

# Sintaxis matemática del cielo precopernicano

Vicente Llamas Roig<sup>1</sup>

Recibido: 23 de enero de 2023/ Aceptado: 28 de marzo de 2023 / Publicado: 25 de abril de 2023

**Resumen.** Examen crítico de la sintaxis matemática del etéreo mundo celeste en el que los arquetipos noéticos quedan plasmados en réplicas de rol dinámico superior a las del mundo sublunar por μέθεξις más ajustada. Área de convergencia de pensamientos islámico y cristiano por su nexu aristotélico, la astronomía despunta en el Medievo como scientia media (inter scientiam naturalem et mathematicam). El sistema ptolemaico de epiciclos y deferentes es testado en su irrefutabilidad formal como modelo descriptivo solvente con la solución positivista del ecuante como temprana petición de excentricidad orbital (foco vacío de la futura elíptica kepleriana).

**Palabras clave:** geocentrismo; epiciclo; retrogradación; excentricidad; ecuante.

## [en] Precopernican Heaven Mathematical Syntax

**Abstract.** Critical analysis of the mathematical syntax of the ethereal supralunar world in which the noetic archetypes are embodied in cleaner dynamic replicas of superior dynamics to those of the sublunar by more adjusted μέθεξις. Area of confluence of Islamic and Christian thought due to its Aristotelian nexus, Astronomy stands out in the Middle Ages as a scientia media (inter scientiam naturalem et mathematicam). The Ptolemaic system of epicycles and deferents is tested in its internal formal coherence as a reliable descriptive model with the positivist solution of the equant (punctum aequans) as an early request for orbital eccentricity (empty focus of the future Keplerian elliptic).

**Keywords:** geocentrism; epicycle; apparent retrograde motion; eccentricity; equant.

**Sumario.** 1. Introducción: sintaxis matemática del régimen supralunar. 2. El cielo aristotélico. 3. Hipótesis postivista precopernicana: geocentrismo. 4. Almagesto: desafío supralunar a la dianoica circularidad. 5. La larga travesía del punctus aequans a la focal elíptica vacía. 6. Fuentes y referencias bibliográficas

**Cómo citar:** Llamas Roig, V. (2023). Sintaxis matemática del cielo precopernicano. *De Medio Aevo*, 12(1), 5-25. DOI: <https://dx.doi.org/10.5209/dmae.83990>

### 1. Introducción: sintaxis matemática del régimen supralunar

La geometría griega está imbuida de motivos trashumanes de las tradiciones aritméticas egipcia y babilónica, adaptando muchos de sus recursos (sistema fraccionario de almacenamiento, tablas de cuerdas de círculo, ...). El empleo de números naturales abortaba la solución (irracional) al cociente entre las longitudes de la diagonal y el lado de un cuadrado, pero los logros en geometría de Arquímedes, Eudoxo de Cnido o Euclides trascendieron al campo de la óptica o la astronomía. La tabulación de relaciones entre cuerdas circulares de radio determi-

nado y valores de ángulo central (incrementos de 71° del ángulo nulo al llano en las tablas de Hiparco o de 1° en las del *Almagesto*), el teorema de Menelao, útil para el cálculo de arcos esféricos, y otros hallazgos que marcaran la cadencia a la incipiente trigonometría plana, contribuyeron notablemente al desarrollo de la astronomía, perdurando hasta el modelo de proporciones poliédricas en escala musical del *Harmonices mundi* (tono musical característico de cada planeta en su revolución alrededor del sol y frecuencia tonal variable con la velocidad angular media)<sup>2</sup>.

El escepticismo nominalista apunta a un hipotético *acosmismo*, la posibilidad de impresión del mundo en el

<sup>1</sup> Pontificia Universidad Antonianum (Murcia)  
E-mail: [v.llamasroig@um.es](mailto:v.llamasroig@um.es)  
ORCID: 0000-0003-4830-3003

<sup>2</sup> Ofrece el texto una primera formulación de la ley de proporcionalidad del cuadrado del período orbital planetario y el cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita excéntrica (distancia promedio planeta – Sol). La recta afin ( $y = ax + b$ ) que relaciona período y radio orbital (semieje mayor de la elíptica) a escala logarítmica ( $\log T = 3/2 \log r + k'$ ) para los diversos planetas del sistema solar permite concluir la relación anunciada:  $T^2 = kr^3$ ). Kepler expone una teoría esotérica incompatible con las observaciones y las leyes de movimiento planetario enunciadas en la *Astronomia Nova* y la propia *Harmonices*. La Tierra variaría entre afelio y perihelio en un semitono con una proporción 16:15 equivalente a la diferencia entre notas *mi* y *fa*, de ahí que –lamenta el astrónomo de Weil der Stadt– *en nuestro hogar podemos esperar miseria y hambre (fa-mine)*. Venus varía en un lapso tonal más reducido de proporción 25:24.

hombre al margen de su existencia real (Pierre d'Ailly, Nicolas d'Autrécourt, Johannes von Mirecourt). Quizá la postura nominalista no fuese tan favorable al impulso de la ciencia como pretenden los defensores de esa estrecha conexión entre la crítica conceptualista y la *epistème* moderna, solícita, más bien, de un estímulo realista fundado en la confianza en leyes universales y el vigor de una verdad regente superior al hombre. Un ejemplo aleccionador: la noción de *impetus*, que derivará, por reelaboraciones sucesivas (Jean Buridán, Alberto de Sajonia, Marsilius von Inghen) desde la originaria *dynamis endotheisa* o potencia interna postulada por Juan Filipón en el siglo VI, teñida por al-Fârâbî de tonalidades neoplatónicas (también Avicena habla de una «*mayl qâsri*» o cualidad por la que el cuerpo repele lo que le impida moverse en una dirección dada), en el concepto cartesiano de «*quantité du mouvement*», para desembocar en el newtoniano de «*quantitas motus*»: el *impetus*, tendencia íntima de un cuerpo a preservar el movimiento adquirido, encaja más en el binomio aristotélico *dynamis-energeia* que en la visual nominalista, reticente a propiedades intrínsecas por su carga implícita (e inverosímil) de sustancialidad (sanción de la idea de sustancia como sustrato ignoto de cualidades accidentales: despojada de apariencias, la sustancia es una sombra).

No es lícito afirmar sobre bases historiográficas que la ciencia moderna suponga el triunfo de la perspectiva nominalista-conceptualista: la furtiva propensión a la idealidad está latente, pero la hostilidad contra el empirismo aristotélico es apenas rastreable, a tal punto que dos siglos más tarde muchas de las explicaciones modernas que ofrece Galileo en su *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo Tolemaico, e Copernicano* (1632), una apuesta integral por la matematización del fenómeno físico, retrotraen a algún problema planteado por el Estagirita. Más que resultado del imperio de esa razón remisa a la idea de sustancia como sustrato inaprehensible de cualidades inherentes que relega la finalidad a una posición causal metafórica (fin epifenoménico), la ciencia emergente será fruto de una *síntesis ecléctica*, la *sorte de synthèse du Thomisme, du Scotisme et du Nominalisme*, impregnada de elementos neoplatónicos, que señala Pierre M. Duhem en *Le système du monde*.

La física aristotélica, fenomenológica y descriptiva, su tesis basal de un *locus naturalis*, va cediendo el relevo a una ciencia abstractiva que busca, por matematización del orden natural, una ley universal de causalidad (ley natural bajo hábito matemático: principios de inercia, conservación de *momentum*, ...). Como ocurriera con la lógica, una *astronomia nova* sucederá a la vieja antífona planetaria, pero en ambas se advierte la abducción por el orden dianoico que la síntesis newtoniana sublimará con la unificación de leyes de los dos mundos (supra- e infralunar), unificación que precipita el ocaso del *noetón* platónico en su diáfana epistemática, transfigurado en *nooúmenon* ininteligible (ya no *epistéma*: *epistemicidio* o desvitalización epistémica del *noetón*, solo razón ideal; los *noetones* pierden su inteligibilidad como *nooúmena*, pero no su racionalidad, dejan de ser paradigmáticos *intelligibilia* para ser únicamente *rationabilia* ideales). Si la idea de *algo que no aparece, objeto en-sí*, al margen de

su relación con la sensibilidad (sea positivamente objeto cognoscible por intuición no sensible denegada a un *noús* amétrope, o negativamente objeto opaco a la sensible), es correlativa a la objetiva calidad ontológica de la cosa como fenómeno, la restricción del conocimiento al fenómeno de ser desmarca al nómeno como límite de experiencia cognitiva, *metà-epistema* útil solo a la razón práctica (*nulla virtus cognoscitiva circa obiectum in se*): la ensidad atingente a la intuición intelectual se sustrae a las condiciones de posibilidad del conocimiento, a las formas *a priori* de lo fenoménico<sup>3</sup>, espacio y tiempo no son propiedades reales de las cosas *en sí mismas*. La ensidad óntica es metafenómeno de ser, por ende, no procesable en categorías intelectivas pero articulada en clave racional: fantasma extra-intelectivo absuelto de la luz excesiva de los días de renuncia, libre del yugo del lugar y la mediación, *ens rationis* en su génesis, fantasía de *razón razonada*. De hecho, con la metabiosis del nómeno por desvirtuación epistémica del *noetón*, la ensidad no será ya tesis ontológica inaccesible (incognoscible) yuxtapuesta a la fenomenalidad que remitiese a un quimérico *kósmos noetós*, escindido del piélagos de entes mudables, sino accesoria faceta trans-intelectiva (netamente racional) de la cosa que obedece a un fin práctico (cariz ontológico, pulsión fenoménica e inteligibilidad, transitivamente concatenadas: el ser se agota ontológicamente en coyuntura fenoménica relativa, inteligible como tal por no refractario a formas *a priori* de sensibilidad, y la subordinación al *noús* bajo esquemas transcendentales es designio gnoseológico<sup>4</sup>). Epigénesis del nómeno en inmunidad al espacio-tiempo: noema vacío, huérfano de intencionalidad. Fantasma de *razón razonada* (*ens rationis ratiocinatae*) privado de ocasión sensible, sin genuina textura ontológica ni oportunidad intuitiva.

## 2. El cielo aristotélico

Desde el último escenario del Empíreo, el anfiteatro de la *Cándida Rosa*, las almas beatíficas contemplan al motor inmóvil (*πρῶτον κινῶν ἀκίνητον*) ... El *Paradiso* de Dante replica la estructura del cielo aristotélico, atrás el *Antinferno*, poblado de fantasmas dolientes asediados por hirientes insectos, temerosos de cruzar el Aqueronte,

<sup>3</sup> La forma pura subsistente (*substantia separata*) tomista, externa al espacio-tiempo del ser fenoménico, sería inteligible *per se*, no *per speciem*. Susceptible de intuición sin mediación de *species*, vicario cognitivo o vehículo de inteligibilidad efectiva en la abstracción (depuración de caracteres individualizantes cifrados en la *materia signata quantitativa* o transferencia de orden sensible a intelectual operada por el intelecto agente).

<sup>4</sup> Los esquemas son determinaciones de objetos en general, no imágenes particulares. El esquema es para Kant una regla de procedimiento relacional concepto puro / objeto en general, forma de aplicación de las categorías a impresiones sensibles o método de representación de un concepto no empírico en cualquier imagen. El esquema transcendental no es una imagen sino una regla de comprensión de imágenes sucesivas mediante el aparato de conceptos puros (estos operan sobre la intuición pura "tiempo" generando esquemas transcendentales, reglas de aplicación de conceptos puros a cualquier percepción sensorial: el juicio hipotético sería la modalidad de juicio correspondiente a la categoría «causa», y el esquema de causalidad –todo fenómeno es efecto de otro invariablemente precedente en el tiempo a título de causa– se extiende a fenómenos temporales).

y el cono inverso de nueve círculos de los 33 primeros cantos de la *Commedia*, la *ciudad del llanto* y el *eterno dolor* de la raza dañada, *infundibulum* que descansa sobre un malicioso vértice, las nueve esferas concéntricas organizadas según la jerarquía (nueve órdenes) de las inteligencias motrices (el simbolismo ternario preside el cosmos, evocación de la trinidad)<sup>5</sup>: las tres primeras, bajo influencia terrestre, asociadas a lívidas formas de prudencia, justicia y templanza; la esfera solar, junto a las de Marte, Júpiter y Saturno, afines a grados más elevados de las cuatro virtudes cardinales; al fin, las virtudes teologales asisten a la octava esfera, la de las estrellas fijas, como el fraude, la simonía o la falsa profecía se concentran en las *Malebolge* del octavo círculo



La obra de Dante es exquisito reflejo de la huella de Aristóteles bajo un *dolce stil novo* subjetivista de inspiración mística en el que confluyen la lírica trovadoresca adicta al efecto purificador del amor gentil, el naturalismo franciscano y los cuadros métricos (esquemas estróficos) de la escuela siciliana trecentista, más allá de la filosofía o la ciencia. También es vivo exponente del esplendor de la metafísica de la luz, prefigurada antes en el Infierno una jerarquía racional antinómica, la del mal, bajo la *legge del contrappasso* pena-culpa, por analogía (pena inercial, redundante en el pecado) o antítesis (pena opuesta a él: la lluvia de azufre y fuego para sofocar el *hedor de la lujuria* y apagar el *ardor de la libido* que Inocencio III imagina sobre Sodoma en *De contemptu mundi*), con trasfondo en

<sup>5</sup> Perfecto equilibrio del triángulo, las tres estacionaciones del *itinerarium mentis* bonaventuriano (*extra / intra / supra animam*), a la postre, los vértices del triedro ontológico cartesiano (*res extensa / res cogitans / res infinita*), también las tres proposiciones estructurales del silogismo no truncado. Sumada al símbolo trinitario la tétrada elemental del mundo sublunar, salda el número de pecados capitales. Nueve son los círculos del Infierno y nueve las esferas del Paraíso. Siete las cornisas que siguen al Antepurgatorio, atrás el hemisferio sur alcanzado a través de la *natural burella*, se alza ante Dante y su guía la montaña de laderas escalonadas y cumbre plana de simetría inversa al Infierno en la que expían pálidas culpas almas menos negligentes. También la redención es progresiva, una paulatina purificación hasta beber las aguas del olvido (Lete) y la *mnemósine* (Eunöe).

infernol. La novena esfera, la mayor del universo físico, es la morada angélica correspondiente al primer móvil, inmediato receptor de la acción motriz de la *ἐντελέχεια* estática (incompatibilidad de la mudanza con la perfección), intenso punto de luz inagotable *en profunda y clara subsistencia* en el centro del círculo que mueve directamente por influjo erótico (... *el amor que mueve el Sol y las demás estrellas*). Rebasado el último círculo celeste, se progresa más allá de la existencia corpórea, al Empíreo, sede de la *Somma Sapienza* benéfica para la rosa de los beatos. La divina potestad que luce en el Empíreo imprime una moción rotatoria al primer motor, y este la transmite a los cielos adyacentes, en gradiente negativo de celeridad hasta la Tierra.



la *Ética Nicomáquea*. Incontinencia, violencia y fraude van estrechando el círculo de penuria en torno a la *massa damnata* bajo el signo alegórico de una de las tres bestias que detuvieron al poeta en la selva oscura, según la gravedad de la flaqueza: los cinco primeros círculos castigan la autoindulgencia, sexto y séptimo la violencia, octavo y noveno condenan, más severamente, la perversidad, hostigadas las almas vacías de los réprobos por criaturas de ambigua naturaleza. Proxetas, aduladores, simoníacos, falsificadores, hipócritas, consejeros corruptos y otros impíos espíritus, aún más mezquinos, se hacían en diez fosas unidas por puentes sobrevolados por Gerión, bestia antropomorfa de tres cuerpos (rostro de hombre honesto que mora en el Flegetón con hábito reptiliano y cola de escorpión), a ese círculo sigue el de la traición, dividido en cuatro rondas concéntricas que conducen al ángel más impuro, atrapado en el hielo hasta la cintura, cuyo inútil aleteo genera un viento gélido sobre el Cocito. El juego triádico sigue vigente como perversión de la trinidad: omnipotencia, omnisciencia y amor divinos se tornan aquí impotencia, ignorancia y odio, sin solución de redención metafísica por la inconsistencia ontológica del mal, huérfano de ensidad<sup>6</sup>.

