

3. Ajuste y análisis estadístico de ondulaciones del geoide obtenidas por métodos astrogeodésicos

M. J. SEVILLA Y A. NÚÑEZ

Instituto de Astronomía y Geodesia (U.C.M.-C.S.I.C.)
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense, Madrid

1. INTRODUCCION

La necesidad de disponer de un geoide de calidad y precisión es sentida por toda la comunidad geodésica y geofísica internacional, prueba de ello es el elevado número de simposios y reuniones científicas que se celebran sobre la determinación del geoide.

Las redes geodésicas clásicas de triangulación y trilateración deben tratarse con datos suficientemente reducidos lo que implica la necesaria consideración de las altitudes del geoide y de las desviaciones de la vertical. Así, por ejemplo, en la Península Ibérica la influencia en la reducción de distancias del geoide al elipsoide puede llegar a ser de 3 a 5 partes por millón con respecto a sistemas geodésicos vigentes, y esto no es despreciable.

Por otra parte, la existencia de sistemas geodésicos obtenidos con técnicas espaciales diversas (Doppler, GPS, VLBI, etc.) que no son sensibles a las clásicas reducciones o correcciones, exige si se quieren utilizar con fines geodésicos de control de redes o incluso en estudios de movimientos de la corteza, en conjunción con datos de la geodesia clásica, que en el proceso de formación de los modelos se tenga en cuenta la relación del geoide con los demás elementos que intervienen y por consiguiente la necesidad de su determinación. Y esto es sencillamente un esbozo de la situación.

En estas circunstancias es necesario revisar la metodología en uso para la determinación de ondulaciones del geoide y actualizarla con el concurso de métodos estadísticos que nos permitan garantizar la precisión de los resultados.

Uno de los métodos más utilizados en la determinación de diferencias de ondulaciones del geoide es el método de nivelación astrogeodésica con la aplicación de la fórmula de Helmert. Describiremos este método en forma precisa y estudiaremos su aplicación a perfiles y en superficie planteando y resolviendo los modelos matemáticos utilizados junto a un análisis estadístico

de resultados. Al mismo tiempo se han confeccionado los correspondientes programas de cálculo para ordenador que están a disposición de quien los solicite.

2. DETERMINACION ASTROGEODESICA DEL GEOIDE. FORMULA DE HELMERT

La determinación astrogeodésica del geoide (en general de un cuasigeoide) consiste en determinar diferencias de ondulaciones del geoide en función de las desviaciones de la vertical obtenidas por métodos astrogeodésicos.

La fórmula básica que resuelve este problema puede obtenerse con un sencillo razonamiento que aprovecha las propiedades del modelo al aire libre.

Consideremos dos puntos P y Q de la superficie topográfica terrestre infinitamente próximos. En estos puntos podemos determinar las coordenadas astronómicas: latitud Φ y longitud Λ . Sean P' y Q' los puntos de la superficie del teluroide, proyecciones de P y Q según las normales al elipsoide general. En P' y Q' podemos conocer las coordenadas geodésicas (ϕ, λ) que serán las mismas de los puntos P'_o , Q'_o del elipsoide correspondientes en la proyección de Helmert y que pueden calcularse por triangulación. La definición del modelo al aire libre nos dice que las distancias $P'P$ y $Q'Q$ son las mismas que las que separan los puntos correspondientes, siempre según las normales al elipsoide, del elipsoide y cuasigeoide respectivamente, P'_oP_o y Q'_oQ_o , es decir, conocidas $P'P$, $Q'Q$, etc. tendremos determinada la superficie topográfica sobre el teluroide o, lo que es lo mismo, el cuasigeoide sobre el elipsoide. En particular tendremos determinado el geoide si consideramos el sistema de altitudes ortométricas. Además, en la superficie topográfica podemos disponer de la gravedad g y por tanto del vector gravedad real \underline{g} y en la del teluroide del vector gravedad normal $\underline{\gamma}$.

Si tomamos un sistema de referencia local en P sean

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \underline{PQ} \quad [1]$$

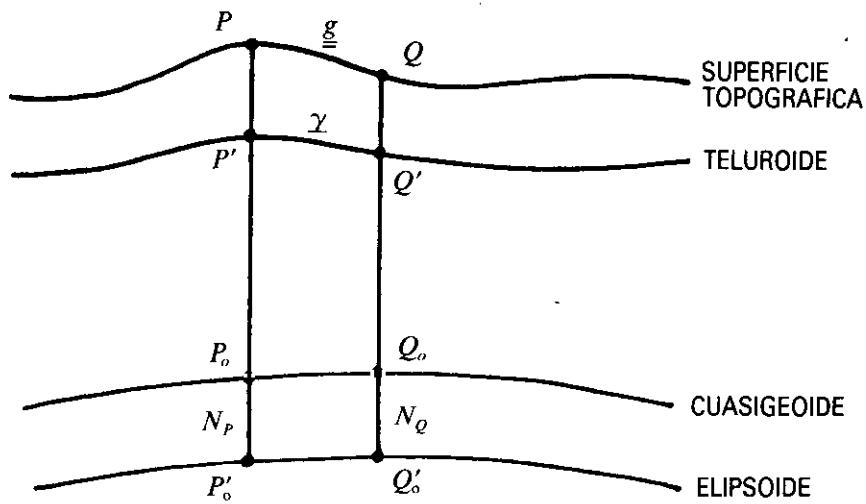
las componentes del vector \underline{PQ} , en particular Δz es el incremento de altitud bruta de nivelación dh' , sean

$$(\Delta g_x, \Delta g_y, \Delta g_z) = \underline{\Delta g} = \underline{g} - \underline{\gamma} \quad [2]$$

las componentes del vector anomalía de la gravedad, en particular $\Delta g_z = \Delta g$ es la anomalía de la gravedad, y sea

$$\underline{dh} = \underline{dN} = \underline{Q'Q} - \underline{P'P} \quad [3]$$

la diferencia entre las distancias elipsoidicas de los puntos P' y Q' a P y Q o bien la diferencia entre las ondulaciones del geoide entre los puntos correspondientes P', Q' y P, Q .



Por definición de teluroide los potenciales gravíficos reales en P y Q son iguales a los potenciales normales en P' y Q' , por tanto también será igual su diferencia, entonces podemos escribir

$$g_p \underline{PQ} = \gamma_{p'} \underline{P'Q'}$$

Ahora bien

$$\underline{P'Q'} = \underline{P'P} + \underline{PQ} + \underline{QQ'}$$

luego

$$g_p \underline{PQ} = \gamma_{p'} (\underline{P'P} + \underline{PQ} - \underline{QQ'})$$

de donde

$$(g_p - \gamma_{p'}) \underline{PQ} = \gamma_{p'} (\underline{P'P} - \underline{QQ'})$$

Teniendo en cuenta [3] estos productos escalares se escriben

$$\Delta g \cdot \underline{PQ} = -\gamma_{p'} \cdot \underline{dh} = -\gamma_{p'} dh \cos(180) = \gamma_{p'} dh = \gamma dN$$

y utilizando [1] y [2] resulta

$$dN = \frac{1}{\gamma} (\Delta g_x \Delta x + \Delta g_y \Delta y + \Delta g_z \Delta z) \quad [4]$$

Para obtener la expresión de dN en términos de la desviación de la vertical recordemos que, por definición, las componentes de la desviación se escriben

$$\xi = -\frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial \phi} = -\frac{1}{r\gamma} \frac{\partial T}{\partial \phi} = -\frac{1}{\gamma} \delta g_\phi,$$

$$\eta = -\frac{1}{rcos\phi} \frac{\partial N}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\gamma rcos\phi} \frac{\partial T}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\gamma} \delta g_\lambda,$$

donde T es el potencial perturbador y δg_ϕ , δg_λ componentes del vector perturbación de la gravedad (Heiskanen-Moritz, 1985, p. 233). Hemos utilizado la fórmula de Bruns $N = \frac{T}{\gamma}$. Si aproximamos el vector perturbación de la gravedad por el vector anomalía de la gravedad, lo que es lícito en aproximación lineal, podemos escribir

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{1}{\gamma} \Delta g_y, \\ \eta &= -\frac{1}{\gamma} \Delta g_x,\end{aligned}\tag{5}$$

y sustituyendo [5] en [4] resulta

$$dN = -\eta \Delta x - \xi \Delta y + \frac{\Delta g}{\gamma} dh'.\tag{6}$$

Ahora bien, en el sistema de referencia local se tiene

$$\xi \Delta y + \eta \Delta x = \xi \cos \alpha ds + \eta \operatorname{sen} \alpha ds = \theta ds,\tag{7}$$

donde

$$\theta = \xi \cos \alpha + \eta \operatorname{sen} \alpha\tag{8}$$

es la componente de la desviación de la vertical en la dirección PQ de acimut α y $ds = |PQ|$ es la distancia infinitesimal entre P y Q .

Entonces con [7] la fórmula diferencial [6] queda

$$dN = -\theta ds + \frac{\Delta g}{\gamma} dh'.\tag{9}$$

Por consiguiente, para dos puntos A y B distantes la diferencia de ondulaciones del geoide se obtiene integrando esta expresión, resultando

$$N_B - N_A = - \int_A^B \theta ds + \int_A^B \frac{\Delta g}{\gamma} dh',\tag{10}$$

que es la fórmula de nivelación astrogeodésica buscada. Obsérvese que esta fórmula es válida tanto para desviaciones absolutas de la vertical como para desviaciones relativas (Levallois, 1970).

