

## 2. *Análisis estadístico de observaciones geodésicas antes de la compensación*

P. ROMERO Y M. J. SEVILLA

Instituto de Astronomía y Geodesia (U.C.M.-C.S.I.C.)  
Facultad de Ciencias Matemáticas  
Universidad Complutense, Madrid

### 1. INTRODUCCION

En el proceso de observación de los diferentes elementos de una red geodésica, ángulos y distancias, aplicando métodos potentes, se obtiene una gran cantidad de valores de los observables; el destino de dichos valores es en general su utilización para la formación de los términos independientes del modelo matemático linealizado que se utiliza en la compensación de dicha red. Entonces, desde el punto de vista de la teoría de errores, estos valores de los observables deben ser cantidades en las que los errores de observación sólo han de estar presentes de forma aleatoria, pero la experiencia demuestra que en muchas ocasiones este no es el caso, sino que además de dichos errores aleatorios, aparecen otros de carácter constante o sistemático y esto invalida los ulteriores resultados.

El análisis estadístico a posteriori de los resultados de una compensación es una forma común de estudiar la presencia de errores groseros o sistemáticos en las observaciones, no obstante los resultados obtenidos por estos procedimientos no son completamente satisfactorios, pues sucede frecuentemente que una observación no buena no sea detectada a posteriori sencillamente por los efectos distributivos de las correlaciones en el método de mínimos cuadrados.

En consecuencia, siempre que sea posible es necesario proceder a un tratamiento estadístico de los datos de observación a priori del ajuste o compensación. En este análisis se trata de contrastar la calidad de las observaciones, la precisión interna de los instrumentos, la precisión en las determinaciones y la compatibilidad de las diferentes series de medidas y de su precisión. Antes de proceder a este análisis es necesario eliminar los sistematismos conocidos.

Es importante tener un buen conocimiento de las distribuciones estadísticas de las variables aleatorias y formas cuadráticas que intervienen en el ajuste de

un modelo estocástico de Gauss-Markov general, las cuales permiten establecer los criterios de aplicación de los diferentes tests de contraste de hipótesis utilizados. El uso de dichas distribuciones puede hacerse con las correspondientes tablas publicadas al efecto en casi todos los tratados de estadística o bien, como es nuestro caso, mediante subprogramas de cálculo adecuados que permiten tener en cuenta de forma automática el número de grados de libertad de cada problema particular.

## 2. MEDIDAS DE DISTANCIAS

La medida electromagnética de una distancia entre dos señales geodésicas proporciona, como datos de observación, un conjunto de  $i$  series con  $n_i$  valores cada una. Todas las observaciones deben homogeneizarse por lo que tienen que ser corregidas, tanto por efectos de las condiciones meteorológicas como por la configuración geométrica (refracción, arco-cuerda, diferencia de altitud), utilizándose fórmulas adecuadas a las características y precisión de los instrumentos. Es necesario, por tanto, disponer de medidas de presión y temperatura, que permitan corregir el efecto de las condiciones meteorológicas en la velocidad de propagación de la onda, y las alturas de los instrumentos emisor y receptor con respecto a las señales que materializan los puntos cuya distancia se ha medido. A partir de todas las series de medidas efectuadas debe estimarse el valor que represente la distancia medida junto con el valor de algún parámetro estadístico que represente la medida de la precisión de dicha distancia observada.

### 2.1. Corrección por influencia de las condiciones meteorológicas

Esta corrección se acostumbra a separar en dos componentes:

#### a) *Corrección por efecto atmosférico sobre la velocidad de propagación de la radiación*

Está motivada por la variación del índice de refracción a lo largo de la trayectoria. Si  $t$  es el tiempo invertido por una onda en recorrer el trayecto entre el emisor y el receptor y  $\bar{n}$  el índice de refracción «medio» a lo largo de la trayectoria, la distancia viene dada por

$$d = \frac{c_0 \cdot t}{\bar{n}}$$

siendo  $c_0$  la velocidad de propagación de la onda en el vacío.

En cambio, la distancia  $d_0$  que proporciona el instrumento verifica que

$$d_0 = \frac{c_0 \cdot t}{n_s}$$

donde  $n_s$  es el índice de refracción estándar determinado en condiciones normales.

Por consiguiente, la corrección aditiva por el efecto atmosférico sobre la velocidad de propagación de la radiación que debe aplicarse a la distancia instrumental es

$$\Delta d_i = d - d_0 = d_0 \left( \frac{n_s}{\bar{n}} - 1 \right) \quad [2.1]$$

La precisión en la medida de distancias depende según [2.1] de la precisión con la que se obtenga el índice de refracción. El conocimiento preciso de dicho índice requiere su determinación empírica a partir de resultados de medidas experimentales apropiadas realizadas en diferentes condiciones físicas. No obstante, en ausencia de tales determinaciones es normal utilizar un modelo teórico que nos proporcione un medio de calcular las correcciones atmosféricas. En una atmósfera normal (0° C de temperatura, 760 mm Hg de presión y 0.03 % de CO<sub>2</sub>) el índice de refracción en un punto para luz pura monocromática de longitud de onda  $\lambda$  (en micras), se obtiene a partir de la fórmula de Barrell & Sears (Levallois, 1979)

$$(n_g - 1) 10^7 = 2876.04 + \frac{16.288}{\lambda^2} + \frac{0.136}{\lambda^4}$$

En los instrumentos de medida de distancias por infrarrojos, la luz emitida está modulada, esto es, se emiten trenes de ondas; por lo tanto la velocidad de propagación será una velocidad de grupo a la que corresponde un índice de refracción equivalente que calcularemos mediante la fórmula

$$(n_g - 1) 10^7 = 2876.04 + \frac{3 \times 16.288}{\lambda^2} + \frac{5 \times 0.136}{\lambda^4} \quad [2.2]$$