<sup>6</sup> Escolio agustiniano: el mal carece de entidad en sí mismo, medra en una sustancia externa, socavando su hábito, deformándola, total o parcial corrupción sustancial sin generación subsecuente. La tensión ontológica entre la mancha original y el letárgico don gratuito

### 3. Hipótesis positivista pre-copernicana: geocentrismo

El dinamismo del éter que colma el mundo supralunar es apólogo de la moción más próxima, por cerrada sobre sí, a la inmutabilidad divina, *νόησις* auto-noética o *ἐνέργεια* akinética subsistente en perfecta auto-identidad, en estática auto-posición óptica, sin traza dinámica, dispensada de *κένωσις*, eximida de auto-vaciamiento precursor de la dehiscencia ontológica que el cristianismo propugna («ἐκένωσεν» anunciado en *Filipenses*), más allá de la atracción erótica con rédito motriz. *Salir de sí* con retorno inmediato a sí para aprehenderse sería acción emanada de un *ὑποκείμενον*, marcando una distancia imposible a sí mismo que vela la tragedia de la subjetividad, unidad de apercepción o condición fenomenológica límite de una instancia que hubiese de conjugar en sí la bipolaridad *hypo-* y *anti-keímenon*<sup>7</sup>. Aun el movimiento reflexivo filtra un índice de extrañeza, incorpora una nota de *keimenalidad* inaceptable para la *nóesis* desubjetivada por anterior esta a la dicotomía *hypo-/anti-keímenon*: el sujeto noético ejerce una *nóesis* reflexiva o autodonante en la que se afirma como sujeto pensante, pero la *nóesis* divina no revierte sobre una presunta subjetividad propia en el *noéseos*, no es pensamiento reflexivo (*nóesis hypokeiménica autopoiética*) sino *noesivo* (*nóesis akeiménica auto-noética*), *nóesis* auto-sostenida fuera del tiempo, exonerada de *keimenalidad* subjetivante u objetivante. En contraste, el movimiento circular de la *quinta esencia* es indicio de quiddidad defectiva o no plena auto-identidad (inmovilismo) de lo *quasi*-divino que en esa moción no anhela un lugar de acomodación genética o natural, un *τόπος φυσικός* al que le impela su esencia elemental, sino que se busca obstinadamente a sí para alcanzar la rigurosa coincidencia consigo mismo, genética o quidditativamente vedada.

Tres grandes exigencias del modelo aristotélico, feudo de la hipótesis medular de la ciencia griega (finitud y uniformidad del cosmos, circularidad como movimiento perfecto) mantuvieron estancada a la astronomía medieval: geocentrismo, esferas concéntricas y cristalinas en torno a la estable Tierra y movimiento circular uniforme de orbes celestes inscritos en la esfera de las estrellas fijas, animada regularmente por el *primum motum*, especie de alma cósmica (*anima mundi*) movida, a su vez, por el *primum movens* (*ὁ οὐ κινούμενος κινεῖ*): *omne motum ex alio de necessitate reducitur ad motum per se*.

traspasa la *Commedia*. La *Comédie humaine* de Balzac, monumental colección de escenas mundanas, retratos de la vida en provincias y sus pequeños *asuntos tenebrosos*, de la vida política y militar, sería el contrapunto en las postrimerías de la *era del yo*, a un paso ya de la alienación técnica, a la *Divina Commedia*, escenas ultramundanas de la obra literaria cumbre en los epígonos de la *era del super-yo*, amalgama de alegorías cristianas, fábulas de mitología clásica y clandestinos motivos de la escatología musulmana (conformación estructural del Infierno), espejo de la alienación transcendental que subyuga al hombre medio, crucial para comprender la transición del teocentrismo al antropocentrismo renacentista.

<sup>7</sup> El empirismo inglés del XVIII repudiará al *hypokeímenon*: ingrediente ontológico fútil para Locke, salvo en la disposición a considerar objetivas existencias marginadas de nuestra percepción. Berkeley contrae la realidad objetiva a propiedades sensibles, y estas al acto de su percepción.

Cometas y planetas (interiores o exteriores) suponían una amenaza para esa idílica armonía. Los primeros fueron conjurados como «meteoros», fenómenos en la región sublunar debidos a la fricción de capas de aire y fuego envolventes de la Tierra. Los planetas (*πλανήτης*: astros *errantes* o *vagabundos*), Venus y Marte en particular, desafiaron el ingenio de los astrónomos en sus variaciones periódicas de intensidad lumínica o en sus ilusorios retrocesos. Dos posturas en liza: realista (la ciencia debe limitarse a la justificación de lo fenoménico, salvar las apariencias: *σώζειν τα φαινόμενα*) y positivista (el lenguaje racional subyacente a las apariencias, despreocupado del ajuste entre lo observado y lo esperado).

El debate sobre el formalismo de la ciencia desde la revolución copernicana es profuso. Tomás de Aquino escribía al respecto en *Summa Theologiae* I, q. 32:

La razón puede emplearse de dos maneras para establecer un punto: en primer lugar, con el fin de proporcionar pruebas suficientes de algún principio [...] La razón también se emplea de otra manera, no como una prueba suficiente de un principio, sino como una confirmación de un principio ya establecido, mostrando la congruencia de sus resultados, ya que en astronomía se considera establecida la teoría de los círculos excéntricos y epiciclos, porque de ese modo se pueden explicar las apariencias sensibles de los movimientos celestiales; no, sin embargo, como si esta prueba fuera suficiente, ya que alguna otra teoría podría explicarlos<sup>8</sup>.

La solución empirista mixta (Owen-Mansion) que expide la metodología aristotélica, en la que el *éndoxon* presta un servicio encomiable al conocimiento demostrativo que no empaña ni desvirtúa los objetivos explicativos de la ciencia, responde a la doble faz del fenómeno (hecho observable / creencia común) con incidencia complementaria en la configuración conceptual de aquella y afinidad metodológica de las investigaciones físicas y éticas (una clase especial de *phainόμενα*, las *éndoxa*, creencias versadas en aspectos problemáticos de la acción humana que reclaman tratamiento dialéctico y no computan como observacionales ni hechos puros, desempeñan en las indagaciones éticas el papel que juegan en las ciencias naturales «hechos deshiletizados», lastrados de carga interpretativa en tanto corroborantes de una cierta teoría –no son observacionales las *éndoxa* en la teoría de la incontinencia–). Escrutados los fenómenos (*tithénai tà phainόμενα*) en su faceta dual, cribadas las aporías, sondeando todas las opiniones plausibles (*pánta tà éndoxa*), una sencilla discriminación de juicios paradójicos (*hypólepsis paradoxos*) frente a la opinión acreditada sería *prueba suficiente* (*dedeigménon an eie hikanós*)<sup>9</sup>. Insoslayable entonces la demarcación divisoria entre *logikós* y *physikós*, franqueada en esta sección

<sup>8</sup> Tomás de Aquino, *Summa Theologiae* I (*Sancti Thomae Aquinatis Doctoris Angelici Opera omnia iussu impensaue Leonis XIII P. M. edita, Summa Theologiae ad codices manuscriptorum Vaticanorum exacta cum commentaris Thomae de Vio Caietani ordinis praedicatorum, cura et studio fratrum eiusdem ordinis*) Ex Typographia Polyglotta S. C. de Propaganda Fide, Romae 1888-1906, q. 32, a. 1, ad 2.

<sup>9</sup> Aristóteles, *Física* IV, 4, 211a 7-11, edición de José L. Calvo (Madrid: CSIC, 1996); *Ética Nicomáquea* VII, 1145b 2-7; *Ética Eudemia* I, 6, 1216b 26-35, edición de Julio Pallí Bonet (Madrid: Gredos, 2003).

del capítulo que abandona la escena formal-abstracta de la lógica para emprender un sucinto recorrido por las regiones supra- y sublunar, dominios físicos ambos (solo al motor inmóvil le es reservada la preeminente acta metafísica, incómoda para el Filósofo, garante del carácter erótico de su influjo sobre las esferas celestes, aun no investido de transcendencia como el Dios escolástico): la captación de *lo que realmente se da en las cosas (tôn alethôs hyparchonton tois prágmasin*, propiedades de objeto) activa un procedimiento epistemológico que, fiel al empirismo híbrido, inervará un *lógos* inductivo presto a desentrañar los principios propios de la ciencia en su base pre-demostrativa. Frente al *physikós*, un método conceptual (*logikós*) que parte a menudo de presupuestos dogmáticos sin aportar descripción satisfactoria a hechos relevantes. Pasaje programático de *Analíticos Posteriores* I, 30:

Para cada ciencia son propios la mayoría de los principios. La experiencia relativa a cada cosa es la que los proporciona [...] la experiencia astronómica es de la ciencia astronómica (en efecto, una vez que se aprehendieron suficientemente los fenómenos, se encontraron las demostraciones astronómicas). E igualmente sucede con cualquier otro arte y ciencia. Así, una vez aprehendidos los aspectos (*tà hypárchonta*) en cada cosa, es ya asunto nuestro proceder a las demostraciones. Pues si en la indagación de *lo que realmente se da en las cosas* no se dejó nada de lado, seremos capaces de encontrar la demostración de todo aquello de lo que la haya, o de poner de manifiesto aquello de lo cual por naturaleza no la hubiera<sup>10</sup>.

Desde el prisma platónico, la opción realista convertiría a la ciencia en pura *δόξα*, abatida en el reino material, *μέθεξις* del mundo de las Ideas que codicia la *epistème* positivista de Mach o Avenarius, revelando al fenómeno como insolvente manifestación-participación sensible de entidades de estatuto ontológico superior en su prototípica ensidad y canónica inteligibilidad. La hipótesis heliocéntrica de Aristarco de Samos (siglo III a. C.: Sol centro cósmico, esfera externa circundante de las estrellas fijas y siete órbitas concéntricas interiores de diversas dimensiones y velocidades) se atenía a los fenómenos celestes, mitigada la extrema sensibilidad respecto a la fijeza y centralidad terrestres, asignando al planeta azul posiciones variables en la región del zodiaco que el paralaje anual (*παράλλαξις*: ángulo entre dos líneas visuales relativas a la observación de un objeto desde puntos alejados entre sí y no alineados con él), discordancia en la magnitud visual de estrellas de referencia, confirmaba (la progresión aritmética de la escala de magnitudes se establecerá según un cociente de brillos en progresión geométrica sobre la clasificación griega de tamaños y la razón de Pogson: la diferencia de brillo entre dos estrellas sigue un patrón logarítmico, no es arbitraria, pudiendo variar entre dos categorías de tamaño en un factor 2,512), pero la constancia de brillo absoluto impostada en la distancia refutaba. Hasta el siglo XVII los astrónomos no pudieron medir ángulos inferiores a medio grado (Bessel descubrió en 1838 que la estrella más cercana muestra un paralaje de 1 segundo

de arco), imponiéndose la hipótesis positivista de Hiparco y Ptolomeo (II d. C.).

La ciencia positivista tiene honda raíz metafísica, aspira al *εἶδος*, persigue la esencia<sup>11</sup>, desdeñando la apariencia fáctica, descuidando al *φαινόμενον* (el «*φαίνειν*» en inceptión epistemológica realista): ensayos de artificiosas soluciones para remontar el embaucador régimen cósmico sublunar y salvar sus extravíos de la ejemplar inteligibilidad eidética en tácito compromiso con el suborden dianoico del *kósmos noetós* (la jerarquía ontológica acercaría el dominio supralunar al horizonte uránico de primacía del *ἀρχή*, sumido el sedicioso régimen sublunar en la indigencia metéctica, tosca danza de apariencias inmersa en el *kósmos horatós*). No en vano, Ptolomeo emplea el término «*ὑπόθεσις*» como sinónimo de “modelo” o “sistema explicativo” en clave demostrativa que trasciende el hecho observado. El astrónomo presentará la teoría planetaria, en su fundamentación matemática, como un intento de reducción de las trayectorias aparentes de los astros a movimientos uniformes y circulares (movimiento dianoico o ideal que transluce su quasi-divinidad):

Ahora, nuestro objetivo es demostrar para los cinco planetas, de la misma manera que lo hemos hecho para el Sol y la Luna, que todas sus aparentes anomalías pueden ser representadas por movimientos uniformes y circulares, puesto que ellos son propios de la naturaleza de los seres divinos, mientras que la no-uniformidad y el desorden les son extraños. Por lo tanto, es acertado pensar que el éxito en un propósito tal sería un gran logro, y ciertamente el fin propio de la parte matemática de la filosofía teórica<sup>12</sup>.