Fórmula de Helmert

Como puede observarse, la primera parte de la ecuación [10] procede de la integración de la ecuación básica

$$dN = -\theta ds$$

establecida en la superficie del geoide o bien obtenida bajo el supuesto de que las superficies de nivel fuesen paralelas, pues entonces, los ángulos que forman la tangente al geoide en la dirección de acimut α con la tangente a una superficie paralela al elipsoide en el punto P de la superficie topográfica y con otra en el punto P_0 sobre el geoide serían iguales.

En este caso resulta la fórmula de Helmert

$$N_B - N_A = - \int_A^B \theta \, ds. \quad [11]$$

Este paralelismo de superficies de nivel será admisible en nuestros razonamientos cuando las coordenadas astronómicas que figuran en las expresiones de las componentes de la desviación de la vertical

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi - \phi, \\ \eta &= (\Lambda - \lambda) \cos \phi, \end{aligned} \quad [12]$$

hayan sido reducidas al geoide, es decir las coordenadas observadas en P han debido corregirse por curvatura de la plomada y movimiento del polo.

La corrección por movimiento del polo viene dada por (Sevilla, M. J. 1975).

$$\begin{aligned} \Phi &= \bar{\Phi} - x_p \cos \bar{\Lambda} + y_p \sin \bar{\Lambda}, \\ \Lambda &= \bar{\Lambda} - (x_p \sin \bar{\Lambda} + y_p \cos \bar{\Lambda}) \operatorname{tag} \bar{\Phi}, \end{aligned} \quad [13]$$

donde $\bar{\Phi}, \bar{\Lambda}$ son las coordenadas resultantes de la observación y (x_p, y_p) son las componentes del movimiento del polo.

La corrección por curvatura de la plomada viene dada por

$$\Phi_o = \Phi - \frac{H}{g_m} \frac{\partial g_m}{\partial x},$$

$$\Lambda_o = \Lambda - \frac{H}{g_m} \frac{\partial g_m}{\partial y} \sec \Phi,$$

donde H es la altitud ortométrica del punto P , g_m es el valor medio de la gravedad a lo largo de la línea de la plomada entre el punto P del terreno y el geoide y $\frac{\partial g_m}{\partial x}$, $\frac{\partial g_m}{\partial y}$ son las componentes del gradiente horizontal de la gravedad.

Si como aproximación se toma la gravedad normal para calcular la curvatura de la plomada y se toman los valores usuales de los parámetros, las fórmulas de corrección que se usan son

$$\begin{aligned}\Phi_o &= \Phi - 0''.00017 H \operatorname{sen} 2 \phi, \\ \Lambda_o &= \Lambda,\end{aligned}\quad [14]$$

donde H es la altitud en metros.

3. DETERMINACION DE ONDULACIONES DEL GEOIDE A LO LARGO DE UN PERFIL. ESTUDIO DE LOS ERRORES. COMPENSACION

3.1. Método de Helmert. Aproximación lineal

Consideremos una serie de puntos dato P_i , $i = 1, \dots, n$, donde se han determinado la latitud y longitud astronómicas y en donde se conocen también las coordenadas geodésicas y por tanto las componentes de la desviación relativa de la vertical (ξ_i, η_i) , $i = 1, \dots, n$.

Para una dirección dada por el acimut α en un punto P donde las componentes de la desviación de la vertical son (ξ, η) , la desviación de la vertical según la dirección definida por el acimut α es

$$\theta_\alpha = \xi \cos \alpha + \eta \operatorname{sen} \alpha. \quad [15]$$

Se supondrá que se han efectuado las correspondientes correcciones a las observaciones astronómicas efectuadas sobre superficie de la tierra, según se ha establecido en la sección anterior.

Sean P_i y P_{i+1} dos puntos en el geoide (en general en la superficie de referencia utilizada para las correcciones) y ds el elemento de arco de la línea geodésica que une ambos puntos. La diferencia en ondulación del geoide entre estos puntos viene dada por la fórmula [11], esto es

$$N_{i+1} - N_i = - \int_{P_i}^{P_{i+1}} \theta_\alpha \, ds \quad [16]$$

y llamando Γ al segmento de la línea geodésica que une P_i y P_{i+1} tomando como parámetro de la curva la longitud de arco, la expresión [16] puede escribirse

$$N_{i+1} - N_i = \Delta N_i = - \int_{\Gamma} \theta_{\alpha}(s) ds. \quad [17]$$

La ecuación [17] sólo permite la determinación de diferencias de ondulación y por tanto para determinación de ondulaciones del geoide se ha de tener el valor de la ondulación en al menos un punto de los puntos dato. Dicho en otras palabras, conociéndose únicamente valores de la desviación de la vertical, no es posible determinar ondulaciones del geoide sino diferencias de ondulación.

Puesto que $\theta_{\alpha} = \theta_{\alpha}(s)$ solamente se conoce en un número discreto de puntos del perfil entre los puntos P_i y P_n , la integración ha de hacerse de forma aproximada, es decir por métodos numéricos. El método clásico en la literatura geodésica es la aproximación lineal de Helmert que evalúa la integral por la fórmula del trapecio, entonces

$$N_{i+1} - N_i = - \frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \Delta s_i, \quad [18]$$

siendo Δs_i la distancia entre los puntos P_i y P_{i+1} , y θ_i , θ_{i+1} las desviaciones de la vertical en estos puntos en la dirección de acimut α de P_i a P_{i+1} .

Supongamos los puntos P_i dispuestos a lo largo de un perfil y $P_1 = A$ y $P_n = B$ los puntos inicial y final del perfil. La diferencia de ondulación entre los puntos A y B se obtiene por la suma.

$$N_B - N_A = - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{P_i}^{P_{i+1}} \theta_{\alpha}(s) ds = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \Delta s_i,$$

y suponiendo la ondulación del geoide conocida en el punto A , la ondulación del geoide en otro punto cualquiera P_k del perfil viene dada por

$$N_k = N_A - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \Delta s_i, \quad k = 2, \dots, n \quad [19]$$

siendo

$$\begin{aligned} \theta_i &= (\Phi_i - \phi_i) \cos \alpha_i + (\Lambda_i - \lambda_i) \cos \phi_i \sin \alpha_i, \\ \theta_{i+1} &= (\Phi_{i+1} - \phi_{i+1}) \cos \alpha_{i+1} + (\Lambda_{i+1} - \lambda_{i+1}) \cos \phi_{i+1} \sin \alpha_{i+1}, \end{aligned}$$

[20]

donde α_i es el acimut de la dirección $P_i P_{i+1}$ en P_i y α_{i+1} de la misma dirección en P_{i+1} , (Φ_i, Λ_i) las coordenadas astronómicas del punto P_i y $(\Phi_{i+1}, \Lambda_{i+1})$ del punto P_{i+1} , (ϕ_i, λ_i) y $(\phi_{i+1}, \lambda_{i+1})$ las coordenadas geodésicas de los puntos P_i y P_{i+1} y Δs_i la distancia entre los puntos.

La aplicación clásica del método de Helmert se suele hacer a lo largo de perfiles situados sobre meridianos y paralelos. Así a lo largo de un **meridiano** tendríamos ($\sin \alpha_i = \sin \alpha_{i+1} = 0$, $\cos \alpha_i = \cos \alpha_{i+1} = 1$) y por tanto

$$N_K = N_A - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\Phi_{i+1} + \Phi_i) - (\phi_{i+1} + \phi_i)}{2} \Delta s_i, \quad k = 2, \dots, n$$

y a lo largo de un **paralelo** de latitud ϕ ($\cos \alpha_i = \cos \alpha_{i+1} = 0$, $\sin \alpha_i = \sin \alpha_{i+1} = 1$) y por tanto

$$N_K = N_A - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\Lambda_{i+1} + \Lambda_i) - (\lambda_{i+1} + \lambda_i)}{2} \cos \phi \Delta s_i, \quad k = 2, \dots, n$$

El modelo ideal y que ha sido seguido en algunos países de gran extensión como Rusia (Zakatov, P. S., 1975) es hacer determinaciones astronómicas sobre una malla de meridianos y paralelos para una posterior compensación de los distintos itinerarios seguidos por mínimos cuadrados.

3.2. Estudio de errores en el método de Helmert

En cuanto al estudio de errores propios del método de Helmert daremos unas breves indicaciones, puesto que ha sido tratado extensamente en (Sevilla y Núñez, 1979).

Existen fundamentalmente tres fuentes de error:

- a) Los debidos a las observaciones astronómicas
- b) Los debidos a las coordenadas geodésicas procedentes de triangulación.
- c) El error de truncamiento de la fórmula de integración numérica utilizada.

Evidentemente entre estos tipos de error y en una aproximación que para nosotros es suficiente, los dos primeros pueden considerarse de carácter aleatorio, siempre que la reducción de las coordenadas astronómicas sea correcta, mientras que los del tipo (c) son sistemáticos.