En unas condiciones atmosféricas de  $t^\circ$  C de temperatura seca y  $p$  mm Hg de presión, el índice de refracción viene dado por

$$n_L = 1 + \frac{n_g - 1}{1 + \alpha t} \cdot \frac{p}{760} - \frac{5.5 e}{1 + \alpha t} \cdot 10^{-8}$$

donde  $\alpha = 1/273.2$  es el coeficiente de dilatación del aire y  $e$  la tensión del vapor de agua expresada en mm Hg; esto es lo mismo que poner

$$n_L = 1 + \frac{0.359474(n_g - 1)}{273.2 + t} p - \frac{1.5026 \cdot 10^{-5}}{273.2 + t} e \quad [2.3]$$

Para calcular la tensión de vapor de agua e utilizaremos la fórmula (Burnside, 1982)

$$e = E - 0.00066 [1 + 0.00115 t'] p (t - t') \quad [2.4]$$

donde  $t'$  es la temperatura húmeda en °C y  $E$  la tensión máxima de vapor de agua dada por

$$\log E_{\text{mmHg}} = 26.12612 - \frac{3049.50}{273.2 + t'} - 5.86970 \log (273.2 + t') \quad [2.5]$$

Si se han tomado varias lecturas de presión y temperatura en un mismo punto, tomaremos como índice de refracción en dicho punto la media aritmética de los índices obtenidos aplicando la fórmula [2.3]. Para determinar el índice de refracción a lo largo de la trayectoria  $\bar{n}$  deberemos disponer de varios valores de  $n_L^i$  a lo largo de la misma (al menos en los puntos extremos de la visual). Si  $n_m$  es la media aritmética de los valores  $n_b^i$  la teoría de ondas muestra que  $\bar{n} > n_m$ , y  $\bar{n}$  puede calcularse en función de  $n_m$  utilizando la expresión establecida por Saastamoinen (Levallois, 1979).

$$\frac{1}{\bar{n}} = \frac{1}{n_m} \left[ 1 - \frac{K(1-K)d^2}{2R^2} \left( \frac{2N-1}{6(N-1)} - \frac{1}{3} \right) \right] \quad [2.6]$$

donde  $K$  es el coeficiente de refracción de la trayectoria,  $R$  es el radio de curvatura de la geodésica que une los extremos de la visual y  $N$  es el número de puntos en los que conocemos el índice de refracción puntual  $n_L$ .

Entonces, la distancia verdadera se diferencia del valor instrumental en el término

$$d_0 n_s \left[ \frac{1}{\bar{n}} - \frac{1}{n_s} \right] = d_0 n_s \left[ \frac{1}{n_m} - \frac{1}{n_s} \right] - \frac{K(1-K)d^3}{2R^2} \left( \frac{2N-1}{6(N-1)} - \frac{1}{3} \right)$$

si sólo conocemos el índice de refracción en los extremos del trayecto, se reduce a

$$\left( N = 2 \Rightarrow \frac{2N-1}{6(N-1)} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \right)$$

$$\Delta_1 d = - \frac{K(1-K)d_0^3}{12R^2} + d_0 \left( \frac{n_s}{n_m} - 1 \right) \quad [2.7]$$

Veamos ahora como determinar el coeficiente de refracción  $K$  de la trayectoria. Para cada punto en el que dispongamos de datos meteorológicos, calculamos un valor  $K_i$  mediante la expresión (Levallois, 1979)

$$K_i = \frac{R}{n_L^i} \left[ (n_s - 1) \frac{T_0}{P_0} \frac{p}{T^2} \right] \left[ - \frac{g\Delta_0 T_0}{P_0} - \frac{dT}{dh} \right] \quad [2.8]$$

donde  $n_L^i$  es el índice de refracción a lo largo de la trayectoria,  $T_0 = 273.2^\circ \text{K}$  es la temperatura normal,  $P_0 = 760 \text{ mm Hg} = 1013.25 \text{ mb}$  es la presión normal  $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ ,  $dT/dh$  es el gradiente térmico de la zona y  $T$  es la temperatura en  $^\circ \text{K}$  y  $\Delta_0$  es la densidad. Tomaremos como valor de  $K$  la media aritmética de los  $K_i$ .

#### b) Corrección por efecto atmosférico sobre la curvatura de la trayectoria de la radiación

Esta corrección (Bomford, 1980), nos permite pasar del arco de la curva que recorre el rayo a la cuerda (distancia rectilínea)

$$\Delta_2 d = d' - d = -K^2 \frac{d^3}{24R^2} \quad [2.9]$$

donde  $K$  es el coeficiente de refracción, y  $R$  es el radio de curvatura de la geodésica que une los extremos de la visual en su punto medio sobre la superficie de la Tierra. En la práctica, si las distancias son cortas, se aproxima  $R$  por el radio medio terrestre ( $R = 6371 \text{ Km}$ ).