Una segunda anomalía del modelo geocéntrico (justificable *a posteriori* por la rotación extrínseca terrestre responsable del ciclo estacional, independiente de la posición del planeta respecto a las estrellas fijas) se insinúa en la retrogradación planetaria: la inversión de sentido de movimiento aparente de un planeta respecto a las estrellas fijas hasta reanudar su dirección habitual. La fórmula explicativa adoptada en los planes geocéntricos primitivos cristaliza en un epiciclo cuyo centro describiese un movimiento circular uniforme alrededor

<sup>11</sup> De nuevo, una aclaración filológica en prevención de posibles reparos al uso contextual del filosofema. En *Metafísica*, «*εἶδος*» tiene triple significado: especie como división del género, forma materializada («*idos*») o un valor sinónimo a la *idéa* platónica (sentido más acusado en el plural: *tà eīdē*). El vocablo «*εἶδος*» es traducido como «*species*» en versión latina de la *Metafísica* de Guillermo de Moerbeke. El término latino más afín, apunta García Yebra, habría sido «*visus*», en el que predomina la forma activa de «visión» frente al aspecto pasivo dominante en «*εἶδος*» («do visible») o aparente de algo, acotación semántica – denotación delegada en la raíz «*spec*», presente en «*aspectus*», «*respectus*» y otros sustantivos emparentados con el verbo «*specio*» o con «*speculum*»). Asociado a menudo a «*μορφή*» (Séneca lo hace en recta transcripción latina: «*idos*», distinguiéndola de «*idea*», esta sería la configuración radicada en el semblante que sirviese de modelo a un artista, mientras que el «*idos*» es lo trasladado a la imagen representada del rostro contemplado, algo plasmado en la obra, el producto de imitación al que precede la «*idea*» o ejemplar imitado: «*Idea erat [...] facies, futuri operis exemplar; ex hac quod artifex trahit et operi suo imposuit, idos est [...] Alterum exemplar est, alterum forma ab exemplari sumpta et operi imposita*»). Agustín los identifica, sin más: «*ait ideas posse latine dici formas vel species*»), si bien debe reservarse esa última voz para la forma en el concreto material, sin confusión.

<sup>12</sup> Ptolomeo, *Almagesto* IX, 2, en *Ptolemy's Almagest*, edited by G. J. Toomer (Princeton: Princeton University Press, 1998).

<sup>10</sup> Aristóteles, *Analíticos Posteriores* I, 30, 46a 17-27, en *Aristóteles. Tratados de Lógica*, vol. II, edición de Miguel Candel (Madrid: Gredos, 1995).

de la Tierra siguiendo una circunferencia denominada deferente, homocéntrica (centrada en la propia Tierra) o excéntrica (ἐκ- κέντρον: centrada en un punto externo solidario a la Tierra). La variación de velocidades de rotación permitía ajustar el modelo polivalentemente.

La conjetura de un curso excéntrico, delación de la temprana sospecha de inadecuación del círculo como expresión de dinamismo etéreo, es el golpe más letal asestado a la pretendida armonía de la circularidad en el ámbito supralunar frente a los movimientos abiertos imperantes en el sublunar (potencia quiddativa en el orden hilemórfico de evolución hacia el lugar natural, determinado por el constituyente elemental predominante, abierta al *clinamen*, desvío espontáneo o azaroso de la directriz genética) que forzara durante siglos sofisticadas estrategias matemáticas para salvaguardar una geometría y una sintomática constancia modular de la componente intrínseca normal de la aceleración condenadas en su idealidad.

La moderna física de la gravitación mostrará otro tipo de cónica para una fuerza central, la elíptica, y la fuga hacia la excentricidad que sugieren las observaciones astronómicas no es sino la primera petición de exilio excéntrico o reposicionamiento focal de la Tierra, no central (la Tierra ocuparía uno de los focos de la futura elipse solar), atentando además contra la uniformidad del movimiento. La invarianza direccional y modular del momento angular asociado a la rotación en órbitas cerradas con variación de velocidad tangencial y energía mecánica total negativa superior a la semipotencial del cuerpo giratorio impone a la órbita una positiva excentricidad inferior a la unidad, conservándose en ella la velocidad areolar ( $\frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt}$ ).<sup>13</sup>

El grado de desviación de la perfecta circunferencia será función del momento angular planetario ( $L$ ), la energía orbital total ( $E$ ), la masa reducida ( $\mu$ , marco inercial aplicado en  $cdm$  del sistema de dos cuerpos en interacción gravitacional) y el factor de proporcionalidad  $k$  que liga a fuerza central e inverso de cuadrado distal:

<sup>13</sup> Para dos intervalos temporales  $[t_0, t_1], [t_2, t_3]$  del mismo rango, siendo

$A_{\theta_1, \theta_2} = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta) d\theta$ , se cumplirá:  $A(t_1 - t_0) = A(t_3 - t_2)$ . La demostración de la ley pasa por la elección de un sistema de referencia adecuado centrado en  $M_{sol}$ , dos versores canónicos, radial y angular, perpendiculares entre sí, solidarios al planeta  $m$ :

$\{\vec{u}_r(\cos \theta, \text{sen } \theta), \vec{u}_\theta(-\text{sen } \theta, \cos \theta)\}$ , de manera que:  $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$ . En coordenadas polares, el vector de posición de  $m$  sería:  $\vec{r}(t) = r \vec{u}_r$ ,

su velocidad:  $\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$ , y la fuerza operante sobre ella:

$\vec{F} = F_r \vec{u}_r + F_\theta \vec{u}_\theta = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$  (por ser  $\vec{F}$  una fuerza central:  $F_\theta = 0$ ). Como:

$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = [r''(\theta) - r(\theta) \theta'^2(\theta)] \vec{u}_r + [2r'(\theta) \theta'(\theta) + r(\theta) \theta''(\theta)] \vec{u}_\theta \Rightarrow F_r = m [r''(\theta) - r(\theta) \theta'^2(\theta)]$

y  $2r'(\theta) \theta'(\theta) + r(\theta) \theta''(\theta) = 0$ . Multiplicada por  $r(\theta)$  la segunda igualdad:

$2r(r')r'(\theta) \theta'(\theta) + r^2(\theta) \theta''(\theta) = (r^2(\theta))' \theta'(\theta) + r^2(\theta) \theta''(\theta) \Rightarrow r^2(\theta) \theta'(t) = cte (c)$

. Por otra parte, es el área del sector barrido por el radiovector planeta-Sol (simplificación:  $\theta_1 = 0$ ) tendría por derivada (teorema fundamental del cálculo):  $\frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2(\theta)$ , aplicando la regla de la cadena (derivación de funciones compuestas, dado que  $r$  es explícita función angular e implícita función temporal:  $r(t) = r(\theta) \circ \theta(t)$ ):

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2(\theta) \theta'(t) = c \Rightarrow A(t) = ct + k$  (para alguna constante  $k$ , y así:  $A(t_1 - t_0) = c(t_1 - t_0) = c(t_3 - t_2) = A(t_3 - t_2)$ , *q.e.d.* El momento cinético específico (momento angular por unidad de masa)

en el SR escogido:  $\vec{\Sigma}_m = \vec{r} \times \vec{v} = r^2 \theta' \vec{u}_\theta$  permanece invariante. Velocidad areolar (área barrida por unidad de tiempo):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^{\theta(t)} \int_0^{r(\theta)} \rho d\rho d\theta = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{\theta(t)} r^2(\theta) d\theta = \frac{r^2 \theta'}{2} = \frac{c}{2m} = cte$$

$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EE^2}{\mu k^2}}$ . Las cónicas correspondientes a  $E = 0$  y  $E > 0$  serían, respectivamente, la parábola y la hipérbola. El vector de Runge-Lenz (módulo del momento angular por unidad de masa, contenido en el plano orbital coincidiendo con uno de los semiejes de la cónica) surge como constante natural de movimiento en conexión con la clausura de las órbitas keplerianas y la degeneración orbital consecuente, en buena medida, a las simetrías ocultas del potencial gravitatorio (transformaciones de coordenadas y momentos conducentes a un grupo rotatorio  $SO_4$  en espacio euclídeo tetradimensional)<sup>14</sup>.

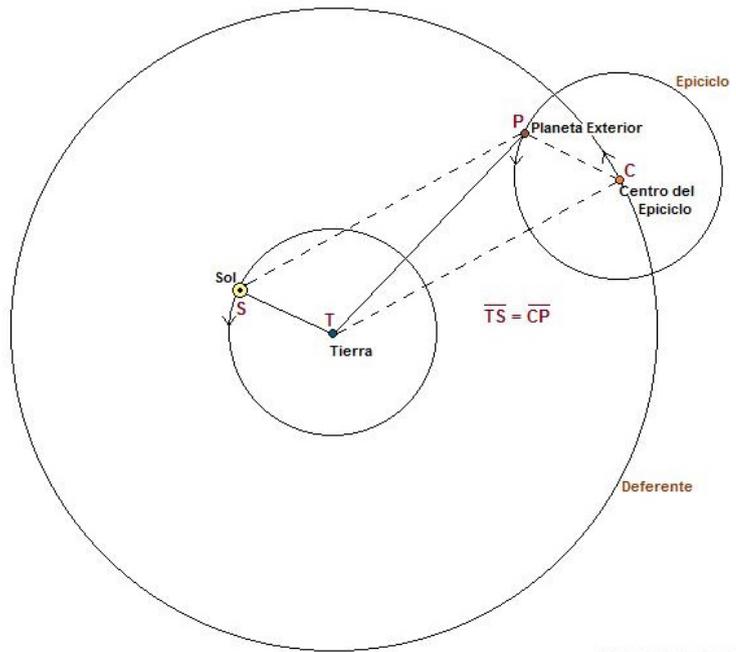
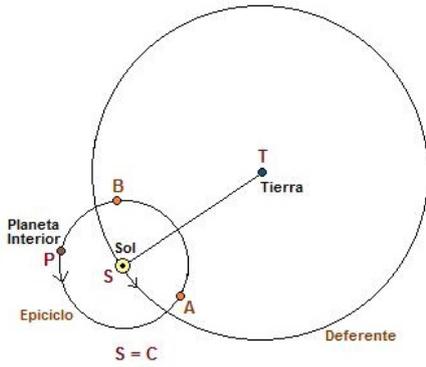
#### 4. Almagesto: desafío supralunar a la dianóica circularidad

La Tierra (T), estática, es el centro del universo. La órbita lunar es interfaz o límite entre dos mundos, etéreo y elemental. Los planetas interiores (Mercurio y Venus) cubren sendas órbitas circulares (epiciclos) alrededor del Sol (S), centradas en este astro, el cual, a su vez, exhibe una deferente en torno a la Tierra. Los planetas exteriores (Marte, Júpiter y Saturno) describen movimientos epicíclicos sobre un punto C (punto que recorre con movimiento uniforme una deferente geocéntrica) tal que S, T, P y C definen siempre un paralelogramo. SP es el radio de la órbita planetaria externa, igual a la distancia entre los centros de deferente y epiciclo exterior (TC). TS sería el radio del deferente solar. Por ser  $TS = CP$ , P se localiza sobre un epiciclo centrado en C.

Omitidas las pequeñas excentricidades de las órbitas planetarias y elididas las inclinaciones de los planos cicloidales, los epiciclos procuran una descripción aproximada de los movimientos planetarios<sup>15</sup>. Las velocidades angulares de los planetas interiores en los epiciclos heliocéntricos son mayores que la del Sol en su deferente geocéntrica. El movimiento del planeta interior sobre el arco de su epiciclo solar externo a la deferente geocéntrica descrita por S se suma al de este astro, desde la perspectiva terrestre es un movimiento directo, pero el desplazamiento de P a lo largo del arco epicicloidal interno a la deferente (arco AB determinado por las tangentes al epiciclo solar del planeta interior trazadas desde T) sería un movimiento retrógrado (el planeta parece retroceder más rápidamente de lo que avanza el centro de su epiciclo sobre la deferente). En contraste, la retrogradación de un planeta exterior lo invisibiliza al aproximarse a la conjunción inferior.

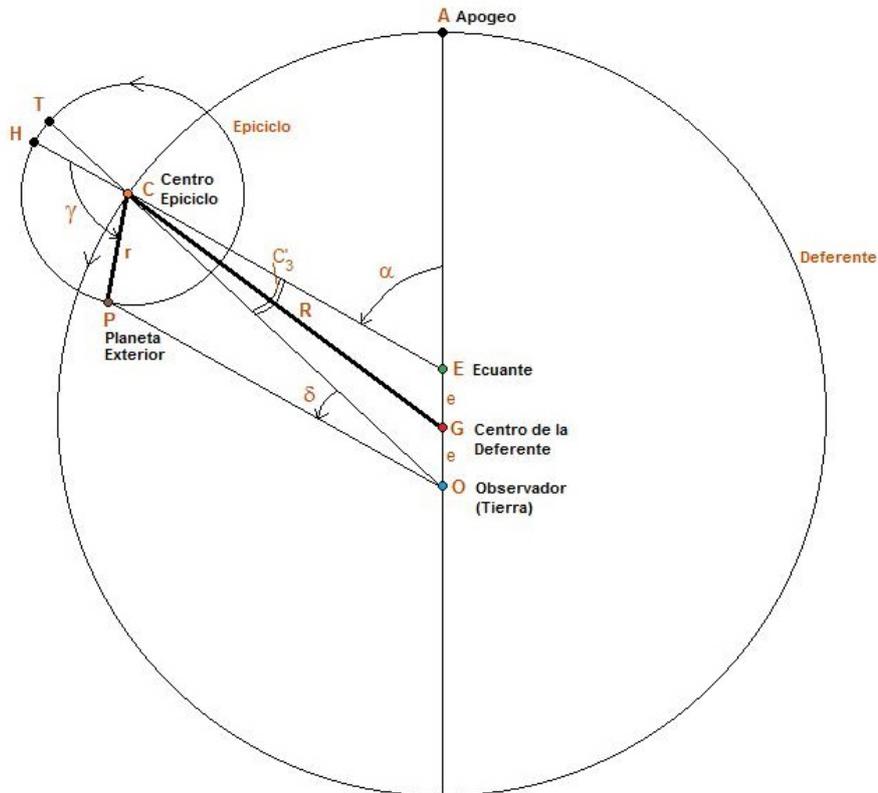
<sup>14</sup> Harold H. Rogers, "Symmetry Transformations of the Classical Kepler Problem". *Journal of Mathematical Physics* 14 (1973): 1125-1129.