Empecemos tratando los dos primeros. Sea σ la desviación típica y supongamos que los errores en la determinación de la vertical son inco-relados punto a punto, por la ley de propagación de la varianza se tiene que

$$\sigma(\Delta N) = \int_{P_i}^{P_{i+1}} \sigma(\theta_s) ds \quad [21]$$

Ahora bien, se puede suponer que los errores en distancia y *acimut* al multiplicarse por las componentes de la desviación de la vertical que son cantidades de primer orden pueden despreciarse, y por otra parte, para redes modernas los errores en la determinación de las coordenadas geodésicas son despreciables frente al error en la determinación de las coordenadas astronómicas, esto es el orden de 0"03 que, comparado con 0"6 a 1"0 en las determinaciones astronómicas de segundo orden, es despreciable. Por tanto se puede escribir

$$\sigma(\theta_\alpha) = (\sigma_\phi^2 \cos^2 \alpha + \sigma_\lambda^2 \cos^2 \phi \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}$$

siendo σ_ϕ^2 σ_λ^2 las varianzas de las determinaciones astronómicas de latitud y longitud.

Aplicando la fórmula de integración del trapecio a [21] obtendremos que la desviación típica de la ondulación del geoide a lo largo de un perfil es (Sevilla y Núñez, 1979)

$$\sigma_{\Delta N} = \frac{s}{2 \sqrt{2(n-1)}} (\cos^2 \phi \sigma_\lambda^2 + \sigma_\phi^2)^{\frac{1}{2}}$$

De gran importancia en este método es el error cometido en la interpolación en el cálculo numérico de la integral [16]. El error proviene del truncamiento de la fórmula del trapecio, pudiéndose dar una acotación del error entre los puntos extremos *A* y *B* por

$$E \text{ (metros)} < \frac{s \delta \theta}{6} \operatorname{sen} 1''.$$

El cálculo aproximado de $\delta \theta$ se puede efectuar de la siguiente manera. Sean P_{i-1} , P_i , P_{i+1} tres puntos consecutivos del perfil, entonces

$$\delta \theta(P_i) = \frac{\theta_{i-1} + \theta_{i+1}}{2} - \theta_i$$

y se toma

$$\delta \theta = \max_{P_i \in (A, B)} |\delta \theta(P_i)|,$$

siendo P_i un punto del perfil.

En cuanto a los errores sistemáticos en las coordenadas geodésicas (ϕ, λ) en redes geodésicas de calidad y recientemente reobservadas, con control en orientación y en escala aceptable, la influencia de posibles errores sistemáticos que perturben las coordenadas geodésicas resultantes de la compensación es despreciable para fines de determinación de geoide, puesto que a lo sumo

pueden llegar a valores del orden del metro frente a los 15-30 metros en las coordenadas astronómicas.

En cuanto a los errores sistemáticos en la determinación de las coordenadas astronómicas diremos que su detección no es sencilla, pero con los equipos de observación actuales en la medida del tiempo y una cuidadosa preparación de la observación estos pueden minimizarse en gran medida. Los tres factores más importantes son: la refracción anómala imposible de controlar, la ecuación personal del observador que debe determinarse antes de cualquier campaña de astronomía y los sistematismos propios de los aparatos de observación que con una buena contrastación antes de cada campaña pueden prácticamente eliminarse.

En los trabajos de Rice, 1962 en Estados Unidos, se da una acotación del error introducido por estos sistematismos en la determinación de la ondulación del geoide para observaciones astronómicas de segundo orden del tipo

$$E \text{ (metros)} < 0,034 \sqrt{s}$$

para una longitud total de línea astrogeodésica de s kms y estaciones espaciadas 22 kms..

En todo este capítulo se han supuesto las observaciones astronómicas reducidas al geoide, lo que supone el conocimiento de los gradientes de la gravedad en la línea (Sevilla, M. J. 1975). Esta corrección para zonas montañosas es importante, pudiendo llegar a ser del orden de 1'', lo que para lados de 25 kms introduce un error de 0.15 metros en la determinación de la diferencia de ondulación del geoide entre los puntos del lado en cuestión.

Por tanto la exactitud en la determinación del geoide astrogeodésico por el método de Helmert depende de cuatro problemas diferentes.

- a) Exactitud en las determinaciones astronómicas de latitud y longitud.
- b) Espaciamiento de las estaciones, dependiendo de la variación de las componentes (ξ, η) en los puntos del perfil.
- c) De los valores de la curvatura de la línea de la plomada, necesarios para efectuar una correcta reducción de las coordenadas astronómicas al geoide.
- d) Error de truncamiento de la aproximación lineal.

3.3. Compensación en el método de Helmert.

Considerados los n puntos P_i con desviaciones de la vertical conocidas, ahora vamos a discutir brevemente la compensación de una línea de nivelación astrogeodésica. Utilizaremos el modelo de ecuaciones de observación.

Las relaciones de observación se pueden escribir a partir de [18] en la forma

$$N_{i+1} - N_i = l_i + v_i, \quad [22]$$

donde el desnivel observado es

$$l_i = -(\theta_i + \theta_{i+1}) \Delta s_i / 2.$$

Entonces para $i = 2, \dots, n-2$ se tiene

$$\begin{aligned} N_2 &= N_1 + l_1 + v_1 \\ &\dots \\ -N_{n-1} &= -N_n + l_{n-1} + v_{n-1} \end{aligned}$$

siendo

- N_1 = ondulación del geoide en el punto 1 que suponemos **conocida**
- N_n = ondulación del geoide en el punto n que suponemos **conocida**
- v_i = residuo de la i -ésima observación.

Por tanto se pueden plantear las relaciones de observación en forma matricial,

$$A \underline{x} - \underline{t} = \underline{v},$$

siendo A una matriz $(n-1, n-2)$ denominada matriz de configuración o de diseño del ajuste de la forma,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y los vectores \underline{x} y \underline{t} vienen dados por

$$\begin{aligned} \underline{x} &= (N_2, \dots, N_{n-1})^T, \\ \underline{t} &= (N_1 + l_1, l_2, \dots, l_{n-2}, -N_n + l_{n-1})^T, \end{aligned}$$

y \underline{v} es el vector de residuales.

La solución mínimos cuadrados es (Sevilla M. J. 1986)

$$\hat{\underline{x}} = (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{t},$$

siendo P la matriz de pesos de las observaciones, que se puede suponer,

- a) $P = I$ la matriz identidad,
- b) $P = 1/\Delta s_i$, $i = 1, \dots, n-1$,
- c) $P = (1/\Delta s_i)^2$, $i = 1, \dots, n-1$.

En el caso en que el circuito de nivelación sea cerrado, es decir, coincidan los puntos inicial y final, el planteamiento es el mismo, salvo el vector de términos independientes que se escribe

$$\underline{l} = (N_1 + l_1, l_2, \dots, l_{n-2}, -N_1 + l_{n-1})^T,$$

Este método sobre perfiles es un caso particular del que se desarrolla en la sección siguiente.

4. DETERMINACION DE ONDULACIONES DEL GEOIDE EN AREAS EXTENSAS. COMPENSACION MINIMOS CUADRADOS

4.1. Planteamiento del problema

Supongamos una región D de la superficie terrestre en donde se han determinado las componentes (ξ, η) de la desviación de la vertical en una serie de n puntos no necesariamente regularmente distribuidos.

Introduzcamos en D un sistema local de coordenadas cartesianas planas: sea (ϕ_0, λ_0) un punto de origen, se toma el eje x tangente al paralelo hacia el este y el eje y tangente al meridiano hacia el norte, entonces para un punto cualquiera (ϕ, λ) de D las correspondientes coordenadas cartesianas planas vienen dadas por (se supone hipótesis de tierra esférica)

$$\begin{aligned} x &= R(\lambda - \lambda_0) \cos \phi = R \lambda \cos \phi - R \lambda_0 \cos \phi, \\ y &= R(\phi - \phi_0) = R \phi - R \phi_0. \end{aligned}$$

Las coordenadas cartesianas del origen serán, evidentemente

$$\begin{aligned} x_0 &= R \lambda_0 \cos \phi_0 - R \phi_0 \cos \phi_0 = 0, \\ y_0 &= R \phi_0 - R \phi_0 = 0, \end{aligned}$$

siendo R el radio medio terrestre para la zona considerada.

Sean (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ las coordenadas locales de los n puntos dato P_i en donde se han evaluado las componentes de la desviación de la vertical dadas por $(\xi_1, \eta_1), \dots, (\xi_n, \eta_n)$ respectivamente. A partir de estos datos y del conocimiento de la ondulación del geoide en al menos un punto, el problema es estimar la ondulación del geoide en los demás puntos datos pertenecientes a D haciendo mínima una cierta norma que se especificará más adelante.

Matemáticamente esto equivale a determinar la función ondulación del geoide $N(x, y)$, $(x, y) \in D$ de la que se conocen sus derivadas parciales,

$$\xi = -\frac{\partial N}{\partial y}(x, y), \quad \eta = -\frac{\partial N}{\partial x}(x, y), \quad (x, y) \in D \quad [23]$$

y se verifica una condición del tipo

$$N(x_F, y_F) = N \quad (x_F, y_F) \in D$$

en algún punto de D .

Consideremos la diferencial total de la función N

$$dN = \frac{\partial N}{\partial x} dx + \frac{\partial N}{\partial y} dy = -(\eta dx + \xi dy) \quad [24]$$

y sean P, Q dos puntos de D , la diferencia en ondulación $N_Q - N_P$ entre los puntos P y Q viene dada por integración de [24]

$$N_Q - N_P = - \int_P^Q (\eta dx + \xi dy).$$

Si las observaciones astronómicas de latitud y longitud están perfectamente reducidas al geoide, la forma diferencial dN debe ser exacta, es decir

$$\oint dN = \oint (\eta dx + \xi dy) = 0$$

para cualquier curva cerrada contenida en D , lo que da unicidad a los resultados.

