

Las funciones empíricas ortogonales y los cambios en el perfil de playa a corto, medio y largo plazo

J. J. MUÑOZ PÉREZ, L. TEJEDOR

Departamento de Física Aplicada. Facultad de Ciencias del Mar,
11510 Puerto Real (Cádiz)

R. MEDINA

Grupo de Ingeniería Oceanográfica y de Costas, Escuela de Ingenieros de Caminos,
Avda. Los Castros, s/n, Santander

RESUMEN

Se presentan las características del método de las Funciones Empíricas Ortogonales (Empirical Orthogonal Functions, EOF) y sus ventajas a la hora de estudiar series temporales de batimetrías, especificándose una metodología apropiada para garantizar la bondad de los datos recogidos. La aplicación de las EOF a un conjunto de batimetrías y topografías efectuadas durante 5 años en el seguimiento de la playa Victoria (Cádiz), permite identificar y distinguir las diferentes tendencias del perfil de la playa a corto, medio y largo plazo.

ABSTRACT

Characteristics of Empiric Orthogonal Functions Method (EOF) are hereby presented as well as certain advantages obtained upon studying bathymetrical time series. An appropriate methodology is specified in order to guarantee the validity of collected data. EOF applied to a given set of bathymetries, carried out throughout a 5 year period when monitoring the Victoria Beach (Cadiz), allows for the identification and distinction among different beach profile tendencies being in short, medium and long term.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos 50 años, la importancia del sector turístico ha ido aumentando de manera continuada en nuestro país hasta el punto de convertirse en el tercero en importancia mundial, tras los EE.UU. y Francia. La mayor

parte de estos turistas derivan hacia nuestras costas, atraídos por el sol de nuestras playas (Suárez Bores, 1999). Sin embargo, algunos estudios revelan que parte de nuestro litoral se encuentra en erosión. Por ejemplo, se han observado retrocesos de la línea de costa de hasta un metro por año en algunos tramos del litoral gaditano (Muñoz Pérez y Enríquez, 1998). Y, por consiguiente, surge la necesidad social de averiguar el comportamiento de nuestras playas para poder solucionar los problemas que las afectan. Por otra parte, el único modo de conocer las necesidades de arena de nuestras playas consiste en efectuar levantamientos batimétricos periódicos y proceder a su comparación.

Sin embargo, mediante procedimientos estadísticos adecuados como el de las funciones empíricas ortogonales, se le puede sacar a esta serie de datos mucho más partido que el de averiguar distintas tasas de erosión. Esta técnica ha sido ampliamente utilizada en la geomorfología de costas desde que Winant *et al.* (1975) y Aubrey (1978) caracterizaron cambios en los perfiles de playa. Entre otros, Dick y Dalrymple (1984) estudian los perfiles de playa y su variación longitudinal, Losada *et al.* (1991) aplican el método al estudio de la variación longitudinal de curvas de nivel determinadas, mientras que Medina *et al.* (1991 y 1994) al de transporte de arena en sentido transversal e, incluso, a la distribución del tamaño de grano del sedimento a lo largo del perfil transversal. Por otra parte, Pruszek (1993) analiza las diferencias entre perfiles a los que ha restado no la media sino el perfil de Dean, Larson *et al.* (1999) investigan la respuesta en el tiempo de las realimentaciones de arena, y Muñoz Pérez *et al.* (1999, 2000 y 2001) estudian, respectivamente, el comportamiento de los perfiles apoyados en laja rocosa, los cambios experimentados por un perfil frente a un ciclo mareal quincenal y la evolución en planta de las líneas de pleamar y bajamar.

Mediante el método de las funciones empíricas ortogonales (Empirical Orthogonal Functions, EOF) pueden, además, deducirse distintas tendencias en el comportamiento de la playa en función del tipo de análisis temporal: perfil medio o casi invariable, variaciones a largo plazo (varios años), estacionales (cambios invierno - verano) e incluso los cambios experimentados por un solo temporal seguido de un período de calma o bonanza.

El objetivo de este artículo es, además de indicar una metodología para la realización de las batimetrías de seguimiento, el presentar una introducción teórica de las EOF, y mostrar cómo la aplicación de dichas autofunciones a series temporales de batimetrías puede proporcionar un método para identificar las tendencias evolutivas y de comportamiento de nuestras playas a corto, medio y largo plazo.

2. METODOLOGÍA

2.1. Las funciones empíricas ortogonales

El problema clásico de las funciones ortogonales, también conocidas como autofunciones o «eigenfunctions», surge al intentar resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales sujetas a unas determinadas condiciones de contorno. La solución existe solo para determinados valores (autovalores) de un parámetro λ que satisfacen una determinada ecuación:

$$A \cdot x = \lambda \cdot x \quad [1]$$

O bien

$$a_{ij} \cdot x_j = \lambda \cdot x_i \quad [2]$$

donde A es una matriz con los coeficientes de los operadores lineales del sistema de ecuaciones diferenciales a resolver. A los distintos λ que satisfacen [1 u 2] ya hemos dicho que se les llama autovalores del sistema, y a los x , asociados a cada uno de esos λ , autovectores.

La ecuación anterior también se puede expresar como:

$$[A - \lambda I] \cdot x = 0 \quad [3]$$

donde I es la matriz identidad.

Como ya se verá más adelante, la matriz A se obtiene a partir del producto de otra matriz por su traspuesta. Se puede demostrar que eso conduce a que la matriz A sea real y simétrica, y en este caso particular los autovalores gozan de unas propiedades específicas que, sin demostrarlas, se enuncian a continuación:

- t-1. Los autovalores de una matriz real simétrica son todos reales.
- t-2. Dos autovectores asociados a dos autovalores distintos son ortogonales.
- t-3. Una matriz real simétrica de dimensiones $n \times n$ tiene n autovectores independientes.
- t-4. Si la matriz además de simétrica y real es definida positiva, entonces sus autovalores son todos positivos.

Un ejemplo del caso clásico antes expuesto puede observarse en *Noble (1969)* o *Aubrey (1978)*.

El problema de las autofunciones empíricas debe satisfacer la misma ecuación [3]. La diferencia radica en el hecho de que, para el problema clásico, es la física la que nos indica la forma de la matriz A . En el caso empírico, los coeficientes de la matriz A se extraen de los datos y lo que se intenta es explicar la variabilidad de los mismos con unas pocas funciones: los autovectores o autofunciones.

Estas autofunciones se encuentran aplicando la siguiente condición: que su contribución a la varianza de los datos (definida como valor cuadrático medio) sea máxima. Esto es, la primera autofunción conserva la mayor parte de la varianza de los datos, la segunda autofunción el mayor valor de la varianza restante y así sucesivamente. De este modo, es posible representar un elevado porcentaje de la varianza de los datos con un número muy reducido de funciones.

Para desarrollar el método partimos de que tenemos una serie de datos $h_{ij} = h(x_i, t_j)$, donde, para fijar ideas y aclarar el proceso, h_{ij} podría ser la cota del punto x_i durante la campaña batimétrica j . El factor x_i es la distancia a la cabecera desde el punto i dentro de un perfil transversal, con i variando entre 1 y n_x , y siendo n_x el número de puntos del perfil. El parámetro t_j indica que se trata de los datos tomados en la campaña j , donde dicho índice varía entre 1 y n_t , y siendo n_t el número de batimetrías efectuadas (Fig. 1).

Estableceremos la hipótesis de que existen dos series de funciones $X_l(x)$, con $l = 1, \dots, N$, y $T_m(t)$, con $m = 1, \dots, N$, que cumplen:

$$\sum_{i=1}^{n_x} X_u(x_i) \cdot X_v(x_i) = 0 \quad \text{para } u \neq v, \quad u, v = 1, \dots, N$$

$$\sum_{j=1}^{n_t} T_u(t_j) \cdot T_v(t_j) = 0 \quad \text{para } u \neq v, \quad u, v = 1, \dots, N$$

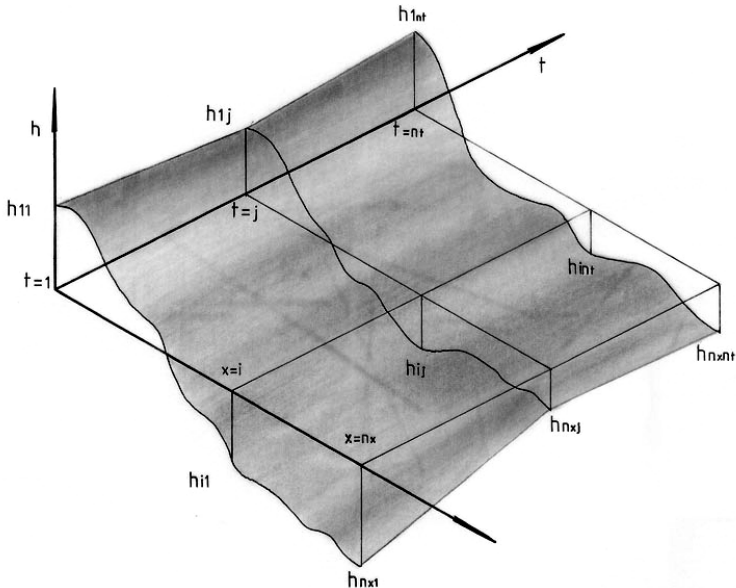


Figura 1. Esquema de las n_t series temporales de n_x datos cada una, a analizar mediante las funciones ortogonales empíricas; h_{ij} representa la profundidad del punto x_i en la batimetría t_j .

es decir, son ortogonales o, lo que es lo mismo, independientes entre sí. Para N suficientemente grande, se puede conseguir:

$$h_{ij} = h(x_i, t_j) = \sum_{l=1}^N X_l(x_i) T_l(t_j) \tag{4}$$

Como puede apreciarse, se trata de un desarrollo parecido al de Fourier, pero sin obligar, a priori, a que dichas funciones sean senos y cosenos. Será el propio método el que nos indique la forma de las mismas a partir de la variabilidad de los datos disponibles.