<sup>15</sup> Eudoxo de Cnido (siglo IV a. C.) ideó esferas intermedias homocéntricas para solventar el problema de los astros errantes, tres para el Sol y la Luna, cuatro para cada uno de los planetas, además de la esfera de las estrellas fijas. Una compleja conjunción de movimiento de las esferas, con diferentes períodos de rotación, pretendía explicar la retrogradación, si bien la invarianza radial de las esferas geocéntricas se veía amenazada por el aumento de brillo aparente de los planetas al retrogradar. Aristóteles integraría el modelo en su cosmología, con 55 esferas homocéntricas y la distinción de mundo elemental sublunar y etéreo supralunar (pese a su repulsa por el *kósmos noetós* platónico, el Estagirita incurre en la dualidad cósmica, aun con otro carácter). Apolonio de Perga e Hiparco de Nicea sustituirán entre los siglos III-II a. C. el plan de esferas homocéntricas por un sistema de epiciclos y deferentes.



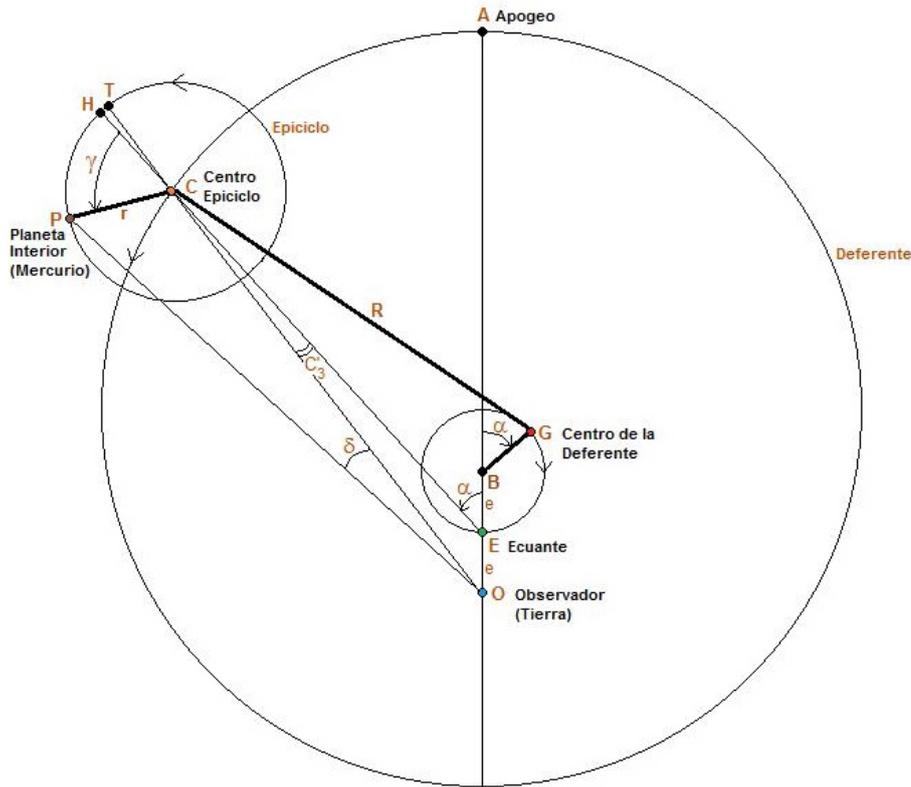
Las órbitas planetarias heliocéntricas representan movimientos epicicloides de planetas interiores respecto a un observador terrestre. La *eccentricus* (ἑκκεντρος) es el efecto conjunto de excentricidades directriz (solar) y generatriz (terrestre), y así, las órbitas epicicloides

excéntricas entrañan movimientos con deferentes excéntricas. La uniformidad angular de rotación del centro epicicloidal acabará refiriéndose, no al centro de la deferente (G) sino a un punto simétrico al de observación terrestre (O) respecto a G, el ecuante (E):  $OG = EG$ .



En el modelo rectificado para planetas exteriores, el movimiento medio está centrado en C, parametrizado sobre la longitud media  $\alpha$  (movimiento medio del centro del epiciclo sobre la deferente) de C desde el apogeo A de la deferente. El planeta P cubre un epiciclo con velocidad correspondiente al periodo sinódico, medido por la anomalía  $\gamma$  (movimiento medio del planeta sobre

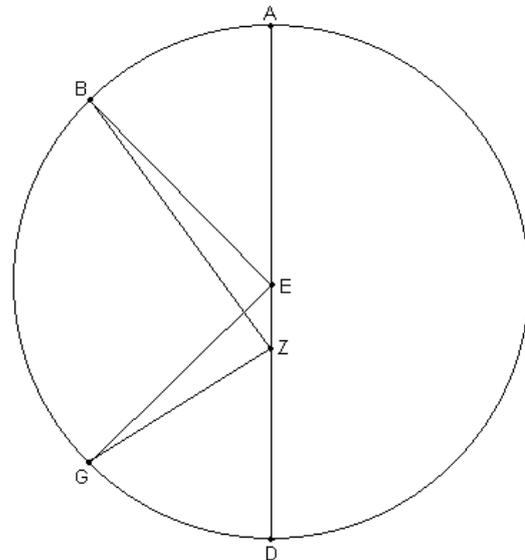
el epiciclo), en sentido de rotación congruente con el movimiento medio (movimiento directo en las proximidades del apogeo epicíclico y retrógrado en la vecindad del perigeo, paralela CP a la directriz de O y la longitud media del Sol). Para un planeta interior,  $\alpha$  se incrementa proporcionalmente a la longitud media del Sol y  $\gamma$  varía de modo independiente.



Mercurio se aviene al modelo presentado: centro de la deferente en movimiento retrógrado sobre un círculo de radio  $e$  centrado en B. La excentricidad BE coincide con la distancia  $e$  del observador terrestre O al ecuante E:  $BE = EO$ . El centro C del epiciclo mercuriano progresa en aparente movimiento uniforme, reubicándose en la posición opuesta por la línea absidal AO (la órbita de C respecto al punto de observación terrestre O alcanza un apogeo en la línea absidal y dos perigeos simétricos a él para  $\alpha = \pm 120^\circ$ ). El perigeo planetario responde a una longitud media  $\pm 120^\circ$  desde la línea de los ábsides (ABEO), valor para el que el radio GC de la deferente pasa por E, aproximando más C a O que una elongación llana ( $\alpha = 180^\circ$ ).

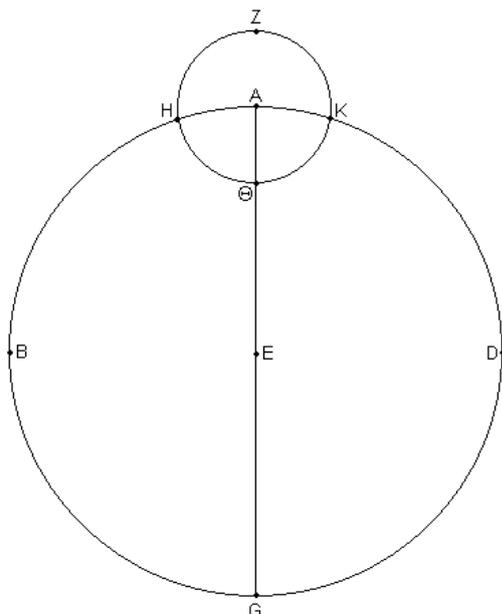
La uniformidad de los movimientos circulares planetarios traduciría el barrido de ángulos idénticos en lapsos temporales regulares por los radios de giro (tenidos desde los centros de revolución). La virtual anomalía en sus rotaciones no es ajena a la dinámica del éter como fondo cósmico (el quinto elemento permea el orbe supralunar). Dos hipótesis tratan de explicar la apariencia de irregularidad, manteniendo en proporción (maniobra positivista) la razón entre las distancias del centro de visión al de la excéntrica y el radio de esta (hipótesis de la excéntrica) y la razón entre los radios de epiciclo y deferente (hipótesis del epiciclo), además de hacer coincidir el intervalo temporal de retrogradación sobre la inamovible excéntrica con el tiempo invertido sobre el epiciclo en atravesar retrógradamente el círculo con el observador terrestre como centro de la deferente mientras el planeta se desplaza con igual velocidad angular siguiendo el epiciclo de modo que su movimiento en el apogeo del mismo fuese anterógrado:

1) Hipótesis de la excéntrica



Los puntos E y Z corresponden al ecuante y a la posición de la Tierra sobre el diámetro que une apogeo (A) y perigeo (D) de la deferente centrada en E. Los arcos AB y GD son iguales, coincidiendo las áreas de los sectores circulares ABE y GDE, pero la del sector ABZ es mayor que la de ABE (el ángulo subtendido desde Z al arco AB es menor que el subtendido desde el ecuante), justo al contrario de lo que ocurre con los sectores GDZ y GDE (mayor este último que el anterior), con movimiento aparente no uniforme respecto al observador terrestre Z. La mayor velocidad se alcanzaría en el perigeo, la menor en el apogeo, por ser el ángulo GDZ superior siempre al ABZ.

## 2) Hipótesis del epiciclo



Supuesta una deferente (ABGD) centrada en el ecuante E, de diámetro AEG, circunferencia directriz del epiciclo ZHΘK, el movimiento circular del centro A del epiciclo sobre la deferente excéntrica es uniforme y también el del planeta sobre el epiciclo, de modo que solo en las posiciones Z y Θ el planeta parecerá coincidir con A por alineación. Adoptado como referencia el ecuante, el desplazamiento del planeta interior sobre el arco ZH del epiciclo sería correlativo al desplazamiento por el arco AH de la deferente. A la luz de esta hipótesis, la velocidad en el apogeo puede ser máxima o mínima: si el curso del planeta desde dicho punto sobre un epiciclo retrógrado fuese asimismo retrógradativo, la velocidad en el apogeo sería máxima, por concordancia direccional de movimientos epicicloidales y planetario; mínima, en caso de movimientos no coherentes (planeta anterógrado sobre epiciclo retrógrado).

Las dos hipótesis convergen en una ecuación de doble anomalía, sentando las bases de una ley fundamental que adjudica a cada planeta un sistema de epiciclos y deferentes tal que longitud y latitud celestes de su punto móvil concuerden con las registradas para el planeta, cuyo brillo habrá de guardar cualitativa proporción inversa a la distancia planeta-Tierra en cualquier instante. Desglosada la ley, la longitud calculada del punto móvil del sistema de epiciclos-deferentes debe coincidir en todo momento con la longitud observada del planeta, y como la deferente rinde cuenta del movimiento medio del planeta sobre el fondo de estrellas fijas, el período de revolución del punto móvil sobre la deferente (centro del primer epiciclo) equivaldrá al período de revolución planetario (velocidad angular sobre el deferente igual a velocidad angular media del planeta – *Almagesto* IX, 3). Esta doble ley permite fijar la velocidad angular en todas las órbitas, pero no su longitud.

Dos leyes suplementarias relativas a planetas con retrogradaciones orbitales (el epiciclo es agregado a la deferente para justificar precisamente el movimiento retrógrado):

- 1) El período de revolución epicicloidales debe coincidir con el lapso temporal entre dos retrogradaciones

sucesivas (1 revolución epicicloidales por retrogradación)

- 2) En el medio de una retrogradación sobre la línea absidal (línea que une Tierra y punto excéntrico), la longitud del planeta será igual a la longitud del punto móvil sobre la deferente (centro de epiciclo) y del punto móvil del epiciclo. Ley útil para emplazar inicialmente los puntos móviles de las órbitas, ya que en ese instante se superponen al planeta observable.

La posición del punto excéntrico de la deferente y los radios orbitales no demandan para su determinación leyes especiales sino simples escolios de geometría euclídea, de hecho, los valores absolutos de los radios orbitales son superfluos, basta con su proporción.

Una serie de restricciones adicionales a la ley fundamental permiten discernir el carácter interior o exterior de un planeta. Para un planeta interior, el período de revolución del deferente planetario iguala al período de revolución medio solar (la limitada elongación del planeta interior implica que éste no podría superar en más de una vuelta al Sol, para pasarlo por una vuelta deberá recorrer todas las elongaciones). La relación es más compleja en el caso del planeta exterior: el período de revolución del epiciclo sumado al de la deferente de tal planeta equivale al período de revolución del deferente solar.

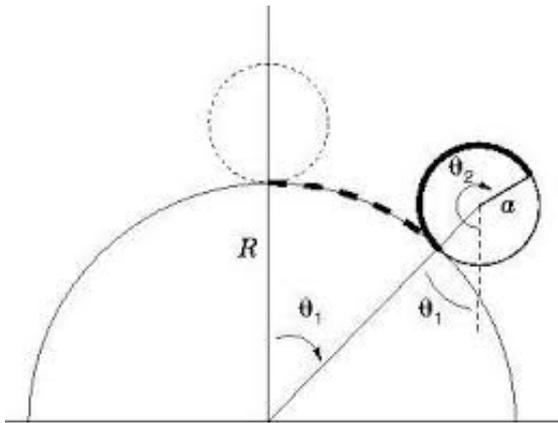
Si las proposiciones con cuantificadores existenciales de dominio potencialmente infinito han de ser *empíricamente irrefutables* por su íntima estructura lógica<sup>16</sup>, sin garantía por ella de verdad, la empírica irrefutabilidad de la ley fundamental establecida (no de la teoría planetaria) no estaría necesariamente vinculada a una incontrovertibilidad analítica. El desarrollo de Fourier asegura un sistema de epiciclos y deferentes para cualquier trayectoria, y a través de él, su empírica irrestricción o su verosimilitud en toda aplicación intencional de la teoría. Esa credencial matemática refrenda la intensa vocación positivista de la teoría planetaria ptolemaica bajo la seducción de una circularidad aforada en el horizonte epistémico-dianoico, a expensas del fenómeno, expuesto en su semblanza mimética a la incuria ontológica que solo podría revestir apariencia de verdad, o una desvaída verdad frente a la connotación aletéctica del idílico *noetón* o *dianoetón*.