La aproximación de ondulaciones del geoide en los puntos dato se hace de la forma siguiente: Con el conjunto de puntos dato (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ de D se forma una triangulación que idealmente ha de ser óptima en el sentido de lados de distancia mínima y triángulos bien conformados, evitándose en lo posible ángulos menores de 25° , siendo el triángulo ideal el equilátero. Los puntos en donde se determina la desviación de la vertical suelen ser vértices de la red de primer o segundo orden en donde se han realizado observaciones de triangulación, pudiéndose aprovechar el esquema de triángulos ya definidos. Tengamos en cuenta que la puesta en práctica del método de Helmert en superficie es la integración de una ecuación en derivadas parciales de primer orden en dos variables por el método de elementos finitos (triángulos bien conformados) con la particularidad que los elementos finitos vienen impuestos por los propios puntos observados, exigiéndose por esto que la distribución sea lo más homogénea posible.

Sean $\{T_i\}$, $i = 1, \dots, n$ los triángulos disjuntos de la triangulación efectuada en D , siendo los vértices de cada triángulo puntos dato en la desviación de la vertical. Sean P, Q y R los vértices de un triángulo cualquiera T_k , y vamos a considerar la función ondulación del geoide en T_k como un polinomio de grado 1 en las variables x, y (aproximación lineal de Helmert), es decir

$$N(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y, \quad (x, y) \in T_k. \quad [25]$$

Supongamos para fijar ideas que el vértice P del triángulo es el origen del sistema de coordenadas cartesiano local y sean (s, α) (distancia y acimut) las coordenadas polares en dicho sistema de cualquier otro vértice. Entonces todo punto de T_k se puede representar por

$$\begin{aligned}x &= s \operatorname{sen} \alpha, \\y &= s \operatorname{cos} \alpha,\end{aligned}$$

y [25] en el sistema de coordenadas polares se transforma en

$$N(s, \alpha) = a_{oo} + a_{1o} s \operatorname{sen} \alpha + a_{o1} s \operatorname{cos} \alpha. \quad [26]$$

De [23] y [25] se deduce que

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial x} &= -\eta = a_{1o} \\ \frac{\partial N}{\partial y} &= -\xi = a_{o1}\end{aligned}$$

y sustituyendo esto en [26] resulta

$$N(s, \alpha) = a_{oo} - (\eta \operatorname{sen} \alpha + \xi \operatorname{cos} \alpha) s,$$

ahora bien, siendo

$$\theta_\alpha = \xi \operatorname{cos} \alpha + \eta \operatorname{sen} \alpha$$

la desviación de la vertical en el origen del sistema local y en la dirección de acimut α resulta

$$N(s, \alpha) = a_{oo} - \theta_\alpha s \quad [27]$$

Con esta fórmula podríamos calcular ondulaciones del geoide si conocieramos la constante a_{oo} , si no se conoce, lo que haremos es determinar diferencias de ondulación de la siguiente forma:

Aplicando la fórmula [27] a los tres vértices de cada triángulo, tomando sucesivamente sistemas locales en los vértices P , Q y R resulta:

Con origen en P

$$\begin{aligned}N_P(0, \alpha) &= a_{oo}, \\N_Q(s_{PQ}, \alpha_{PQ}) &= a_{oo} - \theta_{PQ}^P s_{PQ}, \\N_R(s_{PR}, \alpha_{PR}) &= a_{oo} - \theta_{PR}^P s_{PR},\end{aligned}$$

Con origen en Q

$$N_P(s_{QP}, \alpha_{QP}) = a_{oo} - \theta_{QP}^Q s_{QP},$$

$$N_Q(0, \alpha) = a_{oo},$$

$$N_R(s_{QR}, \alpha_{QR}) = a_{oo} - \theta_{QR}^Q s_{QR},$$

Con origen en R

$$N_P(s_{RP}, \alpha_{RP}) = a_{oo} - \theta_{RP}^R s_{RP},$$

$$N_Q(s_{RQ}, \alpha_{RQ}) = a_{oo} - \theta_{RQ}^R s_{RQ},$$

$$N_R(0, \alpha) = a_{oo}.$$

Combinando estos valores obtenemos las diferencias de ondulaciones

$$\begin{aligned} N_Q - N_P &= -\theta_{PQ}^P s_{PQ}, \\ N_Q - N_P &= \theta_{QP}^Q s_{QP} = -\theta_{PQ}^Q s_{PQ}, \\ N_R - N_Q &= -\theta_{QR}^Q s_{QR}, \\ N_R - N_Q &= \theta_{RQ}^R s_{RQ} = -\theta_{QR}^R s_{QR}, \\ N_P - N_R &= -\theta_{RP}^R s_{RP}, \\ N_P - N_R &= \theta_{PR}^P s_{PR} = -\theta_{RP}^P s_{RP}, \end{aligned}$$

y tomando los valores medios resultan las fórmulas

$$\begin{aligned} N_Q - N_P &= -(\theta_{PQ}^P + \theta_{PQ}^Q) s_{PQ} / 2, \\ N_R - N_Q &= -(\theta_{QR}^Q + \theta_{QR}^R) s_{QR} / 2, \\ N_P - N_R &= -(\theta_{RP}^R + \theta_{RP}^P) s_{RP} / 2. \end{aligned} \quad [28]$$

Apoyándonos en estos resultados vamos a hacer el planteamiento general del problema. Sobre una región D de la tierra se tienen una serie de puntos $\{P_i\}$, $i = 1, \dots, n$ en donde se conoce la desviación de la vertical θ_i , $i = 1, \dots, n$. Se efectúa una triangulación de D con vértices los puntos dato con las condiciones dadas anteriormente. Entonces para cada lado de la triangulación se tiene una ecuación de la forma

$$\Delta N_{ij} = N_j - N_i = -(\theta_i + \theta_j) s_{ij} / 2 \quad [29]$$

siendo ΔN_{ij} la diferencia de ondulación del geoide entre los puntos P_i , P_j ; θ_i , θ_j las desviaciones de la vertical en la dirección de acimut α de P_i , P_j en los puntos P_i y P_j y s_{ij} la distancia entre dichos puntos.

Sea n el número de puntos dato y l el número de triángulos disjuntos ($T_k \cap T_j = \emptyset$ para $k \neq j$), entonces la ecuación de Euler nos dice que el número de lados es (Struik, D. J. 1973)

$$m = l + n - 1$$

que no es otra cosa que el número de ecuaciones en diferencias de ondulación [29] que se pueden establecer a partir de la triangulación efectuada.

4.2. Aplicación del método de mínimos cuadrados a la determinación del geoide

Ahora vamos a considerar la determinación astrogeodésica del geoide como un problema que se puede adaptar a un modelo matemático de ajuste en donde tenga sentido la técnica de mínimos cuadrados dentro de un marco probabilístico que se justificará convenientemente (Modelo de Gauss-Markov).

Se consideran una serie de puntos P_i , $i = 1, \dots, n$ en donde se han determinado las componentes de la desviación de la vertical (ξ_i, η_i), $i = 1, \dots, n$. Sean N_i , $i = 1, \dots, n$ las correspondientes ondulaciones del geoide (incógnitas a determinar). Cada punto da lugar a p relaciones de observación del tipo [29], siendo p el número de puntos unidos con él por la triangulación. Sea el punto P_i y sean P_{i+1}, \dots, P_{i+p} los puntos contiguos, las correspondientes relaciones de observación que se pueden escribir son

$$N_i - N_{i+1} - K_{i, i+1} = v_{i, i+1}$$

$$\vdots$$

$$N_i - N_{i+p} - K_{i, i+p} = v_{i, i+p}$$

habiendo tomado unos valores calculados o aproximados de la ondulaciones $N_i^0 = 0 \forall i$ y donde los valores observados son

$$K_{i, i+j} = -(\theta_i + \theta_j) s_{ij} / 2, j = 1, \dots, p$$

con

$$\begin{aligned}\theta_i &= \xi_i \cos \alpha_i + \eta_i \operatorname{sen} \alpha_i \\ \theta_j &= \xi_j \cos \alpha_i + \eta_j \operatorname{sen} \alpha_j\end{aligned}$$

siendo α_i el acimut correspondiente a la dirección $P_i P_j$ en P_i y α_j el correspondiente a la misma dirección $P_i P_j$ en P_j , s_{ij} es la distancia entre los puntos P_i , P_j y $v_{i, i+1}, \dots, v_{i, i+p}$ los residuales de las observaciones correspondientes.

Imponiendo la condición de mínimos cuadrados

$$\sum_{j=1}^p v_{i, i+j}^2 = \text{mínimo}$$

obtenemos la correspondiente ecuación normal para el punto i , dada por

$$\begin{aligned} p N_i - N_{i+1} - \dots - N_{i+p} + K_i &= 0 \\ K_i = \sum_{j=1}^p K_{i,i+j} \end{aligned} \quad [30]$$

Para los n puntos de la red astrogeodésica se tendrán n ecuaciones normales de la forma [30], en donde las ondulaciones del geoide son los parámetros ingórnita a determinar. Ahora bien, las relaciones de observación dan como valores observados vía desviación de la vertical, diferencias de ondulación del geoide únicamente, por tanto teniendo únicamente estos datos se puede determinar la forma de la superficie del geoide, pero no su posición en el espacio con respecto al elipsoide, es decir, se pueden estimar diferencias de ondulación, pero no ondulaciones propiamente dichas. Para definir la posición del geoide respecto del elipsoide de referencia es necesario el conocimiento de la ondulación del geoide en alguno de los puntos dato. En términos matemáticos, la matriz de ecuaciones normales es para n puntos una matriz de n filas y n columnas y su rango es $(n - 1)$, es decir, es singular, pudiéndose encontrar una submatriz suya de orden $(n - 1)$ no singular. De momento nos ocuparemos del caso regular, esto es, supondremos conocida la ondulación del geoide en al menos un punto de los n puntos datos en desviación de la vertical.

