mathrm{m}+\ell+1;\ 1+\mathrm{m};\ \frac{1-t}{2}\right)$$

que es la función asociada de Legendre de 1.ª clase $P_\ell^m(t)$.

Otra solución linealmente independiente de (33.16) se escoge entre las y_{k1}, soluciones de Kummer, (k = 2,3,4,5,6), para cualquier valor de m; así si tomamos la y_{31} resulta

$$\Theta_{31} = (t^2-1)^{m/2}\,{}_2F_1\left(m-\ell,\ m+\ell+1;\ 1+m;\ \frac{1+t}{2}\right) \tag{3.7}$$

válida para $-1 < t < 1$. (3.6) y (3.7), en esta región común, forman una pareja de soluciones linealmente independientes y acotadas; además, en esta región cualquier otra solución es combinación lineal de ambas. Deshaciendo los cambios, se obtiene la solución $\Theta_{\ell,m}(\theta)$ de la ecuación (2.2c) que multiplicada por las soluciones de (2.2a) y (2.2b) dan las soluciones de (13.11) $V = R_\ell(r)\Phi_m(\lambda)\Theta_{\ell,m}(\theta)$ en el caso m$\neq$0. Dado que (1.1) es una ecuación diferencial homogénea, por el principio de superposición toda combinación lineal de soluciones de (1.1), es solución de (1.1).

La determinación de soluciones de (1.2) en el exterior de S^2_a, que verifique (3.1) se facilita si encontramos un sistema ortogonal completo Ω^*, que nos permita expresar $f(\theta,\lambda)$ como combinación lineal de sus elementos.

Por otra parte, las propiedades de invarianza del operador laplaciano, frente a los cambios de ejes rectangulares, y frente a los desplazamientos del plano euclídeo, en particular $\triangle^2$ es invariante frente al grupo de trasformaciones

$$G_R = \{ \text{ movimientos sobre la esfera } S^2_a \text{ en } \mathbf{R}_3\}$$

es decir $\triangle^2$ es invariante frente a las trasformaciones que dejan invariante la distancia al origen, nos permite determinar un conjunto de funciones propias del operador laplaciano que se trasforman entre sí por los elementos de G_R, y que no son otras que las funciones propias de $\triangle^2_0$, (Vilenkin, 1966).

Propiedad 3.1: Las funciones $\Omega^* = K_\ell \text{sen}^\ell\lambda \; e^{i\ell\theta}$, ℓ=0, 1, 2,.. son funciones propias del operador $\triangle^2_0$.

Dado que, en coordenadas esféricas, la expresión de $\triangle^2_0$ es

$$\triangle^2_0 = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \text{cotg}\,\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \tag{3.9}$$

se comprueba que para todo ℓ se verifica

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \text{cotg}\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\,\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\right) K_1\text{sen}^\ell\,\lambda e^{i\ell\theta} = \\ = -\ell(\ell+1)\,K_\ell\text{sen}^\ell\lambda e^{i\ell\theta} \tag{3.10}$$

Luego con Ω^* conocido, y como para las funciones definidas sobre la esfera S_a es un sistema ortogonal completo, $f(a,\theta,\lambda)$ se puede expresar como combinación lineal de sus elementos y calcular las constantes que determinan la solución de (1.1) que verifica la condición de contorno (3.1).

4. SOLUCION POR DESARROLLO EN SERIES DE POTENCIAS

Dado que nos movemos en $\mathbf{R}_3$, y con distancias tan grandes que se pueden considerar los astros como masas puntuales, y bajo la hipótesis de que (1.1) admite solución analítica en un entorno del origen, la función escalar V se puede expresar por (Whittaker and Watson, 1927)

$$V = a_0 + a_1x + b_2y + c_3z + a_{11}x^2 + a_{12}xy + \ldots \tag{4.1}$$

entonces, al sustituir (4.1) en (1.2) se determinan una infinidad de relaciones entre los coeficientes, como por ejemplo

$$a_{11} + b_{22} + c_{33} = 0,\ n(n-1)a_{n1} + (n-1)b_{n1} + (n-1)c_{n1} = 0.....$$

ya que la suma de los coeficientes en $\partial^2/\partial x_i^2$ de las distintas potencias $x^m y^r z^s$, con $m+r+s = n$ deben anularse; si, por otro lado, consideramos todos los términos de grado n y buscamos todos los polinomios de grado n que son solución de (1.2), es decir los polinomios armónicos de grado n, nos encontramos que de un total de $\frac{(n+2)\,(n+1)}{2}$ términos, existen $\frac{n(n+1)}{2}$ relaciones entre coeficientes, por lo que sólo la diferencia $2n+1$ son independientes, y los términos de grado n en V tienen que ser una combinación lineal de $2n+1$ soluciones de la ecucación diferencial (1.2) todas de orden n en x,y,z.