Si existe una estructura o tendencia en los datos (si no son completamente aleatorios), entonces tendremos una explicación mayoritaria de su variabilidad con pocas autofunciones. Y, en la práctica, nos bastará con un número N de autofunciones muy inferior al N teórico. Eso conllevaría a la aparición de un error residual, al despreciarse términos de la serie, que podremos expresar como:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= h_{ij}(\text{real}) - h_{ij}(\text{estimada}) \\ \epsilon_{ij} &= h_{ij} - \sum_{l=1}^N X_l(x_i) \cdot T_l(t_j) \end{aligned} \tag{5}$$

Vamos a suponer que $X(x)$ es la base generadora y que $T(t)$ son sus coeficientes. Para obtener el valor de dichos coeficientes minimizaremos el error cuadrático medio existente entre los datos y el ajuste.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_x} \epsilon_{ij}^2 &= \sum_{i=1}^{n_x} \left(h_{ij} - \sum_{l=1}^N X_l(x_i) \cdot T_l(t_j) \right)^2 \quad j = 1, \dots, n_t \\ \sum_{i=1}^{n_x} \epsilon_{ij}^2 &= \sum_{i=1}^{n_x} (h_{ij} - X_1 T_1 - X_2 T_2 - \dots - X_l T_l - \dots - X_N T_N)^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Diferenciando con respecto a T_l e igualando a 0:

$$2 \sum_{i=1}^{n_x} \left(h_{ij} - \sum_{m=1}^N X_m(x_i) \cdot T_m(t_j) \right) \cdot (-X_l(x_i)) = 0 \quad l = 1, \dots, N$$

Si exigimos de las autofunciones $X_l(x)$ que, además de ortogonales, sean ortonormales, entonces

$$X_l(x) X_m(x) = \delta_{lm}$$

Y por tanto:

$$\sum_{i=1}^{n_x} [h_{ij} X_l(x_i) - T_l(t_j)] = 0 \quad l = 1, \dots, N$$

Despejando:

$$T_l(t_j) = \sum_{i=1}^{n_x} h_{ij} \cdot X_l(x_i) \quad l = 1, \dots, N \quad [7]$$

De modo similar podíamos haber actuado tomando como base generadora las funciones temporales y como coeficientes las espaciales. De ese modo:

$$X_l(x_i) = \sum_{j=1}^{n_t} h_{ij} \cdot T_l(t_j) \quad l = 1, \dots, N \quad [8]$$

De donde se deduce que hallada una de las dos series de funciones podemos calcular la otra a partir del producto de aquella con la matriz de datos. Para encontrar esas primeras autofunciones vamos a definir primero, y después analizar, una variabilidad de los datos consistente en el producto cruzado de los mismos. En el caso que se hubiera restado a los datos su media, coincidiría con la covarianza. Entendiéndolo así, usaremos el símbolo σ^2 para designarla.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n_x n_t} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_t} h^2(x_i, t_j) \quad [9]$$

Sustituyendo la h real por la h estimada y utilizando la ortogonalidad de las autofunciones

$$\sigma^2 = \frac{1}{n_x n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \sum_{l=1}^N T_l^2(t_j) \quad [10]$$

Para obtener las funciones $X_l(x)$ vamos a maximizar su contribución en la varianza de los datos. Al objeto de evitar que los coeficientes sean arbitrariamente grandes, restringimos el tamaño de dichas funciones a la unidad. Además, puesto que queremos condicionar el problema de maximización, usaremos los multiplicadores de Lagrange. Para ello, debemos maximizar la expresión:

$$\sum_{j=1}^{n_t} T_l^2(t_j) - \lambda_l \left[\sum_{i=1}^{n_x} X_l^2(x_i) - 1 \right] \quad l = 1, \dots, N \quad [11]$$

Sustituyendo T_1 por su expresión [7]

$$\sum_{j=1}^{n_t} \left[\sum_{i=1}^{n_x} h_{ij} \cdot X_l(x_i) \right]^2 - \lambda_l \left[\sum_{i=1}^{n_x} X_l^2(x_i) - 1 \right] \quad l = 1, \dots, N$$

Diferenciando con respecto a X_1 e igualando a 0.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_t} \left[\sum_{i=1}^{n_x} h_{ij} X_l(x_i) \right] \left[\sum_{i=1}^{n_x} h_{ij} \right] - \lambda_l \sum_{i=1}^{n_x} X_l(x_i) &= 0 \\ \sum_{j=1}^{n_t} \left[\sum_{i=1}^{n_x} X_l(x_i) \cdot \sum_{s=1}^{n_x} h_{ij} \cdot h_{sj} \right] &= \lambda_l \sum_{i=1}^{n_x} X_l(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n_x} X_l(x_i) \sum_{j=1}^{n_t} \sum_{s=1}^{n_x} (h_{sj} \cdot h_{sj}) &= \lambda_l \sum_{j=1}^{n_x} X_l(x_j) \end{aligned} \quad [12]$$

que puede escribirse en forma matricial como

$$X_1(x) \cdot A = X_1(x) \cdot \lambda_1 \quad [13]$$

Expresión que también puede disponerse como:

$$[A - \lambda I] X_1 = 0 \quad [14]$$

donde por su similitud por [3] apreciamos que λ y X_1 son, respectivamente, los autovalores y autovectores de A .

Además, puesto que $H = \{h_{ij}\}$ es una matriz de n_x filas y n_t columnas, $H^T = \{h_{ij}\}$ tendrá n_t filas y n_x columnas y por tanto

$$A = H \cdot H^T \quad [15]$$

es una matriz cuadrada de $n_x \cdot n_x$ donde

$$\begin{aligned} a_{ij} &= h_{i1} \cdot h_{j1} + h_{i2} \cdot h_{j2} + \dots + h_{int} \cdot h_{jnt} \\ a_{ji} &= h_{j1} \cdot h_{i1} + h_{j2} \cdot h_{i2} + \dots + h_{jnt} \cdot h_{int} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $a_{ij} = a_{ji}$, A es simétrica, y sus autovalores y autovectores cumplirán los teoremas t-1, t-2, t-3 y t-4.

De igual modo se podría hacer diferenciando con respecto a las autofunciones temporales $T_1(t)$.

$$T_1(t) \cdot B = T_1(t) \lambda_1 \quad [16]$$

donde $B = H^T \cdot H$ es una matriz cuadrada simétrica de $n_t \cdot n_t$.

Si deseamos que las dos series de autofunciones X_1 y T_1 sean ortonormales aparece un factor de normalización.

$$a_1 = (n_x \cdot n_t \cdot \lambda_1)^{1/2} \quad [17]$$

de modo que:

$$h_{ij} = h(x_i, t_j) = \sum_{l=1}^N X_l(x_i) T_l(t_j) \cdot a_l \quad [18]$$

Ahora, ya podemos considerar algunas de las propiedades de estas funciones:

1. Las E.O.F., proporcionan el método más eficiente de compresión de los datos. Ningún otro conjunto de funciones ortogonales puede describir los datos de un modo más eficiente, en el sentido de explicar en los N primeros términos mayor variabilidad de los datos.
2. Dado que los conjuntos de autofunciones temporales y espaciales son ortogonales, cada asociación $\{X_l(x), T_l(t)\}$ representa un modo de variabilidad independiente de cualquier otro de los $N-1$ restantes.
3. La representación de autofunciones es el mejor método en el sentido de ajuste de los datos por mínimos cuadrados. Permite reducir el número de variables y proporciona un método de eliminar el ruido o parte menos predecible de los datos.
4. Al tratarse de un conjunto ortogonal de funciones, recuerdan en ciertos aspectos al más familiar Análisis de Fourier. Pero, mientras que este último asume una variación sinusoidal del conjunto de los datos, las EOF no asumen «a priori» forma alguna de las autofunciones. Es la propia estructura de los datos la que determina dicha forma.

Los autovalores son los que proporcionan los pesos de las autofunciones. Nos dan la cantidad de valor cuadrático medio de los datos (varianza si se ha quitado la media) asociada a cada autofunción.

Una hipótesis de gran importancia es la de suponer que los resultados de las EOF se pueden interpretar, en ocasiones, en un sentido físico. En realidad, no existe ninguna razón para asumir de antemano que las autofunciones representen un proceso físico, salvo que los datos varían de distinta manera en función de ciertas acciones físicas. Por ejemplo, en el caso de los perfiles de playa la arena se mueve en respuesta al oleaje de una manera estadísticamente predecible. Se podría esperar, por tanto, que dado que la mayor parte de la variabilidad procede del oleaje, las autofunciones quizás deberían reflejar esta fuerza actuante.

2.2. La toma de datos en los levantamientos topo-batimétricos

El problema de conocer la tasa de erosión de nuestras playas sólo puede abordarse mediante la comparación de sucesivos levantamientos batimétricos. En un principio, la profundidad a la que se encontraba el fondo se tomaba mediante un escandallo, desde un bote que debía encontrarse parado y que se posicionaba mediante bisección simultánea de dos teodolitos. La mejora de la técnica con la aparición de la ecosonda, el GPS diferencial, el distanciómetro, el compensador de oleaje, y el ordenador personal, han supuesto una mayor velocidad en la toma de datos y una reducción de personal y, por ende, el abaratamiento continuado de los costes. El precio de una batimetría ha bajado de 36.000 ptas/km hace 10 años a 12.000 ptas/km en la actualidad. Esto ha permitido disponer de innumerables datos, y ha originado la necesidad de la aplicación de métodos estadísticos para abordar su estudio.