### 2.2. Corrección por diferencia de altitud entre el distanciómetro y el prisma

Sean  $H_D$  y  $H_P$  las alturas del distanciómetro y el prisma, respectivamente, sobre las señales que materializan los puntos  $y$  y  $z$  la distancia cenital de la visual. Si  $d'$  es la distancia observada (corregida por los factores meteorológicos) y  $d^c$  la distancia corregida por diferencia de alturas, entonces (ver figura 1)

$$d^c = \frac{\text{sen}(z - \beta)}{\text{sen } z} d'$$

donde  $\beta$  es tal que  $z-\beta$  es la distancia cenital correspondiente a  $d'$  y verifica la ecuación

$$\text{sen } \beta = \frac{H_P - H_D}{d'} \text{sen } z$$

Desarrollando  $\text{sen}(z-\beta)$  y sustituyendo  $\text{sen } \beta$  se obtiene

$$\begin{aligned} d^c &= \frac{\text{sen}(z-\beta)}{\text{sen } z} d' = \frac{\text{sen } z \cos \beta - \cos z \text{sen } \beta}{\text{sen } z} d' = \\ &= d' \cos \beta - \Delta H \cos z \end{aligned}$$

y sustituyendo ahora  $\cos \beta$  se obtiene

$$d^c = (d'^2 - \Delta H^2 \text{sen } z)^{1/2} - \Delta H \cos z \quad [2.10]$$

En definitiva la distancia corregida por efectos atmosféricos y diferencia de alturas entre el distanciómetro y el prisma viene dada por [2-10] donde

$$d' = d_0 + \Delta_1 d + \Delta_2 d \quad [2.11]$$

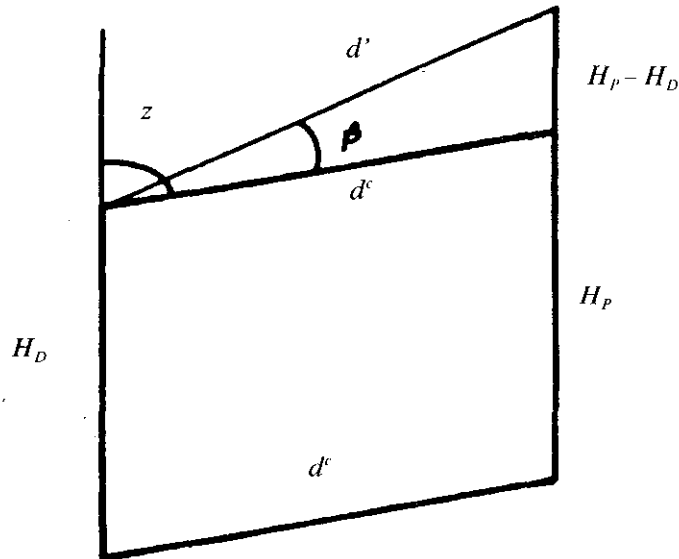


Figura 1

### 2.3. Análisis estadístico de las distancias observadas antes del ajuste

Una vez corregidos los datos de los efectos sistemáticos descritos anteriormente procederemos, utilizando el contraste de hipótesis estadísticas, a analizar las diversas medidas de distancias efectuadas. Este análisis de datos nos va a permitir contrastar la precisión interna del instrumento y la precisión de la determinación.

A partir de las  $n_i$  lecturas  $d_{ij}$ ,  $j=1, \dots, n_i$  de cada serie  $i$ , supuestas todas de igual confianza, calcularemos la media  $\bar{d}_i$  y el error medio cuadrático  $s_i$  de la serie  $i$  por las fórmulas

$$\bar{d}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} d_{ij}}{n_i} \quad [2.12]$$

$$s_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n_i} (\bar{d}_i - d_{ij})^2}{n_i - 1}} \quad [2.13]$$

Esto se hace para cada una de las series,  $i=1, 2, \dots, k$ , siendo  $k$  el número de series.

Sobre estos valores medios realizamos las correcciones meteorológica y geométrica dadas en la sección 2.2 (estas correcciones son prácticamente constantes para cada una de las lecturas que integran cada serie dado el corto intervalo de tiempo empleado en cada serie, en cambio pueden variar de una serie a otra). Seguidamente se halla la media total del conjunto de las series junto con los errores medios cuadráticos, a partir de las lecturas medias parciales de cada serie correspondientes a una misma distancia.

Sean  $d_i^c$  los resultados de aplicar la fórmula [2.10] a las distancias

$$d_i' = \bar{d}_i + \Delta_1 \bar{d}_i + \Delta_2 \bar{d}_i \quad [2.14]$$

obtenidas por aplicación de la fórmula [2.11] a las medias parciales  $\bar{d}_i$ , donde  $\Delta_1 \bar{d}_i$  y  $\Delta_2 \bar{d}_i$  son las correspondientes correcciones por efectos atmosféricos dadas por [2.7] y [2.9], es decir

$$d_i^c = (d_i'^2 - \Delta H_i^2 \text{sen } z_i)^{1/2} - \Delta H_i \text{cos } z_i$$

Entonces la media total  $\bar{d}$  es

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^k d_i^c}{k} \quad [2.15]$$

El error medio cuadrático del conjunto de las series vale

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (\bar{d} - d_i^c)^2}{k-1}} \quad [2.16]$$

y el error medio cuadrático de  $\bar{d}$  es

$$s_{\bar{d}} = \frac{s}{\sqrt{k}} \quad [2.17]$$

En estas condiciones aplicaremos los siguientes test de hipótesis

### 2.3.1. Test sobre la varianza

a) Aplicado a series individuales con media desconocida contrasta la precisión interna del instrumento en cada serie, que se fija en una desviación típica de  $\sigma_0 = 1$  mm. Se aplica un test de una cola para la hipótesis nula,  $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ , e hipótesis alternativa  $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ .

Se define el estadístico

$$y = \frac{(n_i - 1) s_i^2}{\sigma_0^2} \quad [2.18]$$

donde  $s_i^2$  es la varianza muestral [2.13] y  $n_i$  el número de elementos de la serie.