Dado que si a,b,c son constantes tales que $a^2+b^2+c^2= 0$ toda función $f(ax+by+cz) \in C^2$, satisface la ecuación de Laplace (1.2), en particular lo hará el polinomio homogéneo de orden n

$$P(n,\mathrm{v}) = (\mathrm{z} + \mathrm{i}x \cos v + \mathrm{i}y \operatorname{sen} v)^n \tag{4.2}$$

para cualquier constante v, (Hobson 1955) y como

$$(\mathrm{z} + \mathrm{i}x \cos v + \mathrm{i}y \operatorname{sen} v)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i\, (\mathrm{i}x \cos v + \mathrm{i}x \operatorname{sen} v)^{n-i} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} g_m\,(x,y,z) \cos mv + \sum_{m=1}^{n} h_m\,(x,y,z) \operatorname{sen} mv$$

$(z + \mathrm{i}x \cos v + \mathrm{i}y \operatorname{sen} v)^n$ se expresa en función del sistema ortogonal {cos mv, sen mv, m=0,1,2,...} y por la regla de Fourier

$$\text{a) } g_m(x,y,z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (z+\mathrm{i}x \cos v + \mathrm{i}y\ \mathrm{en}v\mathrm{s})^n \cos mv\ dv$$

$$m = 0,1,2,3,\dots,n$$

$$\text{b) } h_m(x,y,z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (z+\mathrm{i}x \cos v + \mathrm{i}y \operatorname{sen} \theta)^n \operatorname{sen} mv\ dv$$

$$m = 1,2,3,\dots ,n$$

Derivando bajo el signo integral y sustituyendo en (1.2), vemos que cada función $g_m\,(x,y,z)$, $h_m\,(x,y,z)$ es una solución de (1.2), obteniendo así $2n+1$ polinomios armónicos linealmente independientes de grado n, por lo que cualquier combinación lineal de ellos se puede obtener como el resultado de

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (z+\mathrm{i}x \cos v + \mathrm{i}y \operatorname{sen} v)^n f_n(v)\ dv$$

siendo $f_n(v)$ una función racional de $e^{iv} = \cos v + i\,\mathrm{sen} v$

Al ser cierto para cada $n \in Z$, V se puede expresar en la forma

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (z + ix \cos v + iy\, \mathrm{sen} v)^n f_n(v)\, dv \tag{4.3}$$

que converge uniformemente si $x^2+y^2+z^2$ es suficientemente pequeño.

Si nos interesa expresar (4.3) en coordenadas esféricas, tenemos (Lavrentiew-Chabat 1977).

a) $$\int_{-\pi}^{\pi} (z + ix \cos v + iy\, \mathrm{sen} v)^n \cos mv =$$

$$= r^n \int_{-\pi}^{\pi} (\cos v + i\,\mathrm{sen} v \cos (v-\lambda)^n \cdot \cos mv\, dv$$

$$= r^n \cos m\lambda \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta \cos\tau)^n \cos m\tau\, d\tau \text{ con } \tau = \theta.\lambda$$

b) $$\int_{-\pi}^{\pi} (z + ix \cos\theta + iy\, \mathrm{sen}\theta)^n \mathrm{sen}\, m\theta =$$

$$r^n \mathrm{sen}\, m\lambda \int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta \cos\tau)^n \cdot \cos m\tau\, d\tau$$

siendo los coeficientes de $r^n \cos m\lambda$, y de $r^n \mathrm{sen} m\lambda$ iguales a $2\pi P_n^m$ (cos θ), proporcionales, por tanto, a las funciones asociadas de Legendre, por lo que cada solución de (1.2) analítica en un entorno del origen se puede expresar por la fórmula general

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \left\{ A_n P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} \left(A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \mathrm{sen}\, m\lambda \right) P_n^m(\cos\theta) \right\}$$

La determinación de una solución que verifique ciertas condiciones de contorno $f(r,\theta,\lambda)$ se calculará expresando esta función como combinación de los armónicos esféricos, lo que nos permite hallar las costantes que determinan la solución de (1.2) que verifique la condición de contorno dada.

BIBLIOGRAFIA

HEISKANEN, W.A. y H. MORITZ (1985): «Geodesia Física». Instituto Geográfico Nacional. Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid.

HOBSON, E. (1955): «The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics». Chelsea Publishing Company. N. Y.

LAVRENTIEV, M.-CHABAT, B. (1977): «Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe». 2.ª Edition. Moscou.

LEVALLOIS, J.J. (1970): «Géodésie Generale». Vol. 3. Eyrolles. París.

NIKIFOROV, A.- UVAROV, V. (1988): «Special Functions of Mathematical Physics». Basel; Boston. Birkhäuser.

RAINVILLE, E. (1964): «Intermediate Differential Equations». 2.ª Edición. Chelsea Publishing Company. N.Y.

VILENKIN, N. (1969): «Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes». Dunod. Paris.

WHITTAKER, E.- WATSON, G. (1927): «A course of Modern Analysis». Cambrige University Press. London.