La detección de un planeta retrogradante que no cumpliera la condición de exterioridad apenas invalidaría la aplicación de dicha condición a todo planeta con retrogradación e ilimitada elongación, única restricción recusable por análisis contrafáctico que no minaría la ambiciosa propuesta. Las relaciones entre los planetas retroactivos y el Sol compelen a la estipulación de una cláusula empírica de externalidad o internalidad (en el instante medio de una retrogradación, la elongación de un planeta interior es aproximadamente 0° y la de uno exterior 180°) que revoca el visado estrictamente positivista del patrón sistémico de epiciclos y deferentes. Las condiciones 1) y 2), junto a la clave de identificación en retrogradación, harán de la hipótesis planetaria ptolemaica una teoría empíricamente restringida en concierto con las leyes especiales establecidas.

<sup>16</sup> Carlos U. Moulines, "Forma y función de los principios guía en las teorías físicas", en *Exploraciones metacientíficas* (Madrid: Alianza, 1982), 88-107.

La astronomía medieval abraza la sintaxis del cielo aristotélico. Un movimiento circular uniforme de radio de giro  $r$  y velocidad angular  $\omega$  (constante), supuesta nula su fase inicial (con lo que:  $\theta = \omega t$ ), se regiría por las ecuaciones paramétricas:  $x(t) = r \cos \theta$ ,  $y(t) = r \sin \theta$

El epitrocoide es la curva de trayectoria de un punto radial de la circunferencia generatriz ( $r$ ) rodante sin deslizamiento sobre una circunferencia directriz ( $R$ ). La curva adjunta al punto de tangencia de la circunferencia generatriz es un tipo específico de epitrocoide denominado epicicloide.

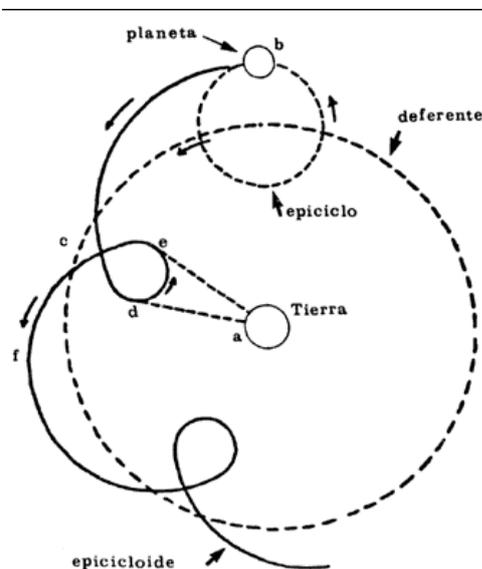


La ubicación del centro de la circunferencia generatriz (epiciclo) sobre la directriz (deferente) da lugar a un epicicloide con bucles internos a la deferente. Coordenadas paramétricas del doble movimiento circular:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = r_1 \cos(\omega_1 t) + r_2 \cos(\omega_2 t)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = r_1 \sin(\omega_1 t) + r_2 \sin(\omega_2 t)$$

El modelo de epiciclo con deferente homocéntrico (centrado en la Tierra) daría cuenta de retrogradaciones de amplitudes idénticas a intervalos temporales coincidentes (los bucles epicicloides, iguales entre sí, que surgen cuando la circunferencia generatriz pasa de ser tangente a ser secante a la circunferencia directriz, situado el centro de aquella en el contorno de esta, ofician mociones retrógradas), sin correspondencia con la observación terrestre de los movimientos planetarios



Anomalía corregida por Ptolomeo para la explicación del movimiento de los planetas en longitud con un ajuste excéntrico por introducción del ecuante (*punctus aequans*). El movimiento circular del centro del epiciclo ( $C_e$ ) respecto al centro de la deferente ( $C_d$ ) distinto de la Tierra ( $T$ ) será uniforme, no respecto a aquel punto ( $C_d$ ), sino respecto al ecuante ( $E$ ). Se daría así una alineación  $E-C_d$  en visual terrestre ( $E-C_d-T$ ) para los planetas exteriores.

La incorporación sucesiva de circunferencias según la pauta establecida (epiciclos directrices de ulteriores epiciclos generatrices) incrementa la complejidad de trazados. Ecuaciones paramétricas generalizadas con fase inicial no nula de los epiciclos ( $\Phi_n = 0$  compendia epiciclos desde una posición alineada inicial):

$$x_n(t) = \sum_1^N r_n \cos(\omega_n t + \Phi_n)$$

$$y_n(t) = \sum_1^N r_n \sin(\omega_n t + \Phi_n)$$

Formato complejo ( $i = \sqrt{-1}$ : unidad imaginaria) para una suma de movimientos circulares uniformes:

$$x_n(t) + i y_n(t) = \sum_1^N r_n [\cos(\omega_n t + \Phi_n) + i \sin(\omega_n t + \Phi_n)].$$

En coordenadas polares, un número complejo  $z$  adopta la forma exponencial:

$$z = a + bi = r e^{i\theta} \text{ (con: } r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{)} \text{ que permite}$$

compactar la ecuación anterior:

$$\sum_1^N r_n e^{i\theta_n} = r_n e^{i(\omega_n t + \Phi_n)}, \text{ y definido: } C_n = r_n e^{i\Phi_n}, \text{ la}$$

ecuación condensa en:  $\sum_1^N C_n e^{i\omega_n t}$ , facilitando el cálculo

de los complejos  $C_n$  que minimicen el error cuadrático

medio.

$$\text{Con } \omega_n = i \frac{2\pi n}{N}, \text{ la ecuación se asimila a la transformada de Fourier discreta, descomposición de la función}$$

periódica:  $z = f(t)$ , acotada y continua, asumida para

un planeta, en una serie de términos representativos de una órbita (epiciclo o deferente):  $\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\omega_n t}$ . Son

precisos infinitos términos para que la suma de epiciclos y deferentes resuelva perfectamente la trayectoria planetaria, pero la serie de Fourier predice un conjunto finito de epiciclos que se aproximen a la trayectoria real en la forma requerida.

La representación del sistema de epiciclos y deferentes mediante series de Fourier impone tres restricciones que Ptolomeo no habría de respetar:

- Velocidades angulares en relación armónica (múltiplos enteros de una frecuencia angular fundamental)
- Coeficientes de la serie, estimativos de los radios epicicloides, dados por la integral:  $C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i\omega_n t} dt$
- Excéntricas y ecuantes no permitidos.

Limitaciones no invalidantes, únicamente testimoniales de la mayor libertad procedimental del astrónomo alejandrino. La posibilidad de desarrollo en serie de Fourier del sistema de epiciclos y deferentes habilita la aplicación intencional de la teoría planetaria ptolemaica, redundando en su irrefutabilidad empírica, a riesgo de incurrir en falacia *ad ignorantiam*.

Las leyes establecidas en *Almagesto* IX, 3 determinan unívocamente los valores paramétricos correspondientes a las dos primeras órbitas sobre criterios ajenos a los que guían las series de Fourier. La velocidad angular de la segunda órbita es el doble que la de la primera, definidos los radios por la expresión integral de  $C_n$  que no avala la razón entre ellos prevista por Ptolomeo. Solo la condición explícita en la ley basal se pliega al criterio de Fourier si se identifica a la deferente con el término fundamental de la serie (el período de ese término concuerda con el período de repetición de la función).

Es relativamente sencillo probar que una trayectoria cualquiera y un arbitrario conjunto finito de órbitas circulares uniformes de valores determinados están subrogados a un sistema de deferentes y epiciclos que incluya todas las órbitas, cuyo orden de encadenamiento (por tratarse de una suma vectorial) es alterable sin afectar al valor final de longitud del planeta. Aunque las leyes subsidiarias solo exijan un par de órbitas, la teoría planetaria debe estar abierta a la incorporación de tantos epiciclos como fuesen necesarios hasta el ajuste óptimo de la órbita en caso de insuficiencia de las dos primeras, y esa apertura se transluce en la introducción de la pequeña circunferencia de giro del punto excéntrico de la deferente para la Luna y Mercurio.

Así es, dada una trayectoria ( $a$ ), existe un conjunto arbitrario de radios ( $R$ ) y frecuencias (órbitas:  $A$ ) incluidos en el sistema de epiciclos y deferentes solidarios a  $a$ , obtenidos por series de Fourier: 
$$a(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_{a_n} e^{i n \omega_{a_0} t}.$$

El conjunto de radios y frecuencias para una segunda trayectoria imaginaria  $c(t)$  coincidente con  $a$ , excluido el conjunto de órbitas  $D$ , sería  $A - D$ : 
$$c(t) = a(t) - \sum_{n=1}^{n=N_0} D_n e^{i \omega_n t},$$
 con lo que:

$$a(t) = c(t) + \sum_{n=1}^{n=N_0} D_n e^{i \omega_n t}.$$

Será  $a(t)$  entonces un sistema de epiciclos y deferentes que comprenda la serie de Fourier correspondiente a  $c(t)$  más el conjunto de órbitas  $D$ :

$$a(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_{c_n} e^{i \omega_{c_n} t} + \sum_{n=1}^{n=N_0} D_n e^{i \omega_n t}$$

Queda así probada la pertinencia de la asignación de un sistema de epiciclos y deferente a determinada órbita  $a(t)$  que contenga un número finito arbitrario de órbitas  $D$ .

Como afirma Norwood R. Hanson, “no existe una curva bilateral simétrica ni exógenamente periódica utilizada en ninguna rama de la astrofísica o de la astronomía observacional que no pueda trazarse fácil-

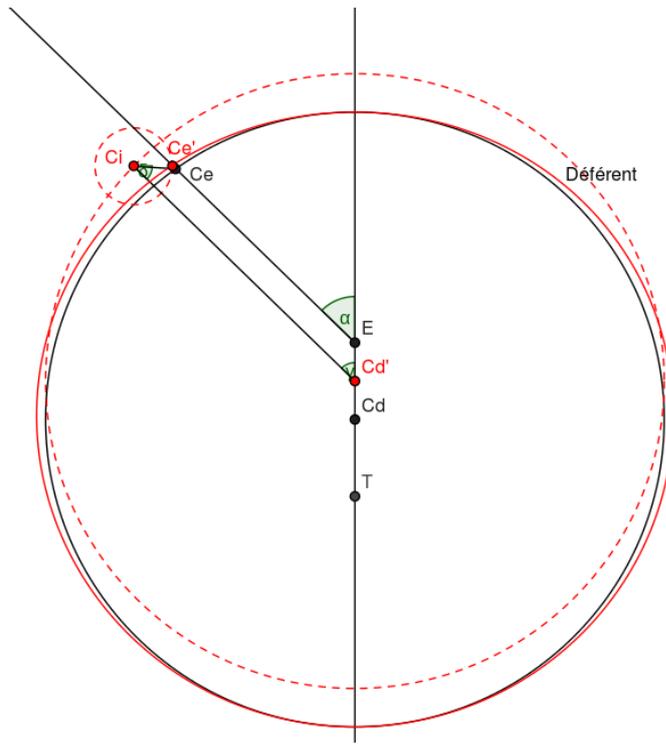
mente como el movimiento resultante de un punto que gira dentro de una constelación de epiciclos, finitos en número, que giran alrededor de un punto fijo deferente”. La representación de los epiciclos mediante series de Fourier complejas permite manejar una infinidad de ellos (Ptolomeo llegó a utilizar 80 frente a los 34 que Copérnico emplea en *De revolutionibus*) complicando de tal modo la explicación de los movimientos planetarios que Alfonso X de Castilla (las *Tablas alfonsinas* tienen como base el sistema ptolemaico) llegaría a ironizar sobre el hecho de no haber sido convocado en calidad de consejero en el momento de la creación<sup>17</sup>.

## 5. La larga travesía del *punctus aequans* a la focal elíptica vacía

La ecuación del argumento (*prostaphairesis*) salda el valor del ángulo definido por las líneas  $TC_e$  y  $TP$  (siendo  $P$  un punto móvil del epiciclo) a partir de los ángulos determinados por los ejes ( $TC_dE$ ,  $EC_e$ ) y ( $EC_e$ , radio epiciclo) y la longitud de un planeta concreto (Saturno) en cualquier instante:  $c_m(t) = c_m(t_0) + w_c dt$  y  $a_m(t) = a_m(t_0) + w_a dt$ .

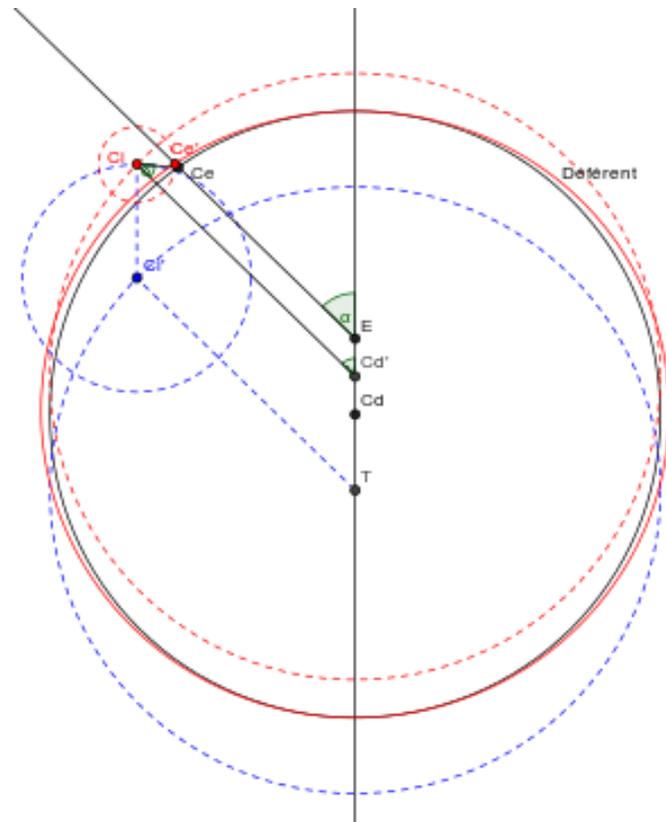
La irrupción del ecuante, punto en directa oposición a la Tierra desde el centro de la deferente intersectado por uno de los radios de un ángulo  $\alpha(t)$  de vértice en  $C_d$  (tendido el otro radio al planeta) tal que:  $\alpha(t) = wt - \text{arc sen} \left( \frac{a_{eq}}{r_{def}} \text{sen } wt \right)$  [ $w = cte$  respecto a  $E$ , situado a distancia  $d_{eq}$ , con deferente de radio  $r$ ], implantaba un movimiento circular no uniforme respecto a su propio centro, violación de la física aristotélica que fomentaría diversos ensayos de supresión del punto conflictivo en la Escuela de Maragha. Destacable la propuesta del astrónomo Mu'ayyid-al-Din-al-'Urdi de sustitución del centro del epiciclo ( $C_e$ ) por otro ( $C_e'$ ) que girase con velocidad angular invariable sobre un círculo de radio igual a la semidistancia  $T-C_d$  centrado en  $C_i$ , punto este que, a su vez, lo haría con la misma velocidad angular que  $C_e$  respecto al ecuante sobre un círculo del mismo radio que la deferente ptolemaica centrada en  $C_d$ , punto medio entre centro no terrestre de deferente ( $C_d$ ) y ecuante ( $E$ ). El modelo subsidia la alineación  $E-C_e-C_e'$  para el observador terrestre.