Para la obtención de los datos de campo se han efectuado campañas cuyas series temporales cubren todo el abanico de largo, medio y corto plazo. Las características de las mismas son distintas en función de la escala temporal que intentan abarcar. Tendremos por una parte campañas batimétricas con una periodicidad semestral durante cinco años para el estudio a largo plazo, y tomas de datos topográficos en dos perfiles tipo, uno completo y otro apoyado en laja, con periodicidades quincenal y diaria para las escalas de medio y corto plazo respectivamente.

La distancia entre perfiles sería cada 100 metros y deberían tomarse desde alguna referencia fija, como por ejemplo el muro de un paseo marítimo, y en todo caso más allá de la playa seca o el cinturón dunar. Su longitud ha de alcanzar profundidades superiores a las de removilización importante de la arena en el fondo del mar. Según Hallermeier (1981) y Birkemeier (1985), esa profundidad de cierre del perfil es aproximadamente de una vez y media la altura de ola significativa sólo sobrepasada 12 horas al año. Como ejemplo orientativo, eso supondría unos 6 metros de profundidad para el litoral atlántico andaluz.

Los perfiles de la playa seca se obtienen mediante nivelación topográfica y deben realizarse durante la bajamar con objeto de que se solapen con los obtenidos mediante la sonda en pleamar. Esa duplicidad de datos en el estrán permite contrastar las lecturas del nivel del mar tomadas con una periodicidad de 10 minutos durante el levantamiento batimétrico.

Para posicionar la embarcación se utiliza el GPS diferencial, lo que induce errores inferiores a los 2 metros. En pendientes del orden del 2% en sentido transversal podría conllevar errores en la apreciación de la profundidad en el punto «real» del orden de 4 cm como mucho. No obstante, la aleatoriedad del proceso garantiza la compensación al tomar muchos datos. Hay que apuntar que la embarcación a una velocidad de 4 nudos (2 m/s) toma 2 puntos/seg, es decir, una sonda por cada metro de perfil.

Las mediciones del sondador están condicionadas por la composición del medio acuoso en que se propagan las ondas acústicas emitidas y recibidas por

el transductor del sensor, pues al variar la velocidad de la onda varían los tiempos medidos y como consecuencia la magnitud de las profundidades. Todo sondador posee un sistema de calibración más o menos sofisticado para adaptar la velocidad de propagación del eco a la salinidad, parámetro principal, del medio. Esta calibración se hace a distintas profundidades, midiendo sondas a una plancha metálica que se va calando mediante una cadena indeformable con longitudes numeradas. Se efectúa antes y después de cada jornada de trabajo y aún durante la misma si se prevén cambios en los parámetros físicos del mar. El error máximo no supera los 4 cm, pero al tratarse de un error sistemático debe corregirse y calibrarse dos veces al día como mínimo.

La equidistancia entre los perfiles transversales se fijó en 100 m, por tratarse de la máxima separación posible para la que las diferencias de ubicación resultaban poco significativas. Igualmente, la utilización de distinto software para efectuar la medición tampoco ofreció diferencias apreciables.

Una relación exhaustiva de los niveles de error cometidos durante estos trabajos, así como una descripción de las pruebas efectuadas para calibrarlos, puede consultarse en Muñoz Pérez (1995). Destacaríamos como conclusión principal de aquel estudio el que, en contra de lo planteado por Larson y Kraus (1994), en playas como la de la Victoria, donde métodos como el trineo o el CRAB (Birkemeier y Mason, 1984) no son utilizables por la existencia de fondos rocosos abruptos, una batimetría de precisión bien controlada proporciona resultados suficientemente fiables como para poder tomar decisiones de seguimiento, calibración de modelos, etc.

3. UN CASO PRÁCTICO: LA PLAYA VICTORIA

3.1. La zona de estudio

La playa Victoria, con sus 3 km de longitud, se enfrenta al océano Atlántico con una orientación NNW-SSE. Limita al Norte con el espigón de contención de la playa de Santa María del Mar y al sur con unos bajos rocosos. Su antiguo cinturón dunar ha sido ocupado por el casco urbano nuevo de la ciudad de Cádiz y por un paseo marítimo, cuyo muro nos sirve como cabecera de nuestros perfiles de control. Las mareas vivas tienen una carrera de marea de unos 4 metros. La arena es de naturaleza silícica, con un porcentaje de bioclastos no superior al 15%, y un tamaño medio de 0,25 mm. Una falla de dirección perpendicular a la orilla divide a la playa en dos zonas. La más septentrional dispone de una laja rocosa casi horizontal que coincide sensiblemente con el nivel del mar en bajamares vivas. Por el contrario, la más meridional tiene el estrato rocoso tan profundo que queda cubierto por la arena del perfil (Gutiérrez Mas *et al.*, 1991). Ello permite disponer de dos zonas con distinta condición de contorno en el fondo, pero con igual clima marítimo.

3.2. Variaciones a distintas escalas de tiempo

Entenderemos como variaciones a largo plazo los cambios de inclinación que sufre el perfil frente a los distintos oleajes denominados de invierno-verano o sea-swell. Esto nos permitirá además, una vez eliminadas esas variaciones estacionales, averiguar las tendencias de la playa con el transcurrir de los años.

La escala de tiempo de medio plazo consiste en el estudio de la evolución del perfil de modo progresivo a lo largo de todo un año. Servirá para encontrar las tasas de erosión y recuperación medias a lo largo de un ejercicio completo.

También tendremos en cuenta los cambios experimentados por el perfil a corto plazo, entendiendo como tal el día a día. Veremos cuáles son las tasas de erosión y acreción diarias tras un temporal. El poder identificar estas alteraciones puntuales y el conocer su orden de magnitud nos permitirá de una parte acotar variaciones máximas y por otro lado filtrarlas en un momento determinado.

Nuestros análisis se realizarán comparando datos teóricos y de campo entre un perfil completo y otro apoyado en laja rocosa.

3.2.1. Variaciones a largo plazo

Se dispone de 9 levantamientos de periodicidad semestral, desde diciembre de 1991 hasta diciembre de 1995. En la Figura 2 se muestra la ubicación de los perfiles elegidos para el estudio: el P-19 apoyado en laja al norte de la playa y el P-45 más meridional y completo. Una representación de todos los perfiles tomados se ofrece en la Figura 3. Si se aplican las EOF a los datos originales, la primera componente transversal resulta asimilable al perfil medio o de no variabilidad, al haber constatado que la componente temporal asociada era constante con el transcurrir del tiempo.

Para considerar la variabilidad a largo plazo nos vemos precisados a investigar las componentes segunda y siguientes. No obstante, el porcentaje de varianza explicado era muy poco significativo para éstas, por lo que se procedió a la resta de la media de los datos o, lo que es lo mismo, a la supresión del perfil medio.

En la gráfica asignada al perfil con laja (Fig. 4a) se aprecia como la primera componente transversal corresponde a un proceso de erosión-acreción generalizado a todo lo ancho del perfil con un máximo al pie del talud. La componente temporal, con alternancias de sentido semestrales, tiene una tendencia erosiva desde el principio. La segunda componente transversal representa un basculamiento con pivote en torno a la bajamar viva (+0,50), y no alrededor de la media carrera de marea (+2,00) como veremos que sucede a corto y medio plazo. Su componente temporal asociada, aunque también con alternancias semestrales, mantuvo el signo y por tanto una pendiente relativamente fuerte o de verano hasta el último invierno.

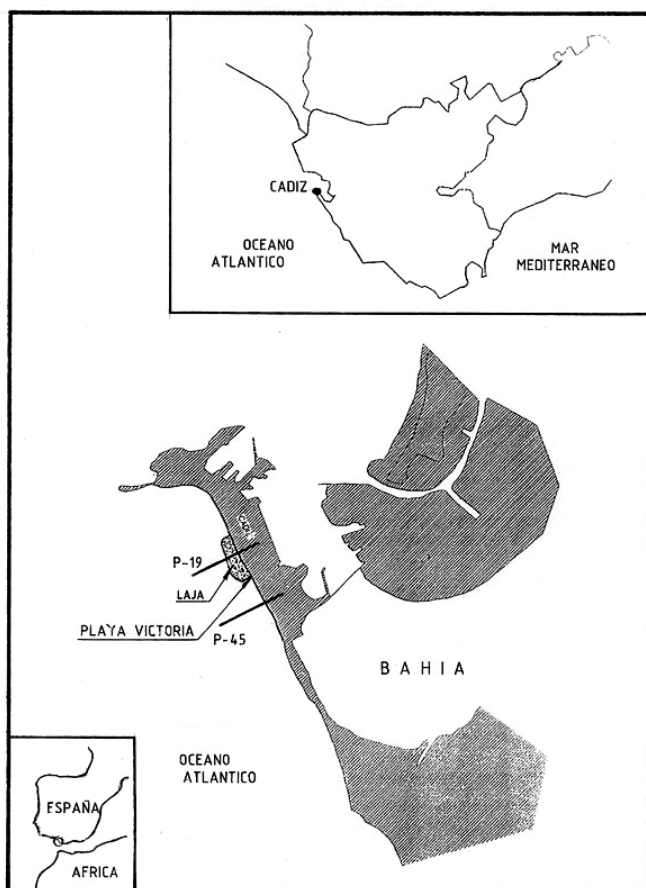


Figura 2. Situación y emplazamiento de la playa Victoria en Cádiz donde se aprecian la laja y los dos perfiles representativos de cada zona.