Se rechaza  $H_0$  y se admite  $H_1$  si

$$y > \chi_{n_i - 1, \alpha}^2 \quad [2.19]$$



donde  $\chi^2_{n_i-1, \alpha}$  es el valor de la distribución Chi-Cuadrado con  $n_i - 1$  grados de libertad a un nivel de significación  $\alpha$ . Por ejemplo con  $n_i = 20$  y  $\alpha = 0.05$  resulta

$$\chi^2_{n_i-1, \alpha} = \chi^2_{19, 0.05} = 30.144$$

b) Aplicado al conjunto de las series contrasta la precisión de la determinación, que se fija en  $\sigma_0 = 6$  mm. Se aplican tests de una cola con las mismas hipótesis anteriores.

Con media desconocida (se toma la media muestral), se calcula el estadístico y dado por [2.18] con  $s$  dado por [2.16] en vez del  $s_i$  dado por [2.13]. Se rechaza  $H_0$  si

$$y > \chi^2_{k-1, \alpha}$$

donde ahora  $\chi^2_{k-1, \alpha}$  es el valor de la Chi-Cuadrado con  $k - 1$  grados de libertad, siendo  $k$  el número de series.

### 2.3.2. Test para detección de errores groseros

Si la hipótesis sobre la varianza es rechazada por el test anterior se procede a la búsqueda y eliminación de valores aberrantes en cada serie de observaciones, para lo que se utiliza el test Tau. Para la aplicación de este test se supone que la media y la varianza de la población son desconocidas por lo que se trabaja con los valores muestrales  $\bar{d}_i$  y  $s_i$  respectivamente. Entonces, la hipótesis nula  $H_0$  establece que una medida particular  $d_{ij}$  sigue una distribución normal  $N(\bar{d}_i, s_i^2)$  y la hipótesis nula  $H_0$  indica que  $d_{ij}$  adolece de un error grosero.

Se define el estadístico

$$y = \frac{d_{ij} - \bar{d}_i}{\sqrt{\frac{n_i - 1}{n_i} s_i^2}}$$

con  $d_i$  y  $s_i$  dados por [2.12] y [2.13]. Fijado un nivel de significación  $\alpha$ , se rechaza la hipótesis nula ( $d_{ij}$  es una observación aberrante) si

$$|y| \geq \tau_{n-1, \alpha/2}$$

### 2.3.3. Test de igualdad de medias

Este test se aplica para ver si las diversas series de observaciones son compatibles dos a dos. Dadas dos series de  $n_1$  y  $n_2$  elementos y medias muestrales  $\bar{d}_1$  y  $\bar{d}_2$ , respectivamente, se aplica el test de dos colas con la hipótesis nula  $H_0: \bar{d}_1 = \bar{d}_2$  e hipótesis alternativa  $H_1: \bar{d}_1 \neq \bar{d}_2$ . Se define el estadístico

$$y = \frac{\bar{d}_1 - \bar{d}_2}{\sigma} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$$

con  $\bar{d}_1$  y  $\bar{d}_2$  dadas por [2.12] para series distintas, suponiendo ambas series con igual desviación típica  $\sigma$ .

Se rechaza la hipótesis nula  $H_0$  si

$$|y| > t_{n_1+n_2-2, \alpha/2}$$

donde  $t_{n_1+n_2-2, \alpha/2}$  es el valor de la  $t$  de Student con  $n_1 + n_2 - 2$  grados de libertad para un nivel de significación  $\alpha/2$ . Por ejemplo, con  $n_1 = n_2 = 20$ ,  $\alpha = 0.05$  resulta

$$t_{n_1+n_2-2, \alpha/2} = t_{38, 0.025} = 2.025$$

Si se aplica este test a las series tomando sus varianzas individuales (distintas), en general se rechaza la hipótesis nula, esto indica que las diferencias de medias obtenidas en las diferencias punterías son mayores que la precisión interna del instrumento. De esto concluimos que es muy importante realizar cuidadosamente la instalación y orientación de los prismas así como las punterías del distanciómetro y que, además, estas han de hacerse en un número suficiente (más de 4).

Entonces conviene aplicar el test de igualdad de medias suponiendo que todas las series tienen una misma desviación típica de 6 mm (la precisión en la determinación), la misma que se exige al conjunto de las series en el test sobre la varianza.

### 2.3.4. Test de igualdad de varianzas

Este test indica si las series tienen una precisión del mismo orden tomadas dos a dos. Es un test de dos colas con hipótesis nula  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ , e hipótesis alternativa  $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ . Se define el estadístico

$$y = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

con  $s_1^2, s_2^2$  dados por [2.13] para series distintas. Tomando  $s_1 > s_2$  para que resulte  $y > 1$ , entonces se rechaza la hipótesis nula a un nivel de significación  $\alpha$ , si

$$y > F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2}$$

donde  $F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2}$  es la  $F$  de Snedecor con  $n_1-1$ , y  $n_2-1$  grados de libertad, aquí se ha tenido en cuenta la propiedad  $F_{\alpha/2} = 1/F_{1-\alpha/2}$ .

Por ejemplo para  $n_1 = n_2 = 20$ , las tablas dan

$$F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2} = F_{19, 19, 0.025} = 2.706$$

Es lógico que en algunos casos se rechace este test de igualdad de varianzas si las series son de pocas observaciones, entonces aunque las varianzas sean aceptables unas series aparecen mucho mejores que otras. Como en general no hay razón física que garantice esta desigualdad, una vez comprobado que ésto es así, se tomarán todas las series de igual peso para el cálculo de la media global [2.15], lo que nos parece más prudente que tomar media ponderada, aunque entre ambos tipos de medias no resulten diferencias significativas.

### 2.3.5. Test de Bartlett

Este test se aplica al conjunto de todas las series para contrastar la igualdad de todas las varianzas. Se toma la hipótesis nula  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$ , y se define el estadístico

$$y = \frac{n_0 \log s_0^2 - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \log s_i^2}{1 + \frac{\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n}}{3(k-1)}}$$

donde

$$n_0 = \sum_{i=1}^k (n_i - 1)$$

$$n = \sum_{i=1}^k n_i$$

$$s_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) s_i^2}{n_0}$$

y  $s_i^2$  viene dado por [2.13].