<sup>17</sup> Philipp Nothaft denomina “Era Alfonsina” al período 1320-1550 por el influjo de las tablas y catálogo astronómicos del rey castellano que atendiera al método de “trepidación” (precesión) de los equinoccios ideado por Azarquiel dos siglos antes. Cf. Philippe E. Nothaft, “Critical Analysis of The Alfonsine Tables in the Fourteenth Century: The Parisian Expositio Tabularum Alfonsii of 1347”. *Journal for the History of Astronomy* 46 (1): 76-99.



El modelo anterior fue reformado por Ibn al-Shâtîr en la obra *Al-Zij al-jadid* con la implementación de dos desplazamientos angulares modularmente coherentes de  $C_i$ , ya no sobre una excéntrica, sino sobre un círculo del mismo radio que el deferente ptolemaico centrado

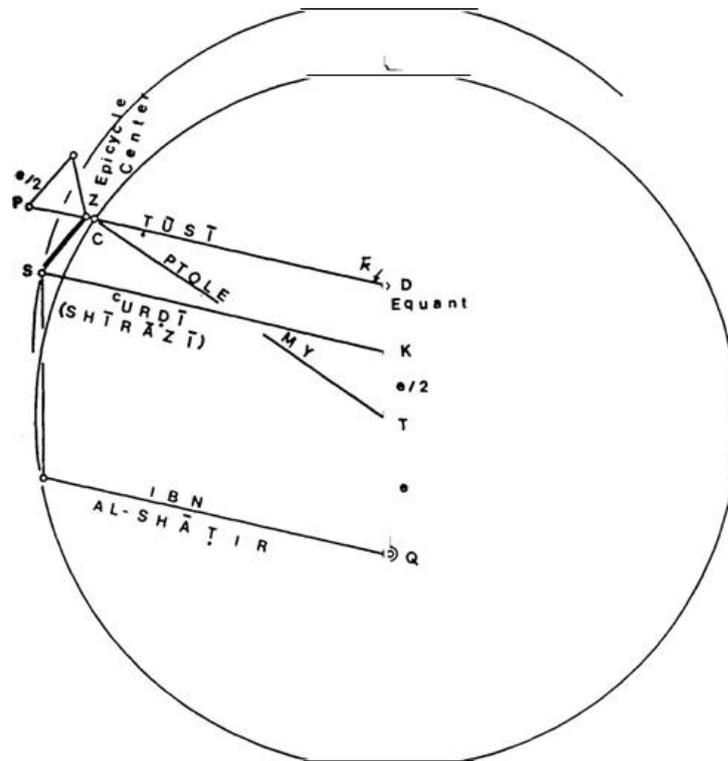
en T y, con la misma velocidad angular pero sentido contrario, sobre una circunferencia de radio 1,5 veces la distancia T- $C_d$  centrada en  $C_i'$ , combinación de tres círculos que retendrá Copérnico para planetas exteriores<sup>18</sup>.



<sup>18</sup> Edward S. Kennedy and Victor Roberts, "The Planetary Theory of Ibn al-Shatîr". *Isis* 50 (1959): 227-235; Fuad Abbud, "The Planetary Theory of Ibn al-Shatîr: Reduction of the Geometric Models to Numerical Tables". *Isis* 53 (1962): 492-499.

Edward S. Kennedy brinda una imagen conjunta de los modelos sugeridos por Abu 'Ubayd al-Júzjâni e Ibn al-Haytham, sobrepuestos al de Ptolomeo (el centro Z

del epiciclo describe un movimiento circular uniforme en torno al ecuante en ellos)<sup>19</sup>.



La matizable comunión de resultados expuestos en *De revolutionibus* y laboriosas combinaciones de movimientos dirimidas en la Escuela de Maragha es sorprendente (el patrón lunar de al-Shâtir es básicamente idéntico al de Copérnico<sup>20</sup>), aun en su dispar trasfondo. Los modelos superpuestos predicen la misma posición para el planeta P. La división de la excentricidad ptolemaica ( $e = DT = TQ$ ) en el punto K, propuesta por al-'Urdî, artífice también del vector  $\overline{KS}$  en la figura antecedente, anticipándose a Qutb al-Dîn al-Shîrâzî, sería empleada por el canónigo de Warmia como vector  $\overline{NP}$ . El astrónomo polaco hace uso de corolarios matemáticos de la Escuela, “par de al-Tusî”<sup>21</sup> o “lema de al-'Urdî”, extensión

del teorema de Apolonio<sup>22</sup> que permitiera reemplazar el ecuante en su función rectificante por un equivalente epiciclo móvil sobre una deferente centrada en el punto medio de la distancia a aquel. Correlato de radiales: TZ (Ptolomeo), KN (al-'Urdî), QH (al-Shâtir) y QSH' (Copérnico):

Nasir al-Dîn al-Tusî plantearía en su obra *Tahrîr al-majisti* (1247) una solución al movimiento latitudinal de los planetas inferiores prescindiendo de la componente longitudinal (suspensión de efecto compensatorio) que abolía el ecuante. El acoplamiento de al-Tusî conjuga dos círculos coplanarios de interna tangencia resoluble en la forma algebraica:  $\frac{1}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = i \operatorname{sen} \theta$ . Se trata de una curva rodante en la que la rotación del círculo interior no es deslizando cuando su punto de tangencia se mueve sobre el círculo externo fijo (los puntos del círculo interno que no están sobre la circunferencia exterior trazan elipses; los engranajes hipocicloidales son heterogé-

<sup>19</sup> Edward S. Kennedy, “Later Medieval Planetary Theory”. *Isis* 57 (1966): 365-378.

<sup>20</sup> Victor Roberts, “The Solar and Lunar Theory of Ibn al-Shatir: A Pre-Copernican Copernican Model”. *Isis* 48, no. 4 (1957): 428-432.

<sup>21</sup> El astrónomo y matemático iraní Nasir al-Dîn al-Tusî, partidario de la teoría avicénica de las proposiciones absolutas, enunció en su plena forma la ley plana de los senos (atribuida indistintamente a Abu al-Wafa' Buzjani y Abu Nasr Mansur), así como el teorema de la tangente, relaciones entre lados del triángulo y senos o tangentes de

ángulos opuestos:  $\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} \dots, \frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha-\beta}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha+\beta}{2} \right)}$ . En el triángulo

esférico (tres puntos de la superficie esférica A, B, y C unidos por arcos de círculo máximo inferiores a 180°), los lados del polígono se refieren como ángulos convencionales de vértice en el centro de la esfera, sustituidas sus longitudes en la ley plana establecida por los

senos de dichos ángulos ( $\frac{\operatorname{sen} \overline{AB}}{\operatorname{sen} (\widehat{AC}, \widehat{BC})} = \frac{\operatorname{sen} \overline{AC}}{\operatorname{sen} (\widehat{AB}, \widehat{BC})} = \frac{\operatorname{sen} \overline{BC}}{\operatorname{sen} (\widehat{AC}, \widehat{AB})}$ ). La

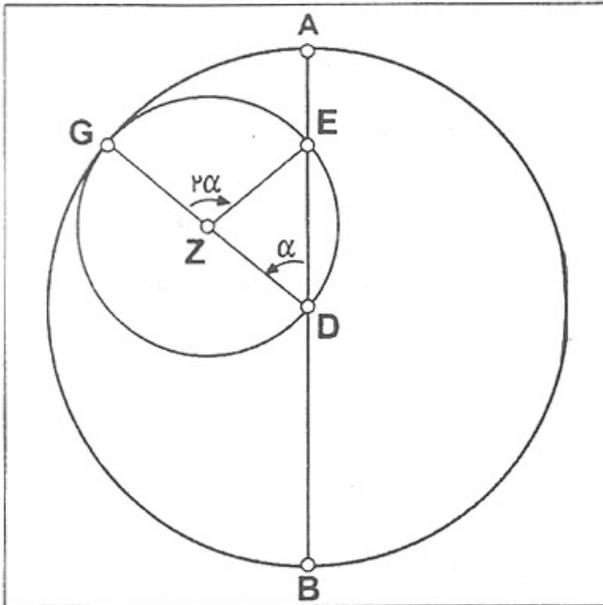
*Ética Nasireana (Akhlak-i-Nasri)* es una réplica islámica a la *Ética*

*Nicomáquea* de gran impacto en la teología chiita. Cf. Jacques Sesiano, “Islamic Mathematics”, en *Mathematics Across Cultures: The History of Non Western Mathematics*, ed. Helaine Selin & Ubiratan D'Ambrosio (Dordrecht: Springer, 2000), 137-157; Glen Van Brummelen, *The Mathematics of the Heavens and the Earth. The Early History of Trigonometry* (Princeton: Princeton University Press, 2009), 259ss.

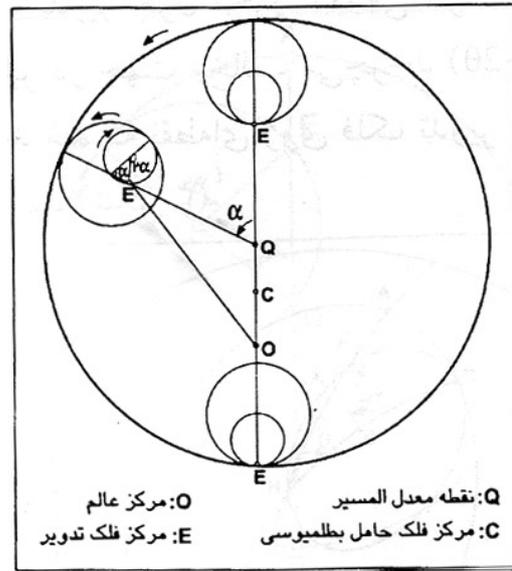
<sup>22</sup> Relación de la longitud de la mediana de un triángulo con la de sus lados: la suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera de un triángulo indeterminado iguala a la mitad del cuadrado del tercer lado más el doble del cuadrado de su correspondiente mediana:  $a^2 + b^2 = 1/2 c^2 + 2M^2$ . Caso particular del teorema de Stewart que relaciona la longitud de los lados de un triángulo y la de su transversal angular.

neas versiones del par)<sup>23</sup>. Dispositivo matemático de conversión de movimientos circulares en lineales alternativos que Al-Tusî describe así:

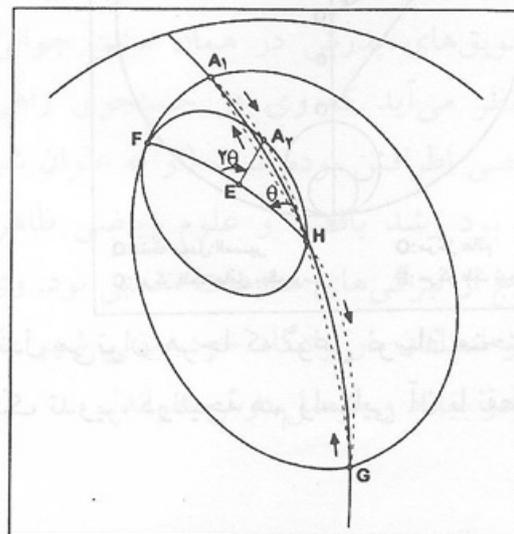
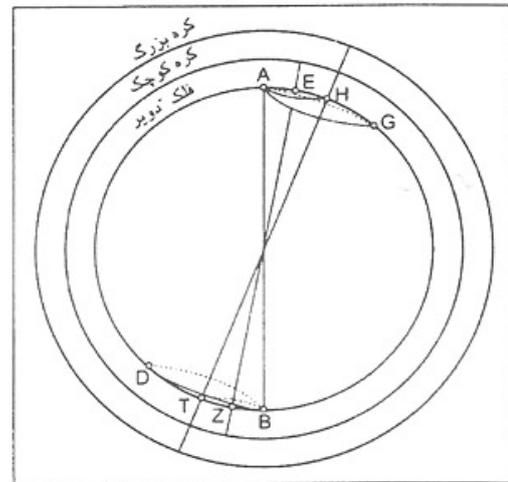
Si dos círculos coplanares, el diámetro de uno de los cuales sea igual a la mitad del diámetro del otro, se toman internamente tangentes en un punto, y si se toma un punto en el círculo más pequeño, y se deja en el punto de tangencia, y si los dos círculos se mueven con movimientos simples en dirección opuesta de tal manera que el movimiento del círculo menor sea el doble que el del mayor, de modo que el más pequeño complete dos rotaciones por cada rotación del más grande, entonces ese punto se verá moverse en el diámetro del círculo más grande que inicialmente pasa por el punto de tangencia, oscilando entre los extremos<sup>24</sup>.



شکل ۱



En el modelo de tres esferas concéntricas, el giro de la mayor sobre el eje HT con cierta velocidad angular arrastra a la circunscrita de eje EZ. La esfera ajustable giraría en sentido opuesto con el doble de velocidad angular. La conjunción de los tres movimientos fuerza a la oscilación a un punto de la esfera celeste entre los extremos del arco AG.