Las relaciones de observación pueden escribirse, en la forma general

$$N_i - N_j - K_{ij} = v_{ij}, \quad K_{ij} = -(\theta_i + \theta_j) s_{ij} / 2 \quad [31]$$

para dos puntos cualesquiera P_i , P_j , y

$$N_i - K_{ij} = v_{ij}, \quad K_{ij} = N_j - (\theta_i + \theta_j) s_{ij} / 2 \quad [32]$$

para un punto fijo P_j (de ondulación del geoide N_j conocida).

Entonces para una red astrogeodésica con m enlaces u observaciones, n puntos con desviación de la vertical y k puntos donde se conoce la ondulación del geoide, se tendrá una matriz de configuración con m filas y $(n - k)$ columnas. Cada fila de dicha matriz tendrá dos elementos distintos de cero de los $(n - k)$ o solamente uno cuando uno de los puntos que enlaza la observación sea fijo, por tanto, se trata de matrices totalmente huecas (sparse).

En forma matricial las relaciones de observación [31] y [32] se pueden expresar

$$A\underline{x} - \underline{t} = \underline{v} \quad [33]$$

donde A es una matriz $(m, n - k)^T$, $m \geq (n - k)$, es la matriz de configuración o diseño de ajuste, $\underline{x} = (N_1, \dots, N_{n-k})^T$ es el vector de parámetros u

ondulaciones incógnitas a estimar, $\underline{t} = (k_1, \dots, k_m)^T$ el vector de términos independientes u observaciones y $\underline{v} = (v_1, \dots, v_m)^T$ el vector de residuos.

Se plantea el siguiente modelo lineal estocástico tipo Gauss-Markov para la determinación astronómica del geoide,

$$\begin{aligned} A \underline{x} - \underline{t} &= \underline{v} \\ E(\underline{t}) &= A \underline{x}, \text{ o bien } E(\underline{v}) = \underline{Q} \\ \text{cov}(\underline{v}) &= E(\underline{v} \underline{v}') = \sigma_o^2 Q = \Sigma_{vv} \\ \underline{v} &\in N(\underline{Q}, \sigma_o^2 Q) \end{aligned} \quad [34]$$

siendo $E(\bullet)$ el operador esperanza matemática, $\text{cov}(\bullet)$ el operador de covarianza, $N(\underline{Q}, \sigma_o^2 Q)$ la distribución normal m-dimensional de media cero y matriz de varianzas-covarianzas $\sigma_o^2 Q$, con σ_o^2 el factor de varianza a priori de peso unidad.

Ahora bien, en este modelo se han supuesto algunas hipótesis que hay que contrastar, tales como

1. El vector de residuos sigue una distribución normal.
2. $E(\underline{v}) = \underline{Q}$, lo que equivale a decir que no existen errores groseros ni sistemáticos.
3. Las precisiones a priori de las observaciones postuladas en la matriz $\sigma_o^2 Q$ han de ser consistentes con los resultados a posteriori.

Estas hipótesis se pueden contrastar con test estadísticos que discutiremos más adelante.

Bajo estas hipótesis, la solución mínimos cuadrados $\hat{\underline{x}}$, es decir, la que minimiza $\|A\underline{x} - \underline{t}\|^2$, con la norma definida en el espacio de observaciones por la matriz de pesos P , viene dada por (Sevilla, M. J., 1986)

$$\hat{\underline{x}} = (A^T P A)^{-1} A^T P \underline{t} = N^{-1} \underline{d} \quad [35]$$

$$N = A^T P A \text{ y } \underline{d} = A^T P \underline{t} \quad [36]$$

El vector de errores residuales estimado es

$$\hat{\underline{v}} = A \hat{\underline{x}} - \underline{t} = [A (A^T P A)^{-1} A^T P - I] \underline{t}. \quad [37]$$

La varianza de peso unidad del ajuste es

$$\hat{\sigma}_o^2 = \hat{\underline{v}}^T P \hat{\underline{v}} / (m - n + k). \quad [38]$$

La matriz de varianzas-covarianzas del vector de parámetro estimado $\hat{\underline{x}}$ es

$$\Sigma_{\hat{\underline{x}}\hat{\underline{x}}} = \hat{\sigma}_o^2 (A^T P A)^{-1} = \hat{\sigma}_o^2 N^{-1}. \quad [39]$$

La matriz de varianza-covarianza de los errores residuales estimados \hat{v} es

$$\Sigma_{\hat{v}\hat{v}} = \hat{\sigma}_o^2 (P^{-1} - AN^{-1} A^T). \quad [40]$$

La matriz de varianza-covarianza de las observaciones estimadas \hat{l} es

$$\Sigma_{ll} = A \Sigma_{\hat{x}\hat{x}} A^T = \hat{\sigma}_o^2 A N^{-1} A^T. \quad [41]$$

5. DETECCION DE ERRORES GROSEROS. FIABILIDAD

Denominamos fiabilidad de una red geodésica (en sentido amplio y considerando el caso de la nivelación astrogeodésica como un caso particular) a su resistencia a los errores groseros o equivocaciones, o dicho en otras palabras, a la facilidad para la detección de los errores groseros. Evidentemente, cuanto más precisas sean las observaciones y homogéneas, óptima la configuración de la red, un error grosero será más fácilmente detectable. En la literatura geodésica se han dado varios métodos para la detección de errores groseros, de los que vamos a resumir aquí el τ -test (J. A. Pope, 1975) y el B -test (W. Baarda, 1968), así como la aplicación de la hipótesis lineal general a la detección de errores groseros.

5.1. El τ -test de Pope

Consideramos el modelo lineal éstocástico [34] donde se supone que Q es no singular. El vector de errores verdaderos v cumple la relación

$$v = E(t) - t,$$

con la condición $E(t) = Ax$, y matriz de varianza a priori

$$\Sigma_{vv} = \sigma_o^2 P^{-1}. \quad [42]$$

El vector de errores residuales estimados $\hat{v} = A\hat{x} - t$ está relacionado con el vector de errores verdaderos por

$$\hat{v} = K v, \quad [43]$$

donde (M. J. Sevilla, 1986)

$$\begin{aligned} K &= I - AN^{-1}A^T P, \\ N &= A^T P A. \end{aligned} \quad [44]$$

La matriz de pesos $P = Q^{-1}$ es no singular y simétrica, entonces existe una única matriz S triangular superior tal que

$$P = S^T S \text{ (factorización de la matriz } P\text{).}$$

Consideremos ahora los residuales transformados

$$\begin{aligned} \underline{v}^1 &= S\underline{v}, \\ \hat{\underline{v}}^1 &= S\hat{\underline{v}}, \end{aligned} \quad [45]$$

junto con

$$A^1 = SA,$$

entonces, aplicando la ley de propagación de varianzas-covarianzas para operadores lineales, se obtiene que

$$\Sigma_{\underline{v}^1 \underline{v}^1} = S^T \Sigma_{\underline{v} \underline{v}} S = \sigma_o^2 S^T P^{-1} S = \sigma_o^2 I \quad [46]$$

luego el vector \underline{v}^1 se distribuye según una normal de media cero y matriz de varianzas-covarianzas $\sigma_o^2 I$, siendo I la matriz identidad.

Por otra parte consideramos el vector $\hat{\underline{v}}^1$ cuya matriz de varianzas-covarianzas es por [45] y [40]

$$\begin{aligned} \Sigma_{\hat{\underline{v}}^1 \hat{\underline{v}}^1} = \text{cov}(S\hat{\underline{v}}) &= S^T \Sigma_{\hat{\underline{v}} \hat{\underline{v}}} S = \hat{\sigma}_o^2 S^T (Q - A (A^T P A)^{-1} A^T) S = \\ &= \hat{\sigma}_o^2 (I - A' (A'^T A')^{-1} A'^T) \end{aligned}$$

y poniendo

$$K' = I - A' (A'^T A')^{-1} A'^T, \quad [47]$$

resulta

$$\Sigma_{\hat{\underline{v}}^1 \hat{\underline{v}}^1} = \hat{\sigma}_o^2 K' \quad [48]$$

Si la matriz de pesos es diagonal, que es el caso ordinario

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & p_m \end{pmatrix}, \quad [49]$$

entonces la matriz S viene dada por

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \sqrt{p_m} \end{pmatrix} \quad [50]$$

y la transformación $\hat{v}'_i = S\hat{v}_i$ es directamente el producto por la raíz cuadrada del peso

$$\hat{v}'_i = \sqrt{P_i} \hat{v}_i \quad [51]$$

La varianza del residual i -ésimo \hat{v}'_i calculada con [42], [43] y [44] y teniendo en cuenta [45] y [47] viene dada por

$$\sigma_{\hat{v}_i}^2 = \sigma_0^2 \frac{k'_{ii}}{p_i}, \quad [52]$$

con k'_{ii} el elemento i -ésimo de la diagonal de K' , y σ_0^2 la varianza de la unidad de peso a priori, que supondremos desconocida. Entonces, J. A. Pope, basándose en trabajos de T. Thomson, (1954) introduce la τ -distribución mediante la t de Student por

$$\tau_r = \sqrt{r} t_{r-1} / \sqrt{r-1 + t_{r-1}^2}, \quad [53]$$

siendo r el número de grados de libertad del ajuste y t la variable t de Student, demostrándose que la variable tipificada $\hat{v}_i / \hat{\sigma}_{\hat{v}_i}$ sigue una distribución τ con r grados de libertad, $r = m - n + k$, siendo ahora

$$\hat{\sigma}_{\hat{v}_i}^2 = \hat{\sigma}_0^2 \frac{k'_{ii}}{p_i} = \hat{\sigma}_0^2 (P^{-1} - A N^{-1} A^T)_{ii} \quad [54]$$

la estimación de la varianza del residual i -ésimo, dada por [40].