Entonces con un nivel de significación  $\alpha$ , se rechaza  $H_0$  si

$$y > \chi_{k-1, \alpha}^2$$

Para que este test funcione bien el número de grados de libertad ha de ser mayor que 3.

### 3. MEDIDAS DE DISTANCIAS CENITALES

Para cada visual en que se efectúen medidas de distancias cenitales tendremos un conjunto de datos de lecturas del círculo vertical en ambas posiciones del teodolito (CD, círculo derecha, CI, círculo izquierda), generalmente agrupadas. Cada una de estas observaciones se corregirá de los siguientes efectos.

#### 3.1. Corrección por refracción

Sea  $z^0$  el valor de la distancia cenital instrumental, entonces la distancia cenital corregida por refracción vendrá dada por

$$z' = z^0 + \Delta z \quad [3.1]$$

siendo

$$\Delta z = K \operatorname{sen} z^0 \quad [3.2]$$

donde  $K$  es el coeficiente de refracción de la trayectoria dado por [2.8]. (En el cálculo de  $K$  puede tomarse  $\frac{R}{n} = R$  si las distancias son pequeñas).

### 3.2. Corrección por diferencia de altura de teodolito y la mira

Sean  $H_T$  y  $H_M$  las alturas del teodolito y la mira, respectivamente, sobre las señales que materializan los puntos, y  $z'$  la distancia cenital de la visual corregida de refracción. Si  $d'$  es la distancia observada (corregida por factores meteorológicos), entonces la distancia cenital corregida por diferencia de altura (ver figura 1) vendrá dada por

$$z = z' - \beta \quad [3.3]$$

donde  $\beta$  es tal que

$$\text{sen } \beta = \frac{H_M - H_T}{d'} \text{ sen } z' \quad [3.4]$$

En definitiva, la distancia cenital corregida será

$$z = z^0 + \Delta z - \beta \quad [3.5]$$

donde las correcciones por refracción,  $\Delta z$ , y diferencia de altitud del teodolito y la mira,  $\beta$ , vienen dadas respectivamente por [3.2] y [3.4].

### 3.3. Análisis estadístico de distancias cenitales

Una vez corregidas, utilizando [3.5], cada una de las medidas de distancias cenitales, calcularemos los valores medios de las  $n_c$  lecturas consecutivas efectuadas con círculo derecha y círculo izquierda.

$$z_i^D = \frac{\sum_{m=1}^n z_m^D}{n_c}$$

$$z_i^I = \frac{\sum_{m=1}^n z_m^I}{n_c}$$

calculando la corrección de eclímetro, obtenemos para cada pareja

$$z_i = z_i' + \frac{360^\circ - (z_i^D + z_i')}{2}$$

A partir de estos valores se calcula el valor medio de las  $n_R$  determinaciones  $z_i$  por

$$z = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n_R} \quad [3.6]$$

y su error medio cuadrático por

$$e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - z)^2}{n_R - 1}} \quad [3.7]$$

### 3.3.1. Test sobre la varianza para distancias cenitales

Para contrastar la precisión del valor de la distancia cenital media obtenido en [3.6] con la precisión del teodolito utilizado en la medida, cuya desviación típica fijamos en  $\sigma_0 = 1.75$ , aplicamos el siguiente test sobre la varianza análogo al utilizado en (2.3.1.). Hipótesis nula  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ , hipótesis alternativa  $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ .

Se define el estadístico

$$y = \frac{(n_R - 1) e^2}{\sigma_0^2}$$

donde  $e^2$  es la varianza muestral [3.7] y  $n_R$  el número de determinaciones efectuadas.

Se rechaza  $H_0$  y se admite  $H_1$  si

$$y > \chi_{n_R - 1, \alpha}^2 \quad [2.19]$$

donde  $\chi_{n_R - 1, \alpha}^2$  es el valor de la distribución Chi-Cuadrado con  $n_R - 1$  grados de libertad a un nivel de significación  $\alpha$ .

### 3.4. Cálculo de diferencias de altitudes

Los datos de observación de distancias,  $d$ , y cenitales,  $z$ , nos permiten calcular la diferencia de altitudes  $\Delta h$ , entre dos vértices estación. Para ello utilizamos la expresión (Bomford, 1980).

$$\Delta h = d \cos (z - \theta/2) \sec \theta/2 \quad [3.8]$$

con la aproximación esférica

$$\theta = L/R$$

donde  $L$ , distancia sobre la esfera, viene dada por (Heiskanen y Moritz, 1985)

$$L = 2R \arcsin \left( \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{d^2 - \Delta h^2}{\left(1 + \frac{h_1}{R}\right) \left(1 + \frac{h_2}{R}\right)}} \right)$$

La ley de propagación de la varianza nos permite estimar la precisión de la diferencia de altitudes calculada en [3.8] en función de las precisiones de las medidas de distancias y cenitales que intervienen. Aplicando dicha ley a [3.8] se obtiene

$$\sigma_{\Delta h}^2 = [\cos (z - \theta/2) \sec \theta/2]^2 \sigma_d^2 + [d \sin (z - \theta/2) \sec \theta/2]^2 \sigma_z^2 \quad [3.9]$$

donde  $\sigma_d^2$  y  $\sigma_z^2$  son las varianzas de la distancia y de la cenital respectivamente.

## 4. MEDIDAS DE ANGULOS HORIZONTALES

### 4.1. Valores observados

En cada punto estación donde se haya efectuado una vuelta de horizonte, dispondremos para cada dirección observada  $i$ , de lecturas efectuadas en ambas posiciones del instrumento (CD, círculo derecha y CI, círculo izquierda), generalmente agrupadas en dobles lecturas.