<sup>23</sup> La fórmula de Euler de interconversión de formas exponencial y trigonométrica de un número complejo ( $e^{i\theta} = \cos \theta + i \text{sen } \theta$ ) tendría como precedente la relación entre funciones trigonométrica y logarítmica establecida por Roger Cotes en su póstuma *Harmonia mensurarum* (1722):  $ix = \ln(\cos x + i \text{sen } x)$ . Leonard Euler emplearía la forma exponencial en *Introductio in analysin infinitorum* (1748). Ecuaciones paramétricas del hipocicloide generado por el punto de una circunferencia de radio  $r'$  que rota en

el interior de otra de radio  $r$ : 
$$\begin{cases} x = (r - r') \cos (r, \widehat{OX}) + r' \text{sen } \alpha \\ y = (r - r') \text{sen} (r, \widehat{OX}) - r' \cos \alpha \end{cases}$$

( $\alpha$ : ángulo definido por la línea imaginaria de proyección del centro de la circunferencia rodante sobre OX).

<sup>24</sup> F Jamil Ragep, "Nasir al-Din al-Tusi's 'Memoir on Astronomy' (*al-Tadhkira fi cilm al-hay'a*)", en *Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences*, 12 (Berlin-New York: Springer, 1993), 194-196.

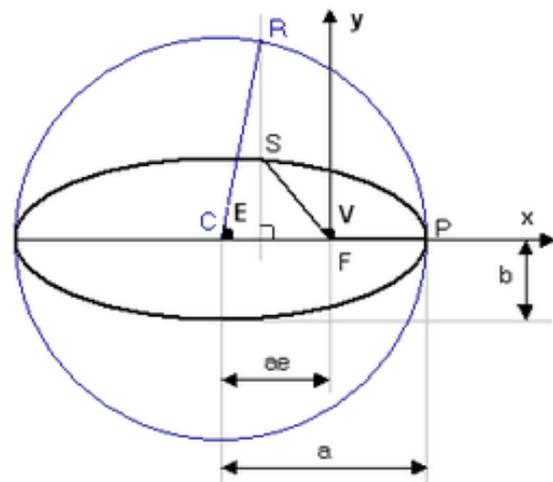
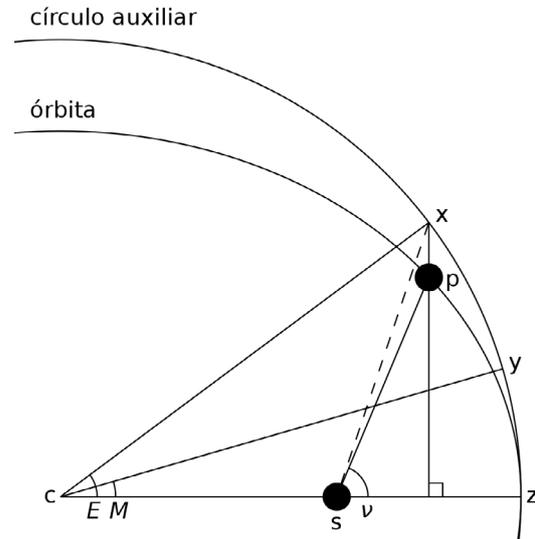
Nicole Oresme estudió la asimilación de movimientos circulares a un recíproco lineal para un planeta a lo largo de su epiciclo y Copérnico se valdría del artificio matemático en el plan de ocho esferas celestes con movimientos circulares uniformes (salvo estrellas fijas) alrededor del Sol que detonaría el *arbor scientiarum* medieval, sirva la filosofía de la teología (*philosophia ancilla theologiae*), ajeno a la querrela fideísta, sin deponer la mirada sobrenatural.

La excentricidad puntual (*punctus aequans*) de la deferente planetaria es petición positivista de excentricidad orbital, solapada demanda de « $e \neq 0$ » para la propia cónica (grado de desviación de una sección cónica respecto a la circularidad)<sup>25</sup>, como si el ecuante y la Tierra, los dos puntos excéntricos de la deferente, la polarizaran, deformándola, dotándola de  $0 < e < 1$ . Ecuante y Tierra pasarían a ocupar los focos de la elíptica en que se convertirá la deferente excéntrica<sup>26</sup>.

Contribuye también a la idea de que el ecuante vendrá en el foco vacío de la futura elíptica la condición de invarianza de velocidad angular del centro del epiciclo respecto a él. Sobre una elipse, la velocidad angular planetaria no es constante, lo sería la velocidad areolar (área instantánea barrida por el radiovector foco-planeta). La conservación modular del momento angular referido a un foco bajo la acción de una fuerza central ( $\frac{k}{r^2}$ , de rotacional nulo, en la dirección de más rápida variación de potencial gravitatorio –normal a superficies equipotenciales– y sentido opuesto al gradiente:  $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_g$ ) estabiliza la velocidad areolar del cuerpo móvil ( $\frac{|L|}{2m} = \frac{dA}{dt}$ ), no la angular.

En un experimento mental que remontase a la ley kepleriana de las áreas en su formulación geométrica:  $M = E - e \text{ sen } E$  ( $M$  y  $E$  cifran las *anomalías media* y *excéntrica*:  $E$  sería el ángulo subtendido desde el centro de la elíptica por la proyección de la posición instantánea del

planeta que la describa sobre una circunferencia auxiliar cuyo diámetro coincidiese con el eje mayor de la elipse respecto a este último;  $M$ , el ángulo ideal que formaría con el eje de la elipse el radio de giro de un planeta ficticio dotado de MCU sobre la circunferencia principal. La *anomalía verdadera*  $v$ , según se aprecia en la figura aneja, comprometería al ángulo determinado por las líneas foco-planeta y foco-*periapsis*, punto en el que  $v = 0^\circ$ ) se constata que para  $E = M$ , la excentricidad sería nula (circunferencia), correspondiendo  $Cd$  al centro de la elipse.



La inferencia de la ley formalizada<sup>27</sup> afronta la relación inter-areolar:

<sup>25</sup> Definición unificada de cónica propuesta por el matemático Jan de Witt en *Elementa curvarum linearum. Edita opera Francisci à Schootem* (Francofurti: Apud Johannem Fridericum Knoch, 1695): lugar geométrico de los puntos del plano tales que la razón de sus distancias a uno fijo, denominado foco, y a una directriz prefijada es constante. Tal constante es la excentricidad ( $e$ ) de la cónica. Una cónica sería el conjunto de puntos ( $P$ ) de  $R^2$  cuya distancia al foco es « $e$ » veces su distancia a la directriz:  $d(P, F) = e \cdot d(P, dtz)$ . Los puntos de la cónica satisfacen la ecuación cuadrática:  $Bx^2 + Cy^2 + Dxy + Fx + Gy + H = 0$ , esto, es, verifican la

ecuación matricial:  $(1 \ x \ y) \begin{pmatrix} H & \frac{F}{2} & \frac{G}{2} \\ \frac{F}{2} & B & \frac{D}{2} \\ \frac{G}{2} & \frac{D}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$ . La curva

es descrita, pues, por una matriz simétrica:  $A = (a_{ij})_{i=0, j=0}^{2,2}$ .

<sup>26</sup> James Evans redescubre la introducción del ecuante mostrando que la variación de amplitud de los bucles de retrogradación de Marte y la fluctuación de lapsos temporales para los mismos inducen excéntricas incompatibles, solo conciliables en virtud de ese punto. Cf. James Evans, “Fonction et origine probable du point équant de Ptolémée”. *Revue d’histoire des sciences* 37 (1984): 193-213.

<sup>27</sup> Método iterativo de aproximación: despreciada la ínfima excentricidad ( $e$ ), sobre la estimación inicial  $E_0 = M$ , la ecuación de Kepler rendirá sucesivos valores:  $E_i = M + e \text{ sen } E_{i-1}$ , repetido el proceso las veces necesarias hasta ajustar la diferencia de  $E_i$  y  $E_{i-1}$  a un error prefijado. Método gráfico de resolución de la ecuación: aislado un ciclo de la gráfica  $\text{sen } M / M$  para un planeta de año sidéreo y  $n$  conocidos, puede trazarse una recta de inclinación sobre  $OX$ :  $\text{ctg } \alpha = e$ , entre dos puntos  $P$  y  $Q$  ( $M = OP$ ), cumpliéndose:  $PQ = e \text{ sen } E$ , con lo que:  $OQ = OP + PQ = M + e \text{ sen } E$  (aplicada a Marte,  $T = 686,98$  días,  $e = 0,0934$ , la anomalía media sería:  $41,9226^\circ$ , y la excéntrica:  $49,8^\circ$ , con un error absoluto ligeramente superior a los  $4^\circ$ ). Johannes Kepler, “LX. Methodus ex hac Physica, hoc est genuina & verissima hypothesi extruendi utramque partem aequationis, & distantias genuinas: quorum utrumque simul per vicariam fieri hactenus non potuit argumentum falsae hypotheseos”,

$PFR = PCR - FCR = \frac{a}{b} PFS = \pi a^2 \frac{t}{T_{orb}}$ , puesto que el planeta cubre en el período orbital ( $T_{orb}$ ) el área  $\pi ab$ , con lo que:  $PFS = \pi ab \frac{t}{T_{orb}}$ . Como:  $PCR = \frac{a^2}{2} E$  (sector circular de ángulo central  $E$ ) y  $FCR = \frac{a^2}{2} e \text{ sen } E$  (triángulo de base la semidistancia focal:  $\overline{FC} = ae$ , y altura:  $a \text{ sen } E$ ), entonces:  $PFR = \frac{a^2}{2} (E - e \text{ sen } E)$ . Dividida la expresión por  $\frac{a^2}{2} : \frac{2\pi}{T_{orb}} t = E - e \text{ sen } E$ , y dado que  $\frac{2\pi}{T_{orb}} = n$  es el movimiento medio, la anomalía media será:  $M = nt = E - e \text{ sen } E$ , en analogía al movimiento circular uniforme:  $\theta(t) = \frac{2\pi}{T_{orb}} t$ .

Desde un enfoque gravitacional, la solución del ecuante es una aberración encaminada a salvar a ultranza la circularidad dianoica platónica en el orden supralunar. La fuerza centrípeta responsable de una órbita circular estable en referencia inercial<sup>28</sup> comporta una fuerza central de interacción entre la masa orbitante y una masa centrada en la deferente, de ahí la directriz radial de la fuerza normal. El vacío másico central del plan excéntrico no sufraga un movimiento circular uniforme sobre la deferente, la fuerza centrípeta ni siquiera tendría la dirección del radiovector planeta-ecuante.

La circularidad perfecta es una utopía del *kósmos noetós* platónico, un *dianoetón* o idea dianoética, la naturaleza rehúye el homocentrismo y la eurtimia distal (el

en *Astronomia Nova Aitiologētos, seu Physica Coelestis, tradita commentariis De Motibus Stellae Martis, Ex observationibus G. V. Tychoonis Brahe*. Jussu & Sumptibus Rudolphi II, Praga, 1609, 299-300; *Epitome astronomiae Copernicanae usitata formā Quaestionum & Responsum conscripta, inq; VII. Libros digesta, quorum tres hi priores sunt de Doctrina Sphaerica*, Francofurti, Sumptibus Godofridi Tampachij, 1621, 695-696.

<sup>28</sup> La fuerza centrípeta es resultante de las fuerzas externas concurrentes en un SRI, con una fuerza más a considerar en ese balance dinámico:  $\vec{F}_{cp} = \sum_{SRI} \vec{F}_{ext}$ . La referencia no inercial demanda una fuerza ficticia compensatoria del balance inercial, la pseudofuerza de D'Alambert es término netamente matemático correctivo en un SRNI ( $\sum_{SRI} \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{inercia} = \vec{0}$ ) de papel estelar en Relatividad General (interacción gravitatoria: efecto de la deformación espaciotemporal por presencia de masa, interconvertible con la energía, distorsión que impugna el carácter inercial de las referencias). Además de la aceleración relativa (referencia móvil), contribuyen a la aceleración absoluta el arrastre de traslación, el de rotación [componentes tangencial:  $\frac{d\vec{w}}{dt} \wedge \vec{r}$ , vigente en rotación no uniforme, y normal:  $\vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r})$ ] y una aceleración complementaria que cuantifica parcialmente la inercia:  $-2 \vec{w} \wedge \vec{v}_{rel}$ . Así, la fuerza efectiva sobre la partícula móvil ponderada por el observador no inercial sería suma de fuerzas reales más la fuerza ficticia inercial de arrastre:

$$\vec{F}_{rel} = \vec{F}_{abs} - m [\vec{a}_0 - \frac{d\vec{w}}{dt} \wedge \vec{r} - \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r}) - 2 \vec{w} \wedge \vec{v}_{rel}] = \vec{F}_{abs} + \vec{F}_{inercia}$$

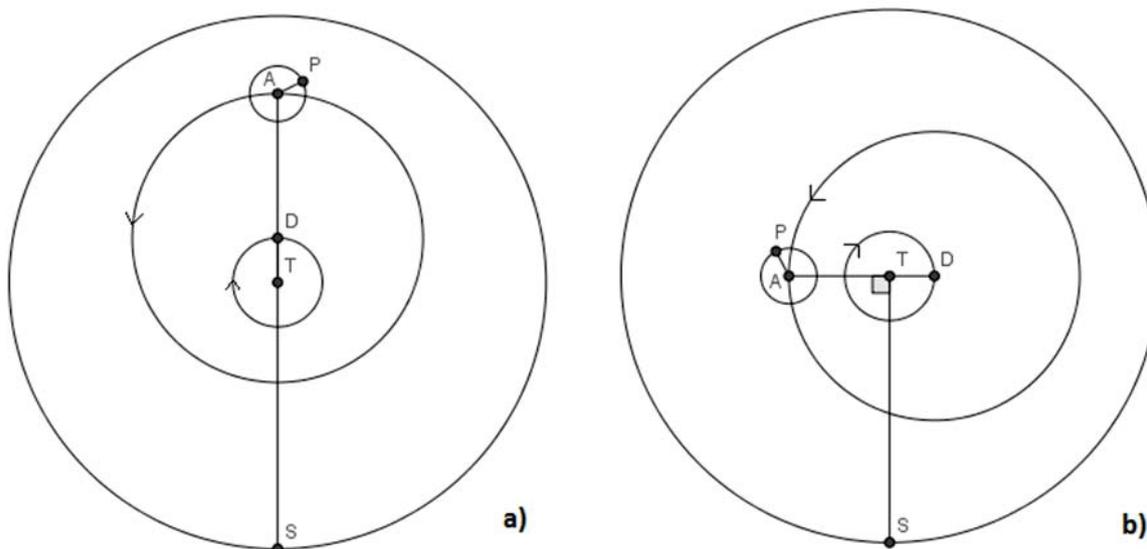
La simple operación algebraica de traslación de miembro de los términos del arrastre al delegar el balance en el observador no inercial les confiere falsa categoría de fuerzas (fuerzas de inercia de Euler, centrífuga y de Coriolis), cuando, en rigor, no representan interacción física alguna, estricta consecuencia de la propia traslación y rotación del SRNI.

propio globo ocular humano es excéntrico, distancias variables de los diferentes puntos de la retina a la fovea, depresión avascular interna de mayor poder de resolución, y subsecuentes a esa geometría ovoidal, defectos de convergencia o patológicas ametropías: solo una visión –*lógos* excéntrico podría desvelar las claves fenomenológicas de la realidad sensible, perspectiva auténticamente epistémica, no fatídicamente idealizadora –la *epistème* platónica aboca a esa idealidad asidua en la ciencia del orbe supralunar, no tanto en la física–. La tenaz persistencia en la circularidad testimonia el dramático pulso del *noús* con una realidad no dócilmente mimética que se sustrae a la arquetípica inteligibilidad de los *noetones*; una denodada apuesta por eflujos matemáticos que encubren la íntima adhesión de la ciencia, en consonancia con la *epistème* del símil de la línea, al friso inferior del horizonte eidético a través del mundo supralunar, más afín al dominio uránico de las ideas que el sublunar. Maniobras dianoicas enmascaran la secreta vocación de idealidad ante el desafío de las irregularidades y la falta de simetría del orden sublunar para preservar la enigmática arquitectónica del *kósmos noetós*, vulnerable en el lienzo etéreo, la serena y refinada armonía del *eídos* frente a la burda prosa del *aisthetón* en el turbio régimen hilemórfico terrestre. Las tentativas de eliminación del ecuante resultarían bellos y estériles ejercicios de penumbra al amparo de una vestigial idealidad implosiva, se trataba de uno de los focos que sustentaran el curso real de los astros, lejos de la ilusión circular.