El orden de importancia de los dos factores antes mencionados cambia al estudiar el perfil sin laja (Fig. 4b). En este caso la primera componente viene a significar un basculamiento alrededor de la bajamar viva, con acumulación de arena (formación-desaparición de barra) a la profundidad $-2,00$. En la zona intermareal aparecen dos picos en las cotas $+1,00$ y $+3,00$ coincidiendo con las pleamares y bajamares medias y que supondrían una disminución de la pendiente en esas partes del estrán en las que durante más tiempo actúa el oleaje por corresponderse con las estoas de la marea. La componente temporal es similar a la del perfil con laja: variaciones semestrales perfil verano-invierno. Con menos importancia en cuanto a la explicación de la varianza de los datos (ver Tabla 1) tenemos aquí la erosión-acreción generalizada (segunda compo-

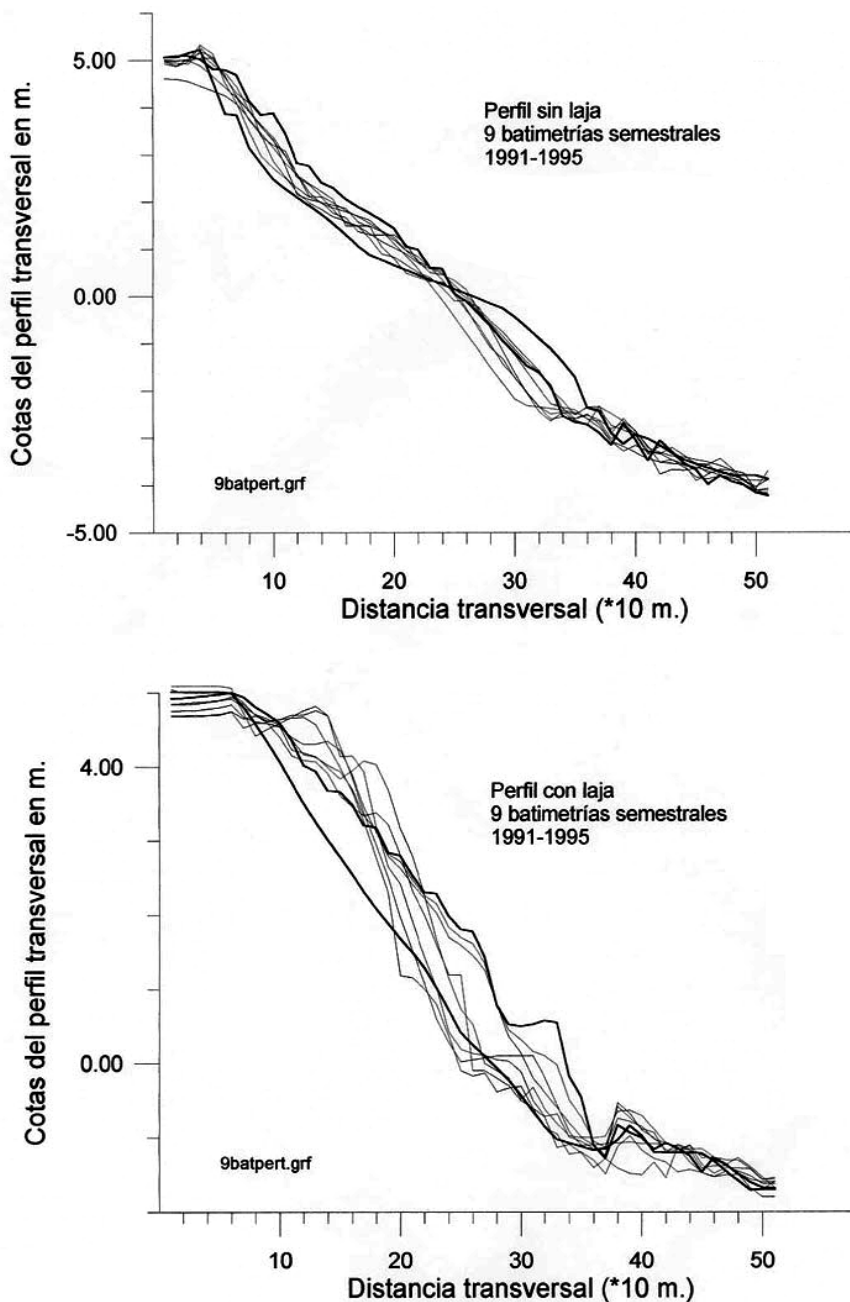


Figura 3. Representación de las 9 batimetrías semestrales tomadas a lo largo de 5 años en los perfiles tipo elegidos: uno con laja (el más septentrional) y otro no apoyado.

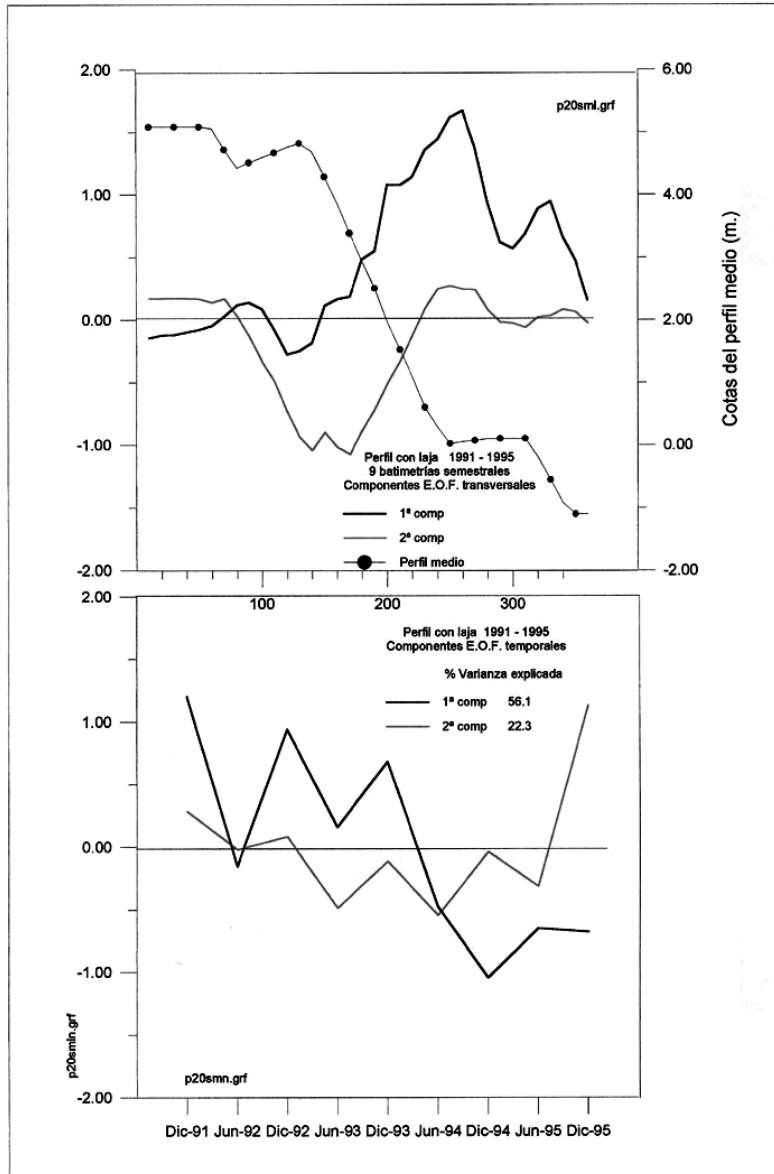


Figura 4a. Componentes transversal y temporal de las 9 batimetrías en el perfil con laja.

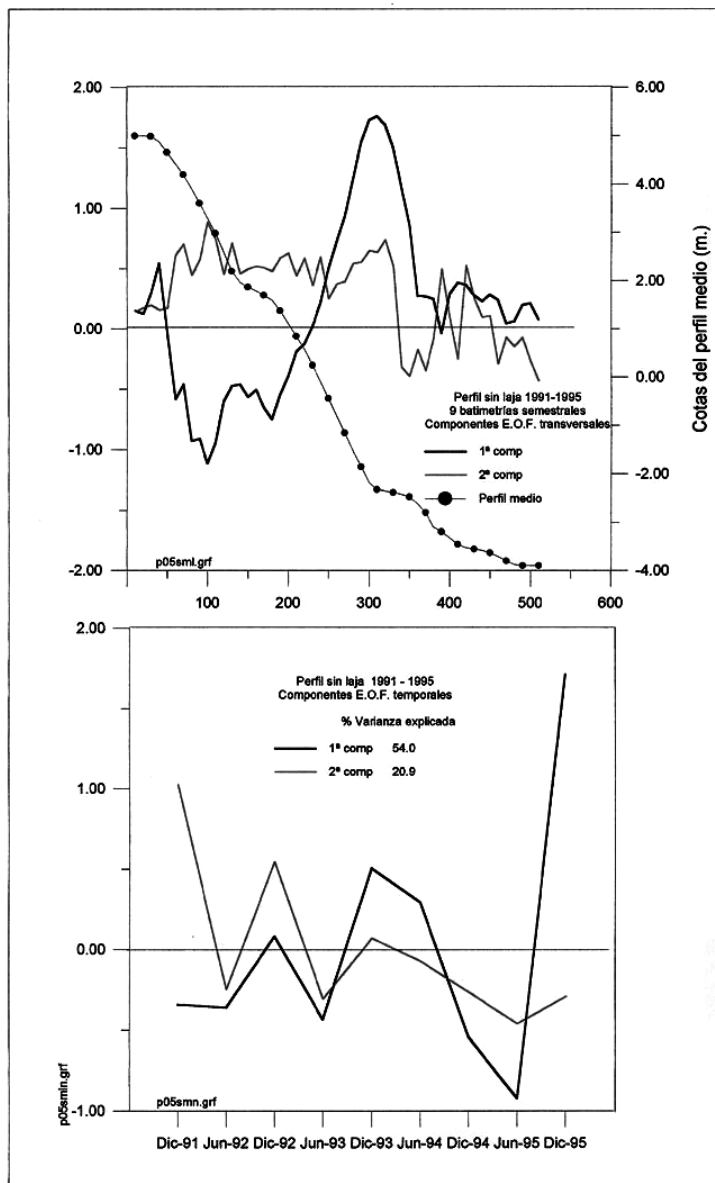


Figura 4b. Idem para el perfil sin laja.

nente) que cubre desde la playa seca hasta la cota $-2,00$ y que vendría a marcar un pie de perfil activo en lo referente a volumen de sedimento removido. Fijémosnos en como la componente transversal en el perfil sin laja es casi constante a todo lo largo del mismo, desde la berma seca hasta la isobata $-2,00$; esto equivale a considerar una traslación del perfil hacia tierra de modo paralelo a sí mismo. Por contra, en el perfil con laja se trata de un aporte-retirada de arena más concentrado en su pie.