El test para la aceptación o rechazo de observaciones se plantea en los siguientes términos,

Hipótesis H_0 : Se acepta la observación i -ésima

Hipótesis alternativa H_1 : Existe un error grosero en la observación i -ésima y se rechaza.

Se acepta H_0 si $|\hat{v}_i / \hat{\sigma}_{\hat{v}_i}| < C$. [55]

Se rechaza H_0 , es decir, se acepta H_1 si $|\hat{v}_i/\hat{\sigma}_{\hat{v}_i}| \geq C$, siendo C el valor crítico que depende del nivel de significación del test, y del número de grados de libertad r del ajuste. Luego

$$C = \sqrt{r} t_{r-1, \alpha} / \sqrt{r-1 + t^2_{r-1, \alpha}} \quad [56]$$

Digamos finalmente que se ha incorporado al programa de nivelación astrogeodésica para determinación del geoide por el método de Helmert una subrutina denominada POPE que determina el valor crítico C , el cual también puede obtenerse de las correspondientes tablas (Pope, 1975).

5.2. Teoría de Baarda

Una forma intuitiva de contrastar una red es realizar el examen de los residuales \hat{v} que produce el ajuste de mínimos cuadrados. Así, por ejemplo, si el vector $\underline{\hat{v}}$ estuviese formado por variables **incoreladas** se tendría que la distribución de las cantidades o residuales tipificados $\hat{v}_i/\hat{\sigma}_{\hat{v}_i}$, con $\hat{\sigma}_{\hat{v}_i}$ dado por [52], sería una distribución normal de media cero y varianza unidad $N(0,1)$. Ahora bien, esto en la práctica no sucede, demostrándose (W. Baarda, 1968) que es mejor, esto es, el test es más sensible con respecto a la detección de errores groseros, si se contrasta la cantidad $P\underline{\hat{v}}$, siendo P la matriz de pesos de las observaciones, que no es diagonal aunque sigue siendo simétrica.

Toda observación puede analizarse por separado, para lo cual introducimos el vector auxiliar $\underline{c}^T = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, si se quiere contrastar la observación i -ésima. Definamos la cantidad

$$f = -\underline{c}^T P\underline{\hat{v}} \quad [57]$$

siendo entonces la cantidad a contrastar

$$w_i = f / \sigma_f, \quad [58]$$

con $w_i \in N(0,1)$ (aproximadamente debido a la correlación de las variables del vector \underline{w}). La desviación típica de la cantidad f puede calcularse mediante la ley de propagación de las varianzas, aplicada a [57]

$$\sigma_f^2 = \sigma_0^2 \underline{c}^T P Q_{\underline{\hat{v}}\underline{\hat{v}}} P \underline{c},$$

donde por [40]

$$Q_{\underline{\hat{v}}\underline{\hat{v}}} = Q - A (A^T P A)^{-1} A^T,$$

de modo que

$$\sigma_f = \sigma_0 \sqrt{\underline{c}^T P Q_{\underline{\hat{v}}\underline{\hat{v}}} P \underline{c}},$$

entonces [58] queda en la forma

$$w_i = \frac{-\underline{c}^T P \hat{v}}{\sigma_0 \sqrt{\underline{c}^T P Q_{vv}^{-1} P \underline{c}}} , \quad [59]$$

siendo σ_0 el factor de varianza de peso unidad a priori que se supone conocido y Q_{vv} la matriz cofactor de los residuos.

El **w-test de Baarda** se plantea en los siguientes términos. Dado el nivel de significación α , el valor crítico w_0 viene dado por

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{w_0} e^{-t^2/2} dt = 1 - \alpha. \quad [60]$$

Por ejemplo, para $\alpha = 0.05$, $w_0 = 1.96$ y para $\alpha = 0.01$, $w_0 = 2.58$.

Si $|w_i| > w_0$ existe una probabilidad $(1 - \alpha)$ de que la observación i -ésima sea errónea.

El cálculo de las cantidades w_i necesita la determinación de la matriz $Q_{vv} = Q - A Q_{xx}^{-1} A^T$, o lo que es lo mismo de la matriz cofactor de las incógnitas Q_{xx} . Distintas elecciones del vector \underline{c} desde $i=1, \dots, m$, van definiendo las cantidades w_i y se contrastan todos los residuales individualmente.

Parámetros de fiabilidad

A continuación se va a estudiar el efecto que producen en una red geodésica los errores groseros, esto es, las variaciones que pueden tener las cantidades de interés geodésico en el ajuste de una red. Supongamos que la observación i -ésima está afectada por la presencia de un error grosero o sistemático Δ , el efecto que esto produce en el vector de observaciones \underline{t} es

$$\Delta \underline{t} = \underline{c} \cdot \Delta, \quad [61]$$

Δ es un escalar, \underline{t} y \underline{c} son vectores, y como antes

$$\underline{c} = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)^T \quad [62]$$

La obtención del efecto que produce el error grosero Δ en otras cantidades es inmediato, así por [35], [37], [57] y [58] se tiene

$$\Delta \hat{x} = N^{-1} A^T P \underline{c} \Delta, \quad [63]$$

$$\Delta \hat{v} = -Q_{vv}^{-1} P \underline{c} \Delta, \quad [64]$$

$$\Delta f = \underline{c}^T P Q_{vv}^{-1} P \underline{c} \Delta, \quad [65]$$

$$\Delta w = \sqrt{\underline{c}^T P Q_{vv}^{-1} P \underline{c}} \Delta / \sigma_0. \quad [66]$$

Sea $E = \hat{v}^T P \hat{v}$, entonces el efecto en esta forma cuadrática es

$$\begin{aligned}\Delta E &= (\hat{v} + \Delta \hat{v})^T P (\hat{v} + \Delta \hat{v}) - \hat{v}^T P \hat{v} = \\ &\quad \Delta \hat{v}^T P \Delta \hat{v} + 2 \Delta \hat{v}^T P \hat{v},\end{aligned}\quad [67]$$

y puesto que es una cantidad estocástica, su esperanza matemática es

$$E(\Delta E) = \Delta \hat{v}^T P \Delta \hat{v} = \sigma_o^2 \Delta w^2. \quad [68]$$

Esto es válido para cualquier error en una observación. Consideremos ahora un valor especial o particular, tomado de tal forma que el cambio ∇ en una observación puede detectarse con el w -test con una probabilidad β , que normalmente se toma el 80 % y a un nivel de significación α la denominaremos, siguiendo la notación de la escuela de Delft, $\nabla w(\alpha, \beta)$, teniéndose los valores

$$\begin{array}{lll}\alpha = 0.05 & \beta = 80 \% & \nabla w = 2.80, \\ \alpha = 0.01 & \beta = 80 \% & \nabla w = 3.44, \\ \alpha = 0.001 & \beta = 80 \% & \nabla w = 4.13\end{array}$$

Aplicando la expresión [66] para w , se tiene

$$\nabla = \nabla w \sigma_o / \sqrt{\underline{c}^T P Q_{vv} P \underline{c}},$$

y sustituyendo en [61], [63], [64] y [65] resulta

$$\begin{aligned}\nabla t &= \underline{c} \nabla, \\ \nabla \underline{x} &= N^{-1} A^T P \underline{c} \nabla \\ \nabla \hat{v} &= -Q_{vv} P \underline{c} \nabla, \\ \nabla f &= \sqrt{\underline{c}^T P Q_{vv} P \underline{c}} \sigma_o \nabla,\end{aligned}$$

W. Baarda encuentra una expresión para acotar la cantidad

$$\nabla \underline{x}_k / \sigma_{\underline{x}_k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

por medio de

$$\nabla \underline{x}_k / \sigma_{\underline{x}_k} \leq \frac{1}{\sigma_o} \sqrt{\nabla \underline{x}^T N \nabla \underline{x}},$$

y puesto que

$$\begin{aligned}\nabla \underline{x}^T N \nabla \underline{x} &= \underline{c}^T P A N^{-1} N N^{-1} A^T P \underline{c} \nabla^2 = \underline{c}^T P A N^{-1} A^T P \underline{c} \nabla^2 = \\ &= \underline{c}^T P (Q - Q_{vv}) P \underline{c} \nabla^2 = (\underline{c}^T P \underline{c} - \underline{c}^T P Q_{vv} P \underline{c}) \nabla^2,\end{aligned}$$

y

$$\nabla^2 = \frac{\nabla w^2 \sigma_0^2}{\underline{c}^T P Q_{vv} P \underline{c}},$$

se tiene que

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \nabla \underline{x}^T N \nabla \underline{x} = (\frac{\underline{c}^T P \underline{c}}{\underline{c}^T P Q_{vv} P \underline{c}} - 1) \nabla w^2 = V \nabla w^2$$