A partir de las  $n_c$  lecturas consecutivas, con círculo derecha,  $l_m^D$ , y círculo izquierda  $l_m^I$ , realizadas a un mismo vértice  $i$ , calculamos los valores medios.

$$l^D = \frac{\sum_{m=1}^n l_m^D}{n_c}$$

$$l^I = \frac{\sum_{m=1}^n l_m^I}{n_c}$$

y a partir de ellos, el valor de la lectura para la dirección  $i$  por

$$l_i = \frac{l^D + (l^I - 200^\circ)}{2}$$

De esta forma el valor del ángulo formado por las direcciones  $i, j$  se calcula por

$$\bar{\alpha}_{ij} = l_j - l_i$$

obteniéndose finalmente el valor medio de las  $n_R$  determinaciones efectuadas por

$$\alpha_{ij}^0 = \frac{\sum_{m=1}^n \bar{\alpha}_{ij}^m}{n_R} \quad [4.1]$$

y su error medio cuadrático

$$e = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^n (\bar{\alpha}_{ij}^m - \alpha_{ij}^0)^2}{n_R - 1}} \quad [4.2]$$

sin embargo, si las medidas se efectúan, por ejemplo, con un teodolito de segundos, se tomará como valor mínimo del error  $e = \sqrt{2''}$ , que corresponde a una precisión de 1'' para cada dirección medida, sustituyéndose de esta forma el valor resultante por [4.2].



#### 4.2. Compensación de estación

Para asignar valores únicos a las orientaciones de las direcciones y a los ángulos por ellas formados, y como generalmente dispondremos de observaciones superabundantes, deberá realizarse una compensación de estación que nos proporcione los valores más probables de las direcciones y de los ángulos y sus correspondientes medidas de la precisión.

De las diversas formas de efectuar la compensación de estación, en nuestro caso, para poder proceder posteriormente al cálculo y compensación de una triangulación general incluyendo como incógnitas las correcciones a las constantes de orientación de los vértices, utilizaremos la compensación de estación con el modelo de ecuaciones de observación (tantas como ángulos observados), tomando como incógnitas las orientaciones de los puntos visados, en vez de los ángulos formados en cada vértice.

Consideremos un vértice estación con  $n$  direcciones visadas, y sea  $m$  el número de ángulos observados ( $m \geq n$ ). Si asignamos un valor provisional  $l_i^c$  a una dirección arbitraria, por ejemplo la 1, podemos obtener valores provisionales  $l_i^c$ ,  $i = 1, \dots, n$ , de las diversas direcciones, y a partir de éstos calcular unos valores provisionales de los ángulos.

$$\alpha_{ij}^c = l_j^c - l_i^c$$

De esta forma podemos plantear para cada ángulo observado una ecuación de observación en la forma ordinaria

$$\alpha_{ij}^c + \delta\alpha_{ij} - \alpha_{ij}^0 = v_k \quad , \quad k = 1, \dots, m \quad [4.3]$$

siendo  $v_k$  el error residual de la observación  $k$  y  $\alpha_{ij}^0$  el valor del ángulo observado, dado por [4.1].

Si llamamos  $\delta l_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , a las correcciones a las direcciones provisionales, entonces

$$\delta\alpha_{ij} = \delta l_j - \delta l_i$$

y las ecuaciones [4.3], tomando como incógnitas las correcciones  $\delta l_i$ , resultan

$$l_j + \delta l_j - (l_i + \delta l_i) - \alpha_{ij}^0 = v_k \quad [4.4]$$

Llamando

$$t_k = \alpha_{ij}^0 - l_j^k + l_i^k \quad [4.5]$$

las ecuaciones de observación [4.4] se escriben en la forma

$$\delta l_j - \delta l_i - t_k = v_k \quad [4.6]$$

y en notación matricial

$$A\underline{x} - \underline{t} = \underline{v}, \quad [4.7]$$

donde

$\underline{x} = (\delta l_1, \dots, \delta l_n)^T$  es el vector de parámetros incógnita de dimensión  $(nx1)$ ,

$\underline{t} = (t_1, \dots, t_m)^T$  es el vector de constantes de observación de dimensión  $(mx1)$ ,

$\underline{v} = (v_1, \dots, v_m)^T$  es el vector de errores residuales de dimensión  $(mx1)$ , y

$A = (a_{ks})$  es la matriz de coeficientes de las ecuaciones de observación, o matriz de diseño, de dimensión  $(mxn)$ , siendo

$$a_{ks} = 0, \text{ para } s = 1, \dots, n, s \neq i, s \neq j,$$

$$a_{ki} = -1,$$

$$a_{kj} = 1.$$

Determinaremos los parámetros  $\underline{x}$  bajo la condición de mínimos cuadrados en el espacio de observaciones, es decir (si designamos con el símbolo “^” las cantidades estimadas)

$$\hat{\underline{v}}^T P \hat{\underline{v}} = \text{mínimo}$$

esto requiere el conocimiento de la matriz de pesos  $P$ , que obtendremos a partir del error  $e$  calculando en [4.2] con las medidas realizadas en la observación de cada ángulo en las diversas series.

En nuestro caso, la matriz de diseño  $A$  de las ecuaciones de observación [4.7] verifica:

$$\sum_{s=1}^n a_{ks} = 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

lo que indica que sus columnas son linealmente dependientes y al tener cada fila solo dos elementos distintos de cero, resulta

$$\text{rango}(A) = n - 1 < n \leq m,$$

es decir, tenemos una deficiencia de rango de orden 1, que proviene de la indeterminación en la orientación de la vuelta de horizonte.