En la Tabla 1 se representan los valores del tanto por ciento de varianza explicada por las distintas componentes EOF una vez restada la media de los datos. Se aprecia así cual es la importancia relativa de los distintos fenómenos físicos asociados a las mismas y para los dos perfiles tipo en cuestión, con y sin laja.

3.2.2. Variaciones estacionales o a medio plazo

Consideraremos como medio plazo la escala de tiempo abarcada por una temporada completa. Intentamos averiguar cuáles han de ser las variaciones experimentadas por un perfil (ya sea apoyado o no sobre una laja) a lo largo de un año. No sólo los cambios acaecidos por la sucesión estados de bonanza-temporales, sino la velocidad con que se producen dichos cambios, tanto de erosión como de recuperación del sedimento.

Al intentar analizar las diferencias morfodinámicas entre ambos tipos de perfiles pero en la escala de medio plazo, tuvimos que modificar nuestra estrategia de toma de datos. Puesto que uno de los objetivos fijados es la determinación de tasas de erosión y recuperación de la playa con el fin de conocer las posibles necesidades de material con vistas a la temporada estival, se decide que la periodicidad entre levantamientos sea quincenal. Se tratará únicamente de topografía mediante distanciómetro efectuada en horas de bajamar e introduciéndose el peón portaprisma lo máximo posible. Sólo dispondremos de datos hasta la profundidad $-1,00$, pero debemos recordar que ésta es precisamente la profundidad a la que se encuentra la laja; por otro lado gozaremos de una mayor precisión, rapidez, independencia del estado de la mar y economía.

Los perfiles estudiados fueron los mismos que en el párrafo anterior P19 (con laja) y P45 (sin laja). La campaña dio comienzo el 1 de abril de 1995 y concluyó el 1 de marzo de 1996. Se trata pues de un conjunto de 23 series temporales, compuestas en el caso del perfil con laja de sucesiones de 22 puntos separados entre sí 10 metros y para el perfil libre (P45) de grupos de 25 puntos con idéntica separación.

Aplicando el método de las EOF se obtuvieron unas componentes transversal y temporal cuya representación gráfica se presenta en las Figura 5a (perfil apoyado en laja) y Figura 5b (perfil libre o completo).

Puede apreciarse (Tabla 1) como el tanto por ciento de varianza explicada supera, en ambos casos el 99% para la primera componente, la que definiría el

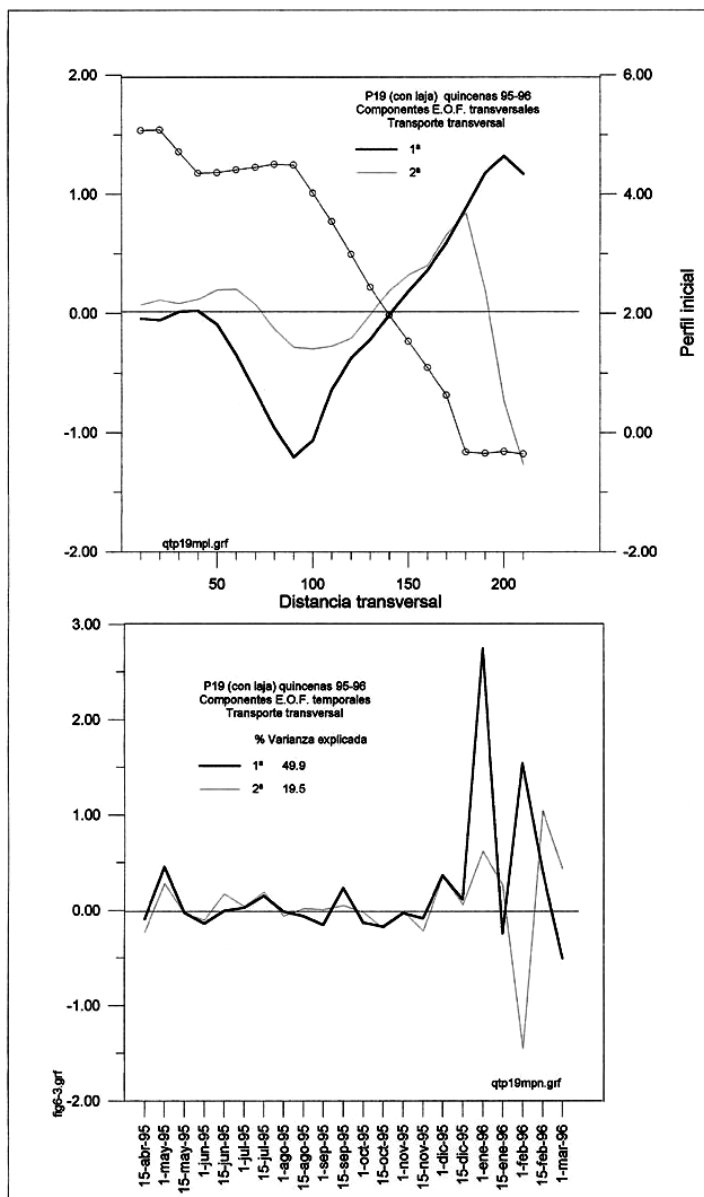


Figura 5a. Componentes transversal y temporal de los datos tomados topográficamente a lo largo de un año en el perfil con laja.

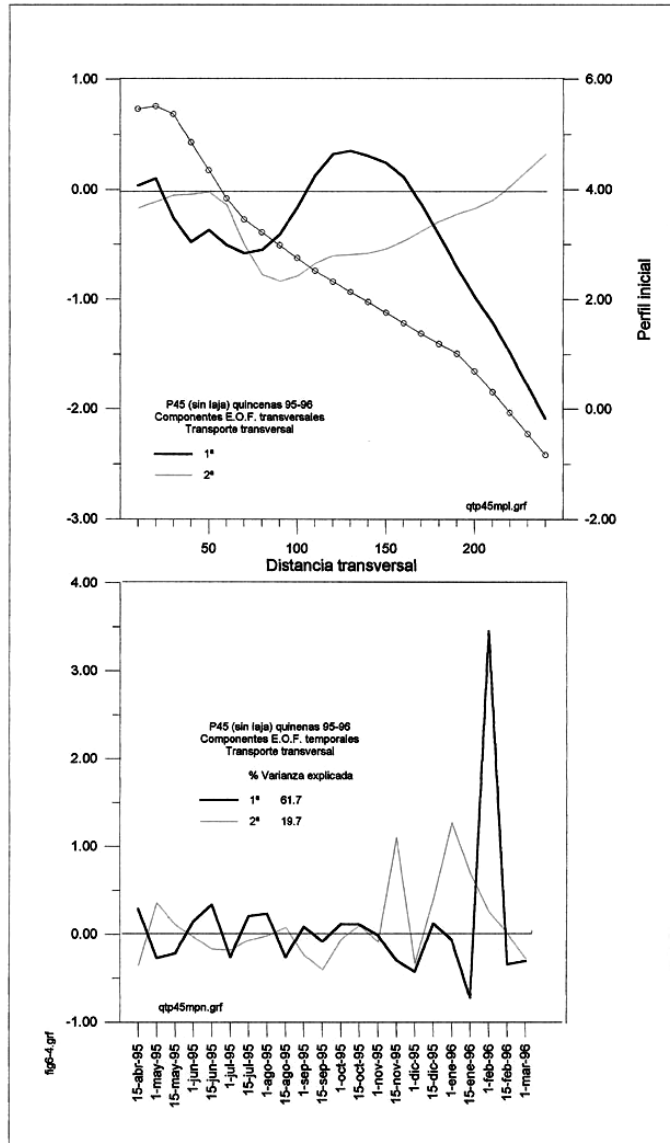


Figura 5b. Idem para el perfil sin laja.

perfil medio. La componente temporal asociada tiene un valor casi constante e igual a la unidad a lo largo de todo el ejercicio hasta finales de diciembre en que comienza a decrecer hasta un cierto valor a partir del cual vuelve a permanecer constante. Se trataría por consiguiente, tanto en el P19 como en el P45, de un retroceso generalizado de todo el perfil, paralelamente a sí mismo. Por tanto, sería esta autofunción la que nos capacitaría para conocer cuál ha sido el retroceso real de la línea de playa, independientemente del cambio de inclinación que haya experimentado debido a la variación del clima marítimo de verano a invierno. En cambio, la segunda componente podríamos relacionarla con el antes mencionado basculamiento o cambio de pendiente, pues la componente transversal nos señala, en el perfil con laja, 3 zonas claramente diferenciadas: la berma de coronación, y las partes superior e inferior del estrán. El cruce por 0 de esa función se produce alrededor de la cota +2.00, que será el punto pivote con una casi nula variabilidad en altura y alrededor del cual oscila el frente de playa. La parte temporal asociada cambia de signo a mediados de diciembre, lo que supone un cambio de la pendiente de verano (más inclinada) a la de invierno (mucho más tendida). En el perfil no apoyado no aparece ese basculamiento, pues el punto pivote estaría precisamente en la cota límite de topografía (alrededor de la cota -1,00), como ya pudimos constatar en la variación a largo plazo.