Al parámetro

$$r_x = \sqrt{V} \nabla w$$

tal que

$$\nabla \hat{x}_k \leq r_x \sigma_{\hat{x}_k} \quad [69]$$

se le llama **fiabilidad externa** de x y dependen de \underline{c} . De forma similar se define la **fiabilidad interna** de las observaciones por

$$r_i = \frac{\nabla t_i}{\sigma_i} = \frac{\nabla t_i}{\sigma_o \sqrt{\underline{c}^T Q \underline{c}}} = \nabla w / \sqrt{\underline{c}^T Q \underline{c} \cdot \underline{c}^T P Q_{ii} P \underline{c}} \quad [70]$$

Para observaciones incorreladas, P y por tanto Q son matrices diagonales, entonces los parámetros que definen la fiabilidad externa e interna vienen dados por las sencillas expresiones

$$r_x = \sqrt{\frac{q_i}{1 - q_i}} \nabla w \quad [71]$$

$$r_i = \sqrt{\frac{1}{1 - q_i}} \nabla w \quad [72]$$

donde,

$$q_i = \frac{Q_{ii} - Q_{vi} v_i}{Q_{ii}}, \quad [73]$$

siendo Q_{ii} y Q_{vi} los elementos diagonales de las matrices cofactor a priori y a posteriori. En función de q_i el criterio de fiabilidad se establece diciendo que

para $q_i > 0.9$ la observación está mal controlada, para $q_i < 0.9$ bien controlada y para $q_i < 0.6$ muy bien controlada.

Luego a cada observación le corresponden unos valores r_x y r_t , relacionándose su magnitud con la sensibilidad de la red para detectar errores groseros. Si una observación no está bien controlada, entonces $r \rightarrow \infty$, si una observación está relativamente bien controlada, $r \in (5, 10)$ y si r es menor que 5, la observación está muy bien controlada. Si r es mayor que 10 la observación no está bien controlada. Entendiendo por observación controlada la sensibilidad de la red para detectar un error grosero en dicha observación. Estos parámetros son fundamentales para una red geodésica, puesto que la precisión es una medida difícil de precisar en una red, y la fiabilidad es perfectamente definible a partir de las propias observaciones y de la configuración de la red. Pongamos un ejemplo ilustrativo del tema; en la actualidad se plantea la cuestión de triangular o trilaterar redes puesto que la trilateración para redes de primer y segundo orden con telurómetros es más rápida y más económica. Ahora bien en redes de primer orden la triangulación es mucho más fiable que la trilateración, puesto que para una red triangulada bien conformada y observada con una precisión angular de 0.5 segundos sexagesimales se detecta un error grosero cuando una observación está en un error de unos 3-4 segundos. Para una red trilaterada con una precisión de 2 ppm, se detecta un error grosero cuando está en el orden de unas 20-25 ppm. En cambio para redes de segundo orden de control dado por la del primero, el método de trilateración ofrece precisiones y fiabilidades comparadas a la triangulación.

6. ANALISIS DE POSIBLES SISTEMATISMOS

El modelo descrito en la sección 4 dado por

$$A\underline{x} - \underline{t} = \underline{v}, \underline{v} \sim N(\underline{Q}, \sigma_0^2 Q)$$

supone dos hipótesis de especial importancia

a) La media del vector \underline{v} es \underline{Q} , es decir, no existen sistematismos en el modelo.

b) La matriz de varianzas-covarianzas a priori de las observaciones es $\sigma_0^2 Q$, y σ_0^2 es la varianza a priori de peso unidad del ajuste.

Estas dos hipótesis son muy restrictivas, en general mucho más que la normalidad para el vector \underline{v} o el vector \underline{t} . En redes geodésicas la presencia de errores sistemáticos es muy corriente y pueden muchas veces pasar desapercibidos si los programas de compensación y tratamiento estadístico de redes no son lo suficientemente completos, o bien, si las redes en cuestión no verifican requisitos de control y fiabilidad, en cuanto a estar controladas por redes de orden superior y a que su diseño sea adecuado. Estos errores sistemáticos son debidos esencialmente a la falta o mala calibración de los

instrumentos de medida, a la refracción atmosférica, que en ocasiones es totalmente incontrolable, con variaciones significativas en plazos de tiempo muy breves, al campo gravitatorio terrestre, respecto del cual se hacen todas las observaciones geodésicas, y que usualmente, al menos en planimetría es despreciado, reducción inadecuada de las observaciones al elipsoide de referencia, control de orden superior de mala calidad para redes de orden inferior, etc. El tratamiento matemático de estos posibles sistemáticos solamente puede efectuarse con la adición de nuevas ingórnitas al problema considerado, y el posterior estudio mediante los tests estadísticos oportunos de la posible significación de dichas incógnitas.

Supondremos que se verifican las especificaciones a y b y que la varianza σ_0^2 es una cantidad conocida a priori.

Bajo estas hipótesis, el estadístico

$$\hat{R} = \underline{\hat{v}}^T P \underline{\hat{v}} \quad [74]$$

tiene una distribución central $\sigma_0^2 \chi_{m-n}^2$ (Núñez, 1987) y por tanto,

$$\hat{R}/\sigma_0^2 (m-n) \sim \chi_{m-n}^2 / (m-n), \quad [75]$$

Entonces,

$$\hat{\sigma}_0^2 = \hat{R}/(m-n) \quad [76]$$

es una estimación insesgada de la varianza a priori de peso unidad

$$E(\hat{\sigma}_0^2) = \sigma_0^2.$$

Supongamos que para nuestro modelo, la hipótesis $\hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$ no se verifica a un nivel de significación α , es decir,

$$\hat{\sigma}_0^2/\sigma_0^2 > F_{(m-n, \infty), \alpha} \quad [77]$$

Ante esta posible eventualidad vamos a considerar el modelo ampliado con incógnitas adicionales y , tomando la hipótesis nula H_0 formulada por

$$H_0: E(t) = (A \ C) \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \text{ con las restricciones } (O \ I) \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} = O, \quad [78]$$

siendo C una matriz (m, b) e y un vector $(b, 1)$ de incógnitas adicionales. La hipótesis H_0 indica que el modelo $A\underline{x} - t = \underline{y}$ es válido, y que no es necesario introducir incógnitas suplementarias a nuestro problema. La hipótesis alternativa puede escribirse,

$$H_A: E(t) = (A \ C) \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}. \quad [79]$$

Entonces se tiene que la diferencia entre las cantidades R_O y \hat{R}_A sumas de los cuadrados de los residuales ponderados bajo tal hipótesis nula H_O y la hipótesis alternativa H_A , dividida por σ_0^2 es decir

$$\frac{\hat{R}_O - \hat{R}_A}{\sigma_0^2} \quad [80]$$

donde (Teunissen, 1985)

$$\hat{R}_O - \hat{R}_A = t \ PKC [C^T PKC]^{-1} C^T PKt \quad [81]$$

con K dada por [44] tiene bajo la hipótesis nula una distribución dada por una χ^2/b , o lo que es lo mismo, $F_{b,\infty}$, es decir

$$E[(\hat{R}_O - \hat{R}_A)/\sigma_0^2 b / H_O] = 1,$$

mientras que bajo la hipótesis alternativa, H_A , la misma cantidad tiene una distribución $F_{b,\infty}$ no central, es decir

$$E[(\hat{R}_O - \hat{R}_A)/\sigma_0^2 b / H_A] = 1 + \lambda/b,$$

donde λ es el parámetro de no centralidad fijado un nivel de significación α ; sea C el valor crítico correspondiente para la distribución $F_{b,\infty}$ entonces:

Se acepta H_O si $(\hat{R}_O - \hat{R}_A)/\sigma_0^2 b \leq C$,

Se rechaza H_O si $(\hat{R}_O - \hat{R}_A)/\sigma_0^2 b > C$, [82]

En estas consideraciones se ha supuesto el factor de varianza a priori σ_0^2 conocido, esto puede no ser cierto, es decir, no se tiene información a priori realista de la bondad de las observaciones. En este caso la cantidad $(\hat{R}_O - \hat{R}_A)/\hat{\sigma}_0^2 b$, siendo $\hat{\sigma}_0^2$ la estimación de la varianza de peso unidad σ_0^2 , se distribuye según una $F_{b,f}$ central bajo la hipótesis nula, y no central bajo la hipótesis alternativa, con f el número de grados de libertad del ajuste.

Tomemos $b=1$, entonces la matriz C se reduce a un vector c , y si se toma el vector $c^T = c_i^T = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$, cuando la matriz de pesos es diagonal, como sucede normalmente en las aplicaciones geodésicas, evaluando [80] con [81] se tiene

$$(\hat{R}_O - \hat{R}_A)/\sigma_0^2 b = |v_i/\sigma_{vi}| = |w_i|, \quad [83]$$

es decir, resulta el residual tipificado i -ésimo, y la distribución de estas cantidades es una $\sqrt{F_{b,\infty}}$, esto es, $N(0,1)$ bajo la hipótesis nula. Haciendo variar $i = 1, \dots, m$, se tiene el clásico procedimiento de «data-snooping» para control de errores groseros en las observaciones.

Vamos a aplicar esta teoría al caso de una red de nivelación astrogeodésica en donde se manejan datos procedentes de desviaciones de la vertical determinadas a partir de un DATUM geodésico local, y diferencias de ondulación del geoide calculadas a partir de observaciones espaciales y convenientemente transformadas al sistema geodésico local. Si suponemos gran precisión a estas observaciones espaciales, se puede intentar contrastar posibles sistematismos propios de las observaciones astronómicas de determinación de longitud, en la componente η de la desviación de la vertical.