Para ampliar el rango del sistema y obtener solución única utilizaremos un conjunto de constreñimientos que consiste en añadir a nuestro sistema un conjunto de relaciones del tipo

$$D \underline{x} = 0, \quad [4.8]$$

siendo  $D$  la matriz de constreñimientos de dimensión  $(s \times m)$  con  $s$  igual a la deficiencia de rango, en nuestro caso  $s = 1$ . Si elegimos  $D$  de forma que verifique la relación

$$A D^T = 0, \quad [4.9]$$

esto es, un constreñimiento interno, obtendremos una solución mínimos cuadrados, norma mínima y mínimo sesgo (Blaha, 1971).

Como solo se tiene indeterminación de orientación, la ecuación de constreñimiento que conduce a la solución buscada es

$$\sum_{i=1}^m \delta l_i = 0, \quad [4.10]$$

que en forma matricial se escribe

$$(1, 1, \dots, 1) \underline{x} = 0 \quad [4.11]$$

por tanto la matriz de constreñimiento queda reducida al vector de unos,

$$D = (1, 1, \dots, 1) \quad [4.12]$$

En definitiva el modelo matemático que debemos resolver es [4.7] con [4.8]

$$\begin{aligned} A\underline{x} - \underline{t} &= \underline{v}, \\ D\underline{x} &= \underline{0}, \end{aligned} \quad [4.13]$$

La forma del vector  $D$  hace que un método muy adecuado para resolver el problema sea el de eliminación de los constreñimientos. Con este fin, descomponemos el vector  $\underline{x}$  en dos partes

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix},$$

donde en  $\underline{x}_2$  están las  $n-1$  incógnitas independientes y en  $x_1$  la incógnita restante, que puede ser cualquiera. Descomponiendo consecuentemente las matrices  $A$  y  $D$  escribimos

$$\begin{aligned} A_1 x_1 + A_2 \underline{x}_2 - \underline{t} &= \underline{v}, \\ D_1 x_1 + D_2 \underline{x}_2 &= \underline{0}, \end{aligned}$$

donde

$$D_1 = 1, \quad [4.15]$$

$$D_2 = (1, \dots, 1)$$

El método de eliminación de los constreñimientos (Sevilla, M. J. 1987) conduce a las soluciones siguientes

$$\hat{\underline{x}}_2 = (\bar{A}^T P \bar{A})^{-1} \bar{A}^T P \bar{\underline{t}}, \quad [4.16]$$

$$\hat{x}_1 = -D_1^{-1} D_2 \hat{\underline{x}}_2,$$

donde

$$\bar{A} = A_2 - A_1 D_1^{-1} D_2 = A_2 - A_1 D_2, \quad [4.17]$$

$$\bar{\underline{t}} = \underline{t}$$

Entonces teniendo en cuenta [4.15], [4.16] y [4.17] resulta

$$\hat{\underline{x}}_2 = [(A_2^T - D_2^T A_1^T) P (A_2 - A_1 D_2)]^{-1} (A_2^T - D_2^T A_1^T) P \underline{t}, \quad [4.18]$$

$$\hat{\underline{x}}_1 = -D_2 \hat{\underline{x}}_2 \quad [4.19]$$

La relación [4.9] permite escribir

$$A_1 D_1^T + A_2 D_2^T = 0,$$

es decir

$$A_1 = -A_2 D_2^T, \quad [4.20]$$

de manera que

$$A_1 D_2 = -A_2 D_2^T D_2$$

que sustituido en [4.18] permite obtener  $\hat{\underline{x}}_2$  sólo en función de  $A_2$ , esto es

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}_2 = [A_2^T P A_2 + A_2^T P A_2 D_2^T D_2 + D_2^T D_2 A_2^T P A_2 + D_2^T D_2 A_2^T P A_2 D_2^T D_2] \\ (A_2^T + D_2^T D_2 A_2^T) P \underline{t} \end{aligned} \quad [4.21]$$

Los errores residuales vienen dados por

$$\hat{\underline{v}} = \bar{A} (\bar{A}^T P \bar{A})^{-1} \bar{A}^T P \bar{\underline{t}} - \bar{\underline{t}},$$

que en nuestro caso se reduce a

$$\hat{\underline{v}} = (A_2 + A_2 D_2^T D_2) \hat{\underline{x}}_2 - \underline{t} \quad [4.22]$$

La forma cuadrática  $\hat{\underline{v}}^T P \hat{\underline{v}}$  viene dada por

$$\hat{\underline{v}}^T P \hat{\underline{v}} = \underline{\underline{l}}^T [P - P\bar{A}(\bar{A}^T P\bar{A})^{-1} \bar{A}^T P] \underline{\underline{l}},$$

que se reduce a

$$\hat{\underline{v}}^T P \hat{\underline{v}} = \underline{\underline{l}}^T P \underline{\underline{l}} - \underline{\underline{l}}^T P (A_2 + A_2 D_2^T D_2) \hat{\underline{x}}_2. \quad [4.23]$$

Entonces la varianza a posteriori de la unidad de peso es

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\underline{v}}^T P \hat{\underline{v}}}{m - n + 1} \quad [4.24]$$

Las matrices cofactor a posteriori para los parámetros y residuales son respectivamente

$$Q_{\hat{\underline{x}}\hat{\underline{x}}} = \begin{pmatrix} Q_{\hat{x}_1\hat{x}_1} & Q_{\hat{x}_1\hat{x}_2} \\ Q_{\hat{x}_2\hat{x}_1} & Q_{\hat{x}_2\hat{x}_2} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} D_2^{-1} D_2 (\bar{A}^T P \bar{A})^{-1} D_2^T (D_1^{-1})^T & -D_1^{-1} D_2 (\bar{A}^T P \bar{A})^{-1} \\ -(\bar{A}^T P \bar{A})^{-1} D_2^T (D_1^{-1})^T & (\bar{A}^T P \bar{A})^{-1} \end{pmatrix}$$

y

$$Q_{\hat{\underline{v}}\hat{\underline{v}}} = P^{-1} - \bar{A} Q_{\hat{\underline{x}}\hat{\underline{x}}} \bar{A}^T.$$