Morfológicamente seguimos apreciando una gran diferencia entre ambos perfiles medios a lo largo del año. No sólo el perfil con laja tiene una pendiente de alrededor del 4,5% muy superior a la del perfil libre, que es del orden del 2,5%, sino que también tiene mucho más marcada la berma de la pleamar.

El perfil P45, no apoyado en estrato rocoso horizontal superficial, no está completo en estas series de datos topográficos. Del estudio de las batimetrías efectuadas en la zona dedujimos que su actividad alcanzaba algo más allá de la cota -3.00. Debemos, por tanto, ser prudentes a la hora de extraer conclusiones que afecten al perfil en su tramo sumergido.

3.2.3. Variaciones a corto plazo

Hasta el momento hemos considerado un perfil medio o tendencia a muy largo plazo, así como las variaciones interanuales, a largo plazo, y las variaciones cíclicas tanto estacionales o semestrales, a medio plazo. Dentro del corto plazo nos surgen unos fenómenos esporádicos, de aparición ocasional, pero cuyos efectos pueden ser muy importantes pese al pequeño intervalo de tiempo en que actúan. Estudiaremos los cambios experimentados por el frente de playa frente a un temporal puntual, no frente a toda una temporada invernal de marejada.

Antes, hemos considerado el «comportamiento medio» del perfil tras una serie de temporales con sus respectivas calmas intercaladas. Se trata ahora de averiguar cuán importantes pueden ser los cambios sufridos por el perfil tras

una sola tormenta. En suma, queremos saber, entre otros parámetros, el orden de magnitud del retroceso de la línea de costa inmediatamente después del temporal, ya que existen daños puntuales instantáneos no reversibles que pueden quedar enmascarados con la observación de una media de más largo plazo; tal pudiera ser el caso de que el oleaje alcanzara una cimentación, ya sea de un paseo marítimo o de unas viviendas, no diseñada para esa eventualidad. Igualmente nos parece interesante el conocer cuáles son las tasas de recuperación en los días posteriores en orden a, juntamente con un modelo de previsión del oleaje, establecer una estrategia de defensa local.

Teniendo conocimiento, merced a la previsión meteorológica, de la llegada del primer temporal del invierno a principios de noviembre de 1995, se decidió hacer un seguimiento diario del comportamiento que, frente a este fenómeno, tendrían los dos perfiles ya mencionados: el P19 (apoyado sobre el estrato rocoso horizontal) y el P45, ubicado más hacia el sur y fuera por tanto de la laja rocosa.

Los datos topográficos se tomaron mediante un distanciómetro situado en cada cabeza de perfil, aprovechando las horas de bajamar y siendo llevado el prisma reflector por un operario con traje de neopreno hasta más allá de la cota $-0,50$. La fiabilidad de estos datos es de 1 cm. a efectos prácticos. Esto permite que en el caso del perfil apoyado dispongamos de todo el perfil activo, unos 220 m. desde el origen (que coincide con el muro del paseo marítimo). En el P45 la longitud estudiada alcanza los 250 m., debido a su menor pendiente. La primera jornada de campo fue el 8 de noviembre de 1995, el temporal ocurrió el día 11 y se decidió terminar con la campaña el 28 de ese mismo mes. Fueron 21 días en total.

A continuación se expone un gráfico (Fig. 6) donde se representa el conjunto de los datos de una manera conjunta, sin tratamiento estadístico previo. Se aprecia ya el basculamiento que se produce hacia la mitad del estrán en el perfil apoyado y en la cota aproximada de la bajamar en el perfil completo.

Para obtener una más clara y completa interpretación de los datos aplicaremos las EOF. La primera componente espacial tiene la forma del perfil medio y su componente temporal asociada es, por consiguiente, de valor casi unitario. Las segunda y tercera componente apenas se diferencian dado el enorme peso que tiene la primera en cuanto a explicación de la varianza de los datos (superior al 99,9%). Presentamos en la Figura 7 dichas componentes para ambos perfiles tipo.

En la Gráfica 8 hemos dispuesto los valores medios diarios del oleaje en esos días. Además de las comúnmente representadas altura de ola media y significativa, se ha añadido el cuadrado de la ola media que estará directamente relacionado con la energía media que llegue a nuestra playa. Del mismo modo, debajo del período medio vemos la gráfica del peralte medio diario. Este parámetro es el que, mediante el número de Iribarren (1951), nos indica el tipo de rotura del oleaje esperada, en función de la pendiente de la playa. Puede apreciarse como, tras el temporal, oscilan los valores entre 0,007 y 0,03, lo que para

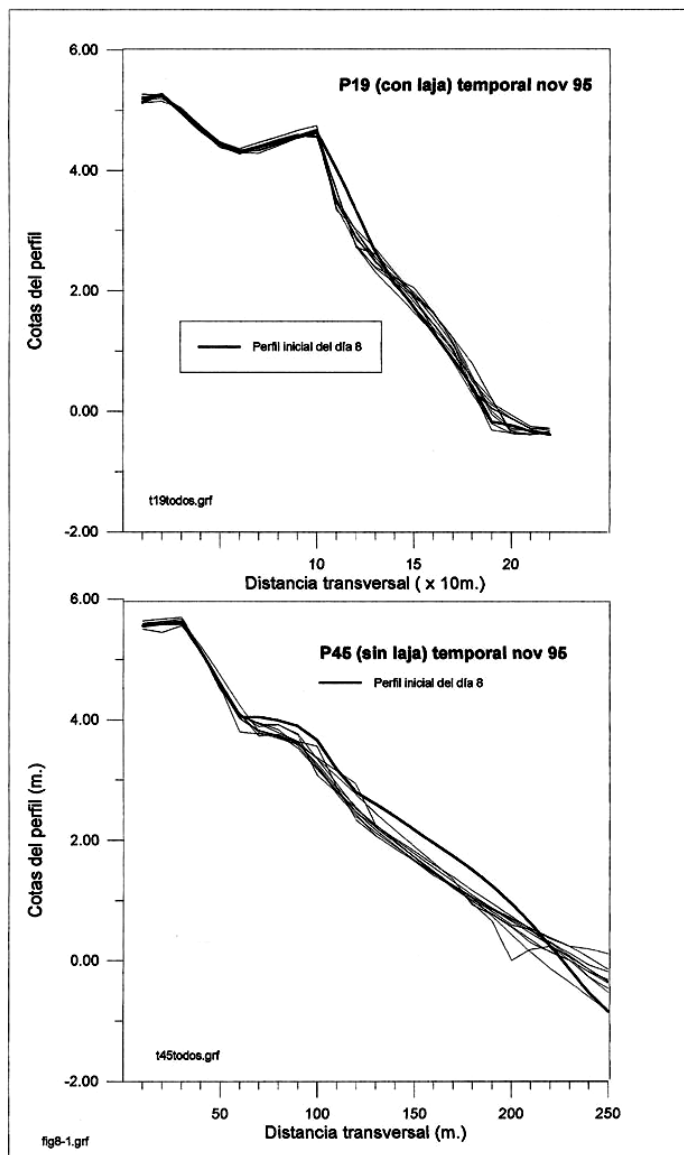


Figura 6. Conjunto de datos tomados previa, durante y posteriormente a un temporal (sin tratamiento estadístico).

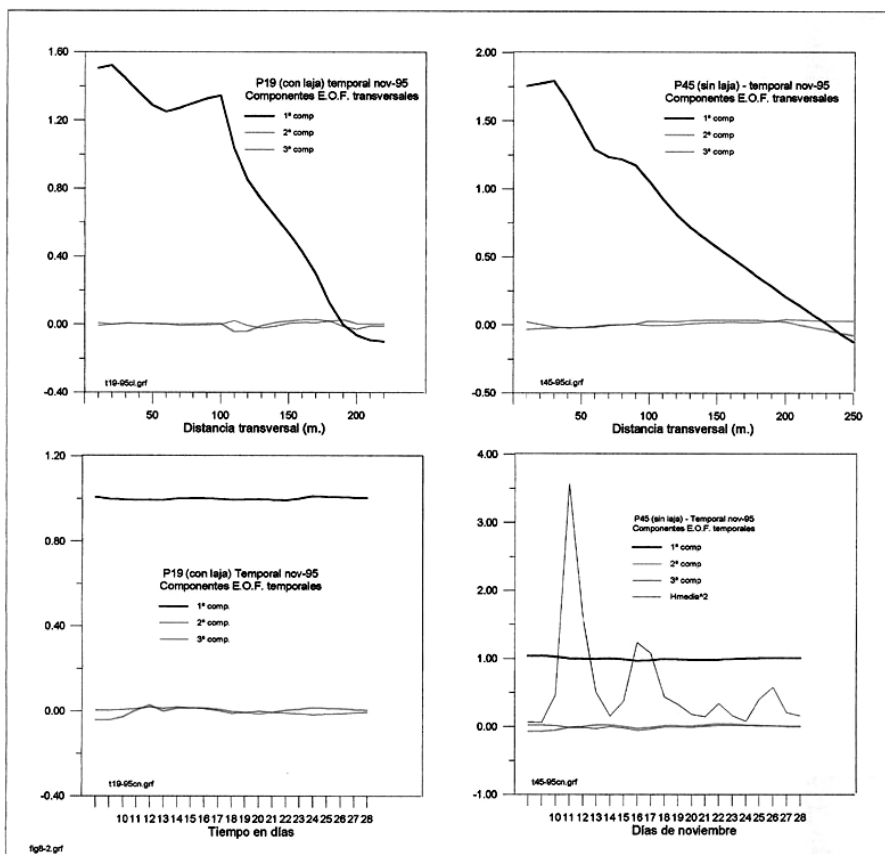


Figura 7. Componentes transversal y temporal de los datos presentados en la Figura 6 para ambos tipos de perfil (con y sin laja).

pendientes del 5% supone que el n.º de Iribarren fluctúe entre 0,30 y 0,60; es decir, las olas pasen de rotura en descrestamiento a rotura en voluta alternativa y sucesivamente en el lapso de pocos días.