Para dos puntos P_i, P_j dato en desviación de la vertical, la diferencia de ondulación del geoide viene dada por,

$$\begin{aligned} N_j - N_i &= \frac{\theta_i + \theta_j}{2} s_{ij} = \frac{\theta_i^{(0)} + \theta_j^{(0)}}{2} s_{ij} + \\ &+ \frac{\delta\theta_i + \delta\theta_j}{2} s_{ij} \end{aligned}$$

y por tanto

$$N_j - N_i - \delta\theta_i s_{ij}/2 - \delta\theta_j s_{ij}/2 = (\theta_i^{(0)} + \theta_j^{(0)}) s_{ij}/2$$

indicando por $\theta^{(0)}$ los valores observados de la desviación de la vertical por métodos astrogeodésicos, y por $\delta\theta$ los posibles sistematismos propios de la observación astronómica, dados por,

$$\delta\theta_i = \delta\Lambda_i \cos\phi_i, \quad \delta\theta_j = \delta\Lambda_j \cos\phi_j,$$

siempre que supongamos que afectan a la longitud astronómica, caso totalmente coherente con la realidad.

Por otra parte, también tenemos observaciones espaciales de diferencia de ondulación del geoide, que se suponen libres de sistematismos, al menos despreciables, frente a los anteriores. Estas observaciones pueden escribirse para dos puntos P_q y P_k entre los que se haya hecho una de estas observaciones, de la forma

$$N_q - N_k = \Delta N_{qk}.$$

El planteamiento original del problema sería,

$$A\underline{x} - \underline{t} = \underline{v}, \quad \underline{v} \sim N(O, \sigma_0^2 Q),$$

donde el vector \underline{x} de incógnitas únicamente tendría ondulaciones del geoide.

Si se introducen las incógnitas adicionales que contemplan posibles sistematismos en la longitud astronómica, se tendría,

$$A\underline{x} + C\underline{y} = \underline{v}$$

y para contrastar la significación de las incógnitas \underline{y} se puede utilizar la hipótesis H_O dada por,

$$I_n \underline{y} = O,$$

siendo I_n la matriz identidad (n,n) para n ondulaciones del geoide incógnitas.

Sea

$$\hat{R} = \hat{\underline{y}}^T P \hat{\underline{y}} \quad \text{y} \quad \hat{R}_A = \hat{\underline{y}}_c^T P \underline{y}_c$$

y un nivel de significación α . Entonces si,

$$(\hat{R}_O - \hat{R}_A) / \sigma_0^2 n < F_{n, \infty, \alpha}$$

se acepta la hipótesis H . En caso contrario, se acepta la hipótesis alternativa, es decir, la existencia de posibles sistematismos en la componente η de la desviación de la vertical.

Ahora bien, a pesar de que se acepte la hipótesis H_O , lo que equivale a que globalmente no hay sistematismos, es posible que algunas de las observaciones de las que forme parte alguna componente del conjunto se vea afectada de algún posible sistemático, o equivalentemente, que existan errores groseros en las observaciones, lo que se puede contrastar con el test de Baarda antes descrito.

Esta situación se presenta también cuando se quieren combinar en un ajuste único, observaciones realizadas respecto de sistemas de referencia distintos. Supongamos que se quieren determinar diferencias de ondulación del geoide a partir de tres fuentes diferentes y esencialmente distintas, por ejemplo con observaciones astronómicas y geodésicas, espaciales y gravimétricas, y se quiere hacer una determinación del geoide combinado dentro de un mismo marco las tres clases de observaciones, referidas a priori a sistemas de referencia distintos. Para fines utilitarios los cálculos del geoide se suelen hacer en el sistema geodésico local o particular vigente en cada país, que denominaremos S_g , sea S_D el sistema espacial y S_G el sistema general que utiliza la gravimetría. Ordinariamente se tiene información a priori sobre los parámetros que definen la transformación de Helmert para ligar los distintos sistemas, es decir, (Núñez, 1987)

$$S_D \xrightarrow{T(y)} S_g \underline{y} = (X_0, Y_0, Z_0, w_1, w_2, w_3, dL, da, de^2)$$

$$S_G \xrightarrow{T(y')} S_g \underline{y}' = (X'_0, Y'_0, Z'_0, w'_1, w'_2, w'_3, dL, da, de^2)$$

Así, si se conocen las diferencias de ondulación del geoide entre los puntos P_i, P_j de la red astrogeodésica, por métodos espaciales y gravimétricos, y si se conoce los parámetros que definen los vectores \underline{y} e \underline{y}' , se pueden transformar estas diferencias de ondulación al DATUM geodésico por

$$\Delta N'_D(P_i, P_j) = \Delta N_D(P_i, P_j) + f^T(P_i, P_j) \underline{y}$$

$$\Delta N'_G(P_i, P_j) = \Delta N_G(P_i, P_j) + f^T(P_i, P_j) \underline{y}'$$

siendo el vector $f(P_i, P_j)$ definido por (Núñez, 1987)

$$f^T(P_j, P_i) = \left(\begin{array}{l} \cos\phi(P_j) \cos\lambda(P_j) - \cos\phi(P_i) \cos\lambda(P_i) \\ \cos\phi(P_j) \sin\lambda(P_j) - \cos\phi(P_i) \sin\lambda(P_i) \\ \sin\phi(P_j) - \sin\phi(P_i) \\ -e^2 R_1(P_j) \sin\phi(P_j) \cos\phi(P_j) \sin\lambda(P_j) + e^2 R_1(P_i) \\ \sin\phi(P_i) \cos\phi(P_i) \sin\lambda(P_i) \\ e^2 R_1(P_j) \sin\phi(P_j) \cos\phi(P_j) \cos\lambda(P_j) - e^2 R_1(P_i) \\ \sin\phi(P_i) \cos\phi(P_i) \cos\lambda(P_i) \\ R_1(P_j) (1 - e^2 \sin^2\phi(P_j)) - R_1(P_i) (1 - e^2 \sin^2\phi(P_i)) \\ (R_1(P_j) (1 - e^2 \sin^2\phi(P_j)) - R_1(P_i) (1 - e^2 \sin^2\phi(P_i))) / a \\ (-R_1(P_j) \sin^2\phi(P_j) + R_1(P_i) \sin^2\phi(P_i)) / a \end{array} \right)$$

Ahora bien, la información en cuanto a los parámetros de transformación dada en los vectores \underline{y} e \underline{y}' , según su procedencia puede no ser fiable como para garantizar la bondad de la transformación. Se puede por tanto considerar un vector residual, sistemático,

$$\delta\underline{y} = (\delta X_0, \delta Y_0, \delta Z_0, \delta w_1, \delta w_2, \delta w_3, \delta L, 0, 0).$$

$$\delta\underline{y}' = (\delta X'_0, \delta Y'_0, \delta Z'_0, \delta w'_1, \delta w'_2, \delta w'_3, \delta L', 0, 0).$$

En los vectores $\delta\underline{y}$ y $\delta\underline{y}'$ no se han considerado residuales en a y e^2 , puesto que los parámetros que definen las dimensiones de los distintos elipsoides de referencia vienen dados a priori, y en cuanto a los utilizados por la geodesia espacial y la gravimétrica determinados por cálculos de carácter global, son mucho más fiables que los que a nivel local (de país) puedan hacerse.

Por tanto, el problema puede plantearse en la forma:

$$Ax + B\delta\underline{y} = \underline{v} \quad v \sim N(O, \sigma_0^2 Q),$$

y la hipótesis nula H_0 a contrastar definida por

$$I_b \delta\underline{y} = 0,$$

siendo

$$\delta\underline{y} = (\delta\underline{y}; \delta\underline{y}').$$

REFERENCIAS

- Baarda, W. (1968): «A testing procedure for use in Geodetic Networks». *Neth. Geod. Comm. Pub. on Geodesy*. N.S., vol. 2, núm. 5. Delft.
- Heiskanen, W. A. y Moritz, H. (1985): «Geodesia Física». Instituto Nacional. Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid.
- Levallois, J. J. (1970): «Geodésie Générale». Eyrolles. Paris.
- Núñez, A. (1987): «Determinación de perfiles del geóide. Optimización de métodos y aplicaciones a la red astrogeodésica de Portugal». Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.
- Pope, A. J. (1976): «The Statistic of Residuals and the Detection of Outliers» NOAA, Tech. Rep. NOS 65 NGS I. U.S. Dep. of Commerce. EEUU.
- Sevilla, M. J. (1975): «Coordenadas Astronómicas y Geodésicas. Desviación Relativa de la Vertical». Inst. de Astronomía y Geodesia (UCM-CSIC). Pub. núm. 88. Madrid.
- Sevilla, M. J. (1986): «Formulación de modelos matemáticos en la compensación de redes geodésicas». *III Curso de Geodesia Superior*. Inst. de Astronomía y Geodesia (UCM-CSIC), Pub. núm. 148. Madrid.
- Sevilla, M. J. y Núñez, A. (1979): «Estudio de errores en nivelación astrogeodésica». III Asamblea Nacional de Geodesia y Geofísica. Madrid.
- Struik, D. (1975): «Geometría Diferencial Clásica». Aguilar. Madrid.
- Zakatov, P. S. (1981): «Curso de Geodesia Superior». Mir. Moscú.