En nuestro caso estas matrices son

$$Q_{\hat{x}_1\hat{x}_1} = D_2 Q_{\hat{x}_2\hat{x}_2} D_2^T, \quad [4.25]$$

$$Q_{\hat{x}_2\hat{x}_2} = -D_2 Q_{\hat{x}_1\hat{x}_1} = Q_{\hat{x}_1\hat{x}_1}^T, \quad [4.26]$$

$$Q_{\hat{x},\hat{x}} = [A_2^T P A_2 + A_2^T P A_2 D_2^T D_2 + D_2^T D_2 A_2^T P A_2 + D_2^T D_2 A_2^T P A_2 D_2^T D_2]^{-1}, \quad [4.27]$$

$$Q_{\hat{x}\hat{v}} = P^{-1} - (A_2 + A_2 D_2^T D_2) Q_{\hat{x},\hat{x}} (A_2^T + D_2^T D_2 A_2) \quad [4.28]$$

Las matrices de varianza-covarianza correspondientes son

$$\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{\hat{x},\hat{x}} \quad [4.29]$$

$$\Sigma_{\hat{v}\hat{v}} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{\hat{v}\hat{v}} \quad [4.30]$$

### 4.3. Análisis estadístico de ángulos horizontales

Una vez efectuada la compensación de estación, procedemos a aplicar el siguiente test estadístico para la detección de errores groseros que nos garantice la fiabilidad de los resultados obtenidos en el ajuste.

#### 4.3.1. Test de Pope de detección de errores groseros

Este test para la aceptación o rechazo de observaciones se plantea en los siguientes términos. La hipótesis nula  $H_0$  establece que cada residual  $\hat{v}$  se distribuye según la ley normal  $N(0, \sigma_{\hat{v}_i})$  donde  $\sigma_{\hat{v}_i}^2$  es la varianza de  $\hat{v}_i$  dada en la matriz  $\Sigma_{\hat{v}\hat{v}}$  de [4.30]. La hipótesis alternativa indica que existe un error grosero que debe eliminarse.

Si definimos el estadístico

$$y = \frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}}$$

se rechaza la hipótesis  $H_0$  si

$$|y| \geq \tau_{m-r, \alpha/2}$$

donde  $\tau$  es la distribución tau,  $m$  el número de ecuaciones y  $r$  el número de incógnitas independientes. Si  $H_0$  se rechaza el residual  $\hat{v}_i$  se considera grosero en cuyo caso habrá que revisar la observación de la que procede, y si no se encuentra la causa eliminarla del ajuste.

#### 4.3.2. Test sobre la varianza de la unidad de peso a priori

Previamente a la aplicación del Test Pope aplicaremos el siguiente test de la varianza de peso unidad. La hipótesis nula es  $H_0: \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$  y la hipótesis alternativa  $H_0: \hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$ . Definiremos el estadístico

$$y = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} (m-r) = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{\sigma_0^2}$$

y fijado un nivel de significación  $\alpha = 0.05$  se rechaza la hipótesis nula si

$$y > \chi_{m-r, \alpha}^2$$

donde  $\chi_{m-r, \alpha}^2$  es el valor del Chi-cuadrado con  $m-r$  grados de libertad, en nuestro caso  $m-n+1$ .

*Nota:* El test de varianza de peso unidad también puede plantearse en términos de la distribución  $F$  de Snedecor. En este caso se define el estadístico

$$y = \max \left( \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}, \frac{\sigma_0^2}{\hat{\sigma}_0^2} \right)$$

y fijado un nivel de significación  $\alpha = 0.05$  se rechaza la hipótesis nula si

$$y > F_{m-r, \infty, \alpha}$$

donde  $F_{m-r, \infty, \alpha}$  es el valor de la  $F$  de Snedecor con  $m-r$  e  $\infty$  grados de libertad. Este test es equivalente al anterior cuando  $\hat{\sigma}_0^2$  y  $\sigma_0^2$  son cantidades estadísticamente independientes.

## 5. PROGRAMACION DEL METODO

El tratamiento de datos según la metodología expuesta en el presente trabajo se efectúa por medio de dos programas en FORTRAN 77. El primero



AEDIST realiza el análisis estadístico de distancias y distancias cenitales y el segundo AEANGH realiza el análisis estadístico y compensación de estación de ángulos horizontales. Estos programas y ejemplos numéricos pueden solicitarse a los autores.

## REFERENCIAS

- Bomford, G. (1980): «Geodesy». Ed. Clarendon Press. Oxford.
- Burnside, C. D. (1982): «Electromagnetic Distance Measurement». Ed. Granada. London.
- Blaha, G. (1971): «Inner Adjustment constraints with emphasis on range observations». Rep. 148. Dep. of Geodetic Science. Ohio State Univ. Columbus.
- Heiskanen, W. A. y H. Moritz (1985): «Geodesia Física». IGN-AG. Madrid.
- Levallois, J. J. (1970): «Géodesie Générale». Ed. Eyrolles. Paris.
- Pope, A. J. (1976): «The Statistics of Residuals and the Rejection of Outliers». NOAA-TR-NOS 65-NGSI.
- Sevilla, M. J. (1987): «Redes Geodésicas». Curso de Doctorado. Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad Complutense. Madrid.