En los casos anteriores, eliminábamos la media de los datos para dar mayor preponderancia a la diferencia de la varianza restante. En este caso particular, lo que deseamos ahora es apreciar los cambios debidos al temporal con respecto al perfil inicial o de bonanza. Será éste, por consiguiente, el que restemos a, todos los demás para que nos sirva de punto de referencia. Los Gráficos 9a y 9b muestran las componentes transversales y temporales para los perfiles con laja y sin ella respectivamente.

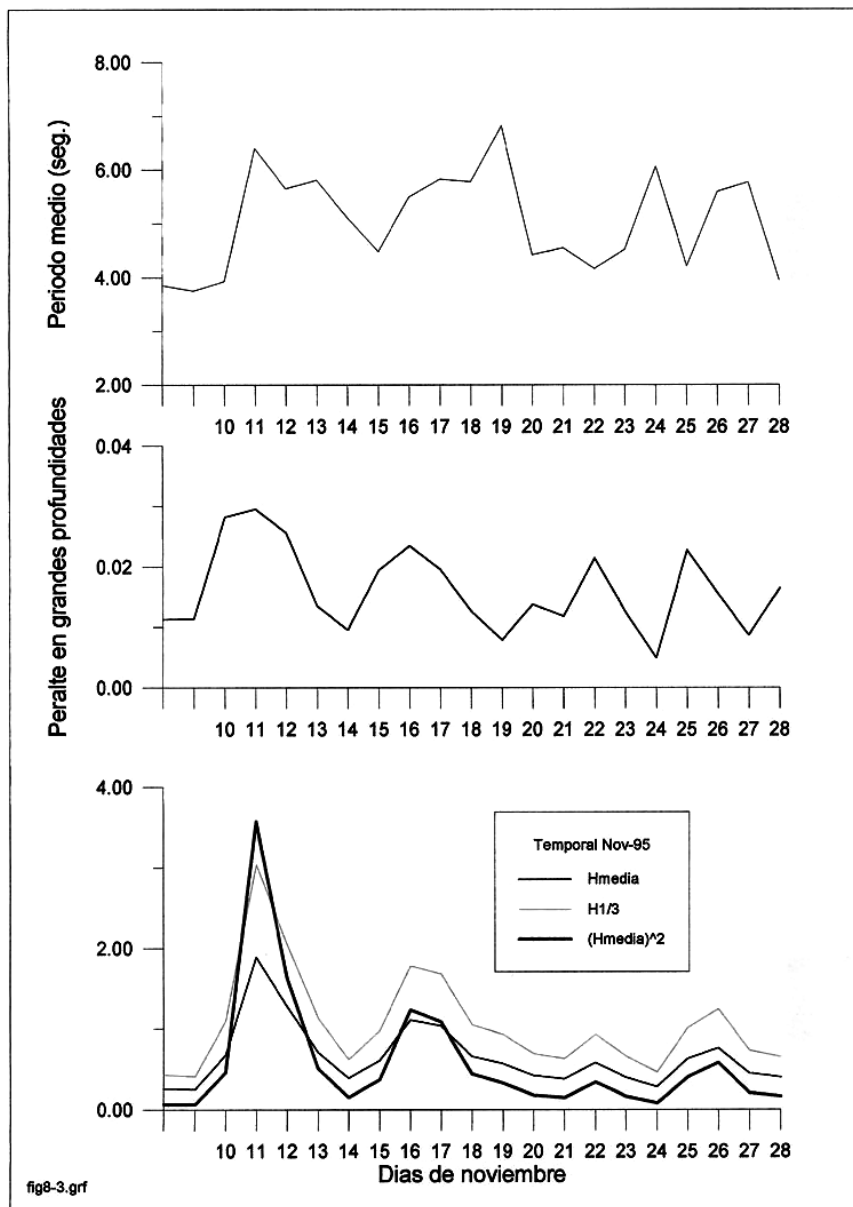


Figura 8. Valores medios diarios del oleaje durante el temporal y la posterior bonanza.

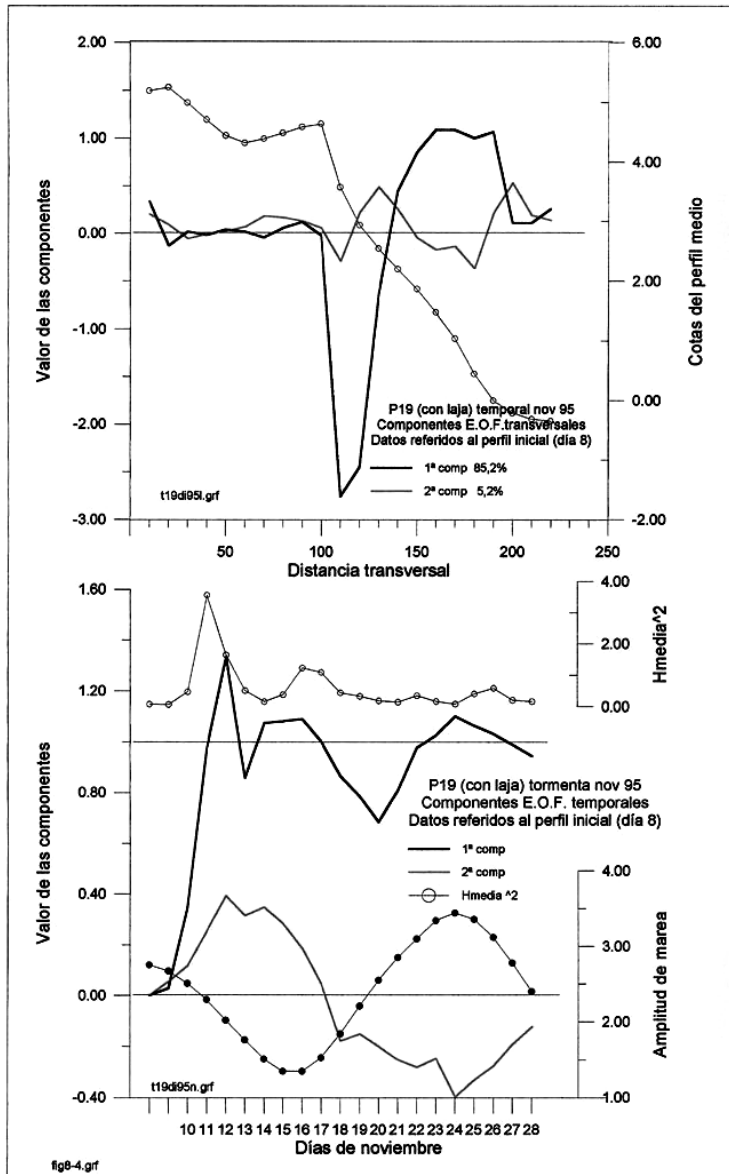


Figura 9a. Componentes transversal y temporal para el perfil con laja una vez restado de los datos el perfil original.

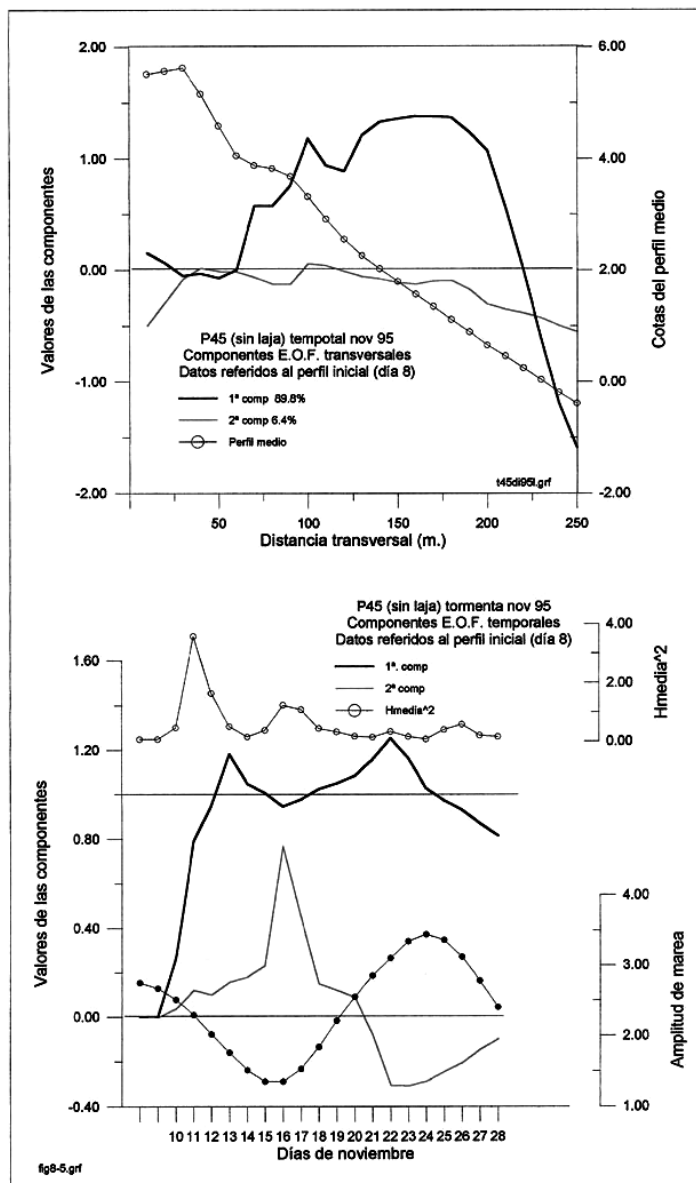


Figura 9b. Idem para el perfil no apoyado.

Si comparamos los resultados en ambos perfiles podemos detectar que:

- En el P19 (con laja) la erosión se produce en la parte superior del estrán (véase la primera componente transversal), entre las cotas 2,50 y 4,50, siendo más significativa entre la 3,00 y la 4,00. Parte de ese material se reparte en una zona mucho más amplia inmediatamente inferior, entre la +2,50 y la -0,20. La componente temporal asociada es siempre positiva, experimenta un fuerte salto con el temporal para fluctuar después suavemente alrededor del valor unidad; ello indica que el cambio sufrido no ha sido reversible en su mayor parte. La segunda componente parece estar relacionada con el ciclo de marea pues tiene una forma sinusoidal con máximo el día 13 y mínimo el 24 que coinciden relativamente con la carrera de marea muerta y viva respectivamente.
- En el P45 (sin laja) la erosión cubre una zona mayor que en el perfil con laja, desde la +4,00 hasta la +0,00 (todo el perfil visible de la playa), produciéndose los cambios más importantes entre +3,00 y la +0,50. Esa arena va a parar a la parte sumergida pero no podemos cuantificar su posición por tratarse únicamente de datos topográficos. La primera componente temporal es en todo similar a la del P19, siempre positiva, salto brusco con el oleaje de tormenta y suaves fluctuaciones posteriores alrededor del valor unidad. En cuanto a la segunda componente temporal aparece también una dependencia con respecto a la carrera de marea. No obstante, existe un desfase de 2 a 3 días en la aparición del mínimo con respecto al perfil apoyado sobre laja.

4. CONCLUSIONES

Las variaciones experimentadas por los perfiles de playa suceden a escalas de tiempo muy diferentes, en función del fenómeno físico que los genera. En este estudio hemos distinguido un perfil medio o tendencia a muy largo plazo, las variaciones interanuales o a largo plazo, y las variaciones cíclicas estacionales a medio plazo. Por último, y dentro de lo que llamaríamos un muy corto plazo, se han investigado los cambios frente a un temporal puntual.

Los E.O.F. (Empirical Orthogonal Functions) o funciones ortogonales empíricas, conjuntos de autofunciones independientes por tanto entre sí, han demostrado ser una herramienta matemática muy útil a la hora de analizar las series temporales de datos de que disponíamos. Permiten diferenciar y distinguir, con una metodología sencilla, los diferentes fenómenos físicos de alteraciones del perfil de la playa.

La playa Victoria goza de una particularidad. Está dividida por una falla transversal en dos zonas. La situada más al norte tiene una laja rocosa a la cota de la bajamar escorada, mientras que la más meridional carece de esa plataforma rocosa. Esto ha permitido elegir dos perfiles situados en ambas zonas res-

pectivamente y estudiar los cambios experimentados suponiendo que las variaciones se deben únicamente a la diferente condición de contorno en el fondo. Esa plataforma horizontal supone una limitación a la altura de ola que llega hasta la orilla. La consiguiente disminución del nivel de energía permite un perfil con una inclinación superior y, por tanto, una reducción del volumen de sedimento preciso para conseguir una determinada superficie de playa seca.

En lo referente a los cambios experimentados a largo plazo (cinco años), la aplicación de las EOF nos permite afirmar que el fenómeno que más explica la variabilidad de los datos recogidos es la erosión generalizada en el perfil apoyado, mientras que para el perfil no apoyado es el basculamiento con punto pivote alrededor de la cota 0.00 (aproximadamente la bajamar viva).

Respecto a los cambios estacionales puede afirmarse que a lo largo del año ambos perfiles pasan de una pendiente suave o propia de invierno a una más empinada, característica del verano, basculando alrededor del punto medio de su perfil activo. La diferencia estriba en que, en el perfil apoyado en laja, sólo puede moverse la arena desde la cota +4.00 hasta la +0.00 y el basculamiento se produce por tanto alrededor de la +2.00. Por contra, en el perfil completo el grano puede desplazarse desde la berma (+4.00) hasta el pie ubicado aproximadamente en la -4.00 (el basculamiento se produce alrededor de la cota de bajamar viva, +0.00).

De entre las conclusiones que podemos extraer del estudio comparado del comportamiento de ambos perfiles frente a un temporal de un solo día podemos destacar que :

- El punto de basculamiento del perfil con laja está alrededor de la zona intermareal (+2.00) en el perfil apoyado en laja, mientras que está ubicado cerca de la bajamar en el perfil no apoyado o completo.
- Se advierte que, para este temporal en particular, el período de amortiguación de las fluctuaciones post-tormenta ha sido de aproximadamente 20 días en ambos casos. Además la erosión ha sido irreversible a corto plazo; la recuperación ha consistido únicamente en la modificación de las pendientes del tramo emergido, procurando asimilarse a las existentes antes del temporal.

BIBLIOGRAFÍA

- AUBREY, D. G. (1978): «Statistical and Dynamical Prediction of Changes in Natural Sand Beaches», *Ph.D. thesis*, Univ. of Southern California, Los Angeles.
- BIRKEMEIER, W. A. (1985): «Filled Data on Seaward Limit of Profile Change», *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 111, n. 3.
- BIRKEMEIER, W. A. y C. MASON (1984): *The Crab: a unique nearshore surveying vehicle*, vol. 110, n. 1, pp. 1-7.
- DICK, J. E. y R. A. DALRYMPLE (1984): «Coastal changes at Bethany Beach, Delaware», *Coastal Engineering*, pp. 1650-1667.

- GUTIÉRREZ MAS, J. M., A. MARTÍN, S. DOMÍNGUEZ y J. P. MORAL (1991): *Introducción a la Geología de la provincia de Cádiz*, Serv. Publ. Univ. de Cádiz, 315 pp.
- HALLERMEIER, R. J. (1981): «A Profile Zonation for Seasonal Sand Beaches from Wave Climate», *Coastal Engineering*, 4, pp. 253-277.
- IRIBARREN, R. (1951): *Oleaje y diques*, Ed. Dossat, 302 pp. + 4 apéndices.
- LARSON, M. y N. C. KRAUS (1994): «Temporal and spatial scales of beach profile change, Duck, North Carolina», *Marine Geology*, pp. 75-94.
- LARSON, M., H. HANSON, N. C. KRAUS, J. NEWE. (1999): «Short and long term responses of beach fills determined by EOF analysis», *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 125, no. 6, pp. 285-293.
- LOSADA, M. A.; R. MEDINA, C. VIDAL y A. ROLDÁN (1991): «Historical Evolution and Morphological Analysis of El Puntal Spit, Santander (Spain)», *Journal of Coastal Research*, vol. 7, n. 3, pp. 711-722.
- MEDINA, R., M. A. LOSADA, R. A. DALRYMPLE y A. ROLDAN (1991): «Cross-shore and sediment transport determined by EOF method», *Proceedings Coastal Sediments'91*, pp. 2160-2174.
- MEDINA, R., M. A. LOSADA, I. J. LOSADA y C. VIDAL (1994): «Temporal and spatial relationship between sediment grain size and beach profile», *Marine Geology*, 118, pp. 195-206.
- MUÑOZ PÉREZ, J. J. (1995): «Fiabilidad de las batimetrías y granulometrías, su aplicación a la cubicación de la playa de la Victoria (Cádiz)». III Jornadas Españolas de Ingeniería de Costas y Puertos, Univ. Politec. de Valencia, pp. 639-651.
- MUÑOZ PÉREZ, J. J. y J. ENRÍQUEZ (1998): «Dinámica litoral de una unidad fisiográfica completa: Sanlúcar-Rota», *Revista de Obras Públicas*, n.º 3375, abril, pp. 35-44.
- MUÑOZ PÉREZ, J. J., L. TEJEDOR and R. MEDINA (1999): «Equilibrium beach profile model for reef protected beaches», *Journal of Coastal Research*, vol. 15, no. 4, pp. 950-957.
- MUÑOZ PÉREZ, J. J., and R. MEDINA (2000): «Profile changes due to a fortnightly tidal cycle», *Int. Conf. on Coastal Engineering (ASCE)*, Sidney, vol. 4, pp. 3063-3075.
- MUÑOZ PÉREZ, J. J., R. MEDINA and B. TEJEDOR (2001): «Determination of longshore variations by EOF method in Victoria Beach (SW Spain)», *Scientia Marina*, 65 (4), pp. 393-402.
- NOBLE, B. (1969): *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall Inc, New Jersey, pp. 523.
- PRUSZAK, Z. (1993): «The analysis of beach profile changes using Dean's method and Empirical Orthogonal Functions», *Coastal Engineering*, 19, pp. 245-261.
- SUÁREZ BORES, P. (1999): «La ingeniería de costas en España en el siglo XX. Innovaciones y desarrollo», *OP*, n.º 49, pp. 32-41.
- WINANT, C. D., INMAN, D. L. y NORDSTRON, C. E. (1975): «Description of Seasonal Beach Changes using Empirical Eigenfunctions», *Journal of Geophysical Research*, vol. 80, n. 15, p. 1979-1986.