El patrón ptolemaico de longitudes lunares es capítulo primordial del *Almagesto*, clara ilustración de una epistemología positivista, más atenta a la ideal predicción de posiciones de cuerpos celestes que a una descripción fenomenológica del cosmos, sin el olvido completo de esa conexión en el cálculo de distancias lunares a partir de medidas de paralaje en cuadratura. El modelo lunar de deferente homocéntrica permite obtener con éxito la longitud media para el satélite cuando el centro de su epiciclo se halle en una sicigia (radiovector superpuesto al solar –plenilunio–) o en una cuadratura (radiovector en ángulo recto con el solar medio).

La excentricidad del deferente lunar ( $C_{dl}$ ) en un segundo modelo solo afectará a la distancia del centro del epiciclo lunar (A) a la Tierra (en el alineamiento A- $C_{dl}$ -T, el centro del epiciclo se encontraría a la máxima distancia posible de T –lunas llena y nueva–; por el contrario, en el alineamiento A-T- $C_{dl}$  esa distancia se minimiza –cuartos menguante y creciente–), mas no a su centro de rotación uniforme (T tanto en el modelo de deferente homocéntrico como en el excéntrico, aunque en este T no sea el centro geométrico de la deferente). Ignorada la latitud lunar (inclinación de deferente lunar sobre el plano de la elíptica), la velocidad del centro de la deferente excéntrica

debe igualar a la diferencia entre el doble de la velocidad de elongación y la velocidad de longitud (velocidad del epiciclo sobre el deferente) medias:  $v(C_{dl}) = 2 \langle v_{El} \rangle - \langle v_{Ep} \rangle$ .



La latitud de la luna, no obstante, varía en el decurso temporal, realizando un movimiento inclinado sobre el plano de la elíptica (deferente y epiciclo lunares comparten plano escorado respecto al de la deferente solar) con impacto decisivo en la distancia angular recorrida por el centro del epiciclo (A) sobre el deferente que la hará diferir de la variación longitudinal de dicho punto. Las latitudes máxima y mínima de la luna no se dan siempre en la misma longitud.

Leemos en el libro V de *Almagesto*:

En todo lo concerniente a los fenómenos en la posición de sicigia y cuadratura de la Luna, la discusión precedente prodiga una explicación completa de la hipótesis que elucida los círculos de la Luna descritos arriba. Pero a partir de observaciones individuales tomadas en las distancias de la Luna [respecto del Sol] cuando se presenta en forma de hoz o gibosa (lo que ocurre cuando el epiciclo se encuentra entre el apogeo y el perigeo de la excéntrica), advertimos que la Luna tiene una característica peculiar asociada a la dirección [*prósneusis*] hacia la cual el epiciclo apunta<sup>29</sup>.

Apogeo y epigeo en el epiciclo lunar son definidos por el punto de observación terrestre, y en relación a ellos se vislumbra un ángulo de anomalía para cuya estimación, en el paroxismo del delirio positivista, ha de postularse un ideal *apogeo medio*.

En la época de Ptolomeo, ni el Sol ni ningún planeta, interior o exterior, presentaba paralaje observable, solo la Luna por su cercanía a la Tierra. En la obra *Hipótesis Planetarias*, el astrónomo de Ptolemaida Hermia propone un ingenioso método para el cálculo de las distancias planetarias relativas siempre a una deferente. Establecida por el sistema de epiciclos y deferentes la razón entre radios de deferente y epiciclo y la proporción entre estos y la excéntrica, en general, la distancia máxima que puede alcanzar un planeta convendrá con la suma de los tres valores y la mínima con el resultado de restar a la deferente la suma de los otros dos. Considerada una deferente para Venus de 60 partes (60<sup>p</sup>), el radio del epiciclo es 43,10<sup>p</sup> y el de la excéntrica 1,15<sup>p</sup>; la distancia

máxima que podría alcanzar Venus sería:  $60^p + 43,10^p + 1,15^p$ , y la mínima:  $60^p - (43,10^p + 1,15^p)$ . La proporción entre ambas distancias expresa el “grosor” de la órbita, y será, por consiguiente:  $104,25 / 15,35$ .

El *horror vacui* o la radical abominación del vacío y la convicción de que la naturaleza no obra a saltos suscita la presunción de paridad de la distancia máxima de cada planeta y la mínima del planeta inmediato superior, de manera que, al disponer de una distancia máxima absoluta, la de la Luna, se tendría la distancia mínima absoluta de Mercurio, la máxima para el planeta se obtendría multiplicando la mínima ya dilucidada por la proporción entre la máxima y la mínima, concordante, a su vez, con la mínima de Venus, y así sucesivamente. Tales relaciones no gravan restricción alguna al sistema ptolemaico puesto que las distancias absolutas no juegan ningún papel en el cálculo de las longitudes de los planetas, para el que es suficiente con las relativas. No tan lejos ya la frontera entre vacíos ontológico (drástica ausencia de ser, incluso de espacio-tiempo por su fenoménico sesgo relativista) y cosmológico (ausencia de materia. En física contemporánea, el espacio-tiempo de Minkovski<sup>30</sup>, no la “horizontalidad vacía” sin la sombra fantasmal del leviatán que atormentara a Ahab reptando por la superficie del océano), subrepticia en la idea de acción a distancia que despunta en mecánica pre-newtoniana.

Más allá de controversias sobre el carácter fenoménico local de la gravedad que dictase una perfecta esfericidad a la materia, más allá de polémicas sobre la explicación unificada que aboga por la simplicidad y la armo-

<sup>29</sup> Ptolomeo, *Almagesto* V, 5.

<sup>30</sup> Variedad lorentziana cuatridimensional de nula curvatura; marco fenoménico en relatividad especial de forma matricial explícita con elementos diagonales (-1, 1, 1, 1) y resto nulos cuyo grupo de simetría sería el de Poincaré, con grupo de traslaciones isomorfo a  $R^4$  que admite tratamiento pseudo-euclídeo:  $\hat{X}(ict, x, y, z)$ . En él, cualquier línea recta constituye una geodésica por anulación del tensor de curvatura, esta tendría origen gravitacional. El vacío ontológico se contraerá a vacío fenomenológico con la invocación del ser de fenómeno como exigencia de la fenomenalidad del ser, fundamento-límite del espectro íntegro de manifestaciones actuales o posibles, y ese *vacuum* nouménico será el epitafio de la ensidad, conjurada toda reminiscencia del *kósmos noetós* platónico.

nía cósmicas contra la trepidante danza que impusieran al sistema solar las *libraciones* (oscilaciones sobre la elíptica para explicar la precesión de los equinoccios) y la heliolatría kepleriana o el *abandono de las oscuridades de la física hacia el refugio de las claridades de la matemática*, el *Mysterium Cosmographicum* (1596) abrirá la senda a una novedosa mecánica al abordar una cuestión crucial, la relación de la distribución espacial de las órbitas con los movimientos de los actores del sistema astral, aun desde la fatua ingenuidad de una solución (asociación a poliedros regulares) que presagiara, sin embargo, la ley de Bode-Titius<sup>31</sup> (relación de distancias medias al Sol con la posición del planeta en la serie natural que propiciaría el descubrimiento de Neptuno y Ceres).

Las leyes de Kepler y los estudios posteriores de Galileo inauguran una mecánica que culmina en los *Principia mathematica* (1687), el más acabado ensayo de unificación dinámica de los mundos sub- y supralunar. Y la nueva mecánica se asienta sobre las reglas de la lógica aristotélica, los postulados de la geometría euclídea, el concepto escolástico de existencia (la *res* existe *fundamentaliter in se, formaliter in mente*), dos hipótesis metafísicas ejemplificadas en un tiempo y un espacio absolutos (*verdadero, matemático*, el primero, *fluye ecuablemente, de suyo y por su propia naturaleza, sin relación a nada externo; siempre igual a sí mismo e inmóvil*, el segundo, sin relación alguna tampoco al orden aparente de los objetos físicos –aduce Newton en el *Escolio General de Principia* III–), las hipótesis mecánicas que sellan la ontología dualista (potencias activa y pasiva: Dios y la materia enfrentados como actividad pura e inerte pasividad, con un principio metodológico de transducción reductor de la materia a cualidades primarias –la masa sería el atributo depositario o promisorio del carácter de esencial pasividad en lo corpóreo– que haría de la filosofía natural y de la matemática a su servicio una suerte de *praeparatio Dei*: el principio de transducción *convertirá al matemático en teólogo*), la noción de punto material (porción de materia cuya posición coincide con la del punto geométrico sin error detectable por experiencia) y dos principios transversales: determinismo (el estado del universo en cada instante determina su estado en un instante ulterior) y causalidad (toda experiencia repetida en condiciones físicas invariantes, salvo espacio-tiempo, sobre un sistema material aislado, reproduce el curso fenoménico), que la razón secularizada complementará con cuatro preceptos directivos: regularidad (*natura nihil agit frustra*), continuidad (*natura non facit saltus*), conservación (masa, momento lineal, energía, ..., no se crean ni se destruyen, solo se transforman) y mínima acción (Maupertius: *natura agit semper per vias simplices*, principio de economía ergónica natural concomitante al de economía ontológica –*entia non sunt multiplicanda*,

*praeter necessitatem / quod enim potest per unum fieri in natura, non fit per plura*–, y por isomorfismo *ordo essendi – ordo cognoscendi*, al de austeridad epistemológica que consagrara Ockham en *Libri Quattuor Sententiarum: frustra fit per plura quod potest fieri per pauciora*)<sup>32</sup>.

La ecuación diferencial del movimiento planetario que se desprende de la ley de gravitación universal:  $\vec{r}'' = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$  (versor radial  $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ )

puede multiplicarse vectorialmente por el momento cinético específico de la masa móvil bajo la acción de una fuerza central ejercida por *M* en un sistema de referencia inercial heliocéntrico<sup>33</sup>:

$$\vec{r}'' \wedge \frac{\vec{L}}{m} = \frac{d}{dt} [\vec{r}' \wedge (\vec{r} \wedge \vec{v})] = -\frac{GM}{r^2} \vec{u}_r \wedge \frac{\vec{L}}{m} = -GM \frac{\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{v})}{r^3} = GM \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\text{Así: } \frac{d}{dt} \left[ \vec{r}' \wedge \frac{\vec{L}}{m} - GM \frac{\vec{r}}{r} \right] = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} \wedge \frac{\vec{L}}{m} - GM \frac{\vec{r}}{r} = c\vec{e} = GM \vec{e}$$

(el vector de Laplace  $\vec{e}$  se orienta hacia la periapsis del

SR). Multiplicada escalarmente la última ecuación por  $\vec{r}'$

, imputando a la anomalía verdadera ( $\theta$ ), ángulo definido

por el radiovector planetario con la axial periáptica:

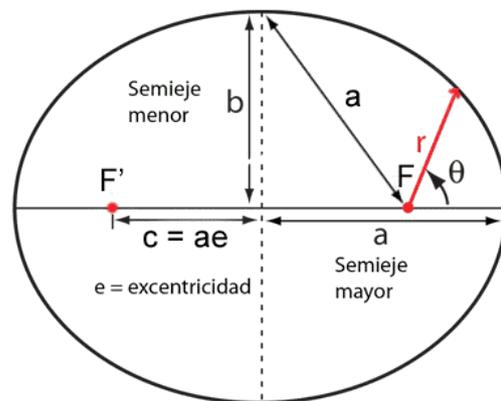
$$\vec{r}' \cdot \left( \vec{v} \wedge \frac{\vec{L}}{m} \right) - GM \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r} = GM \vec{e} \cdot \vec{r}'$$

$$\text{Como: } \vec{r}' \cdot \left( \vec{v} \wedge \frac{\vec{L}}{m} \right) = \frac{\vec{L}}{m} \cdot (\vec{r}' \wedge \vec{v}) = \left( \frac{L}{m} \right)^2 \text{ y } \vec{e} \cdot \vec{r}' = r \cdot e \cdot \cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{L^2}{m^2} - GM r(\theta) = GM r(\theta) e \cdot \cos \theta \Rightarrow r(\theta) = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1 + e \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

, ecuación de una cónica que incluye el parámetro gravitacional:  $p = a(1 - e^2)$ , *semilatus rectum* de la

elipse<sup>34</sup>. El semieje menor sería:  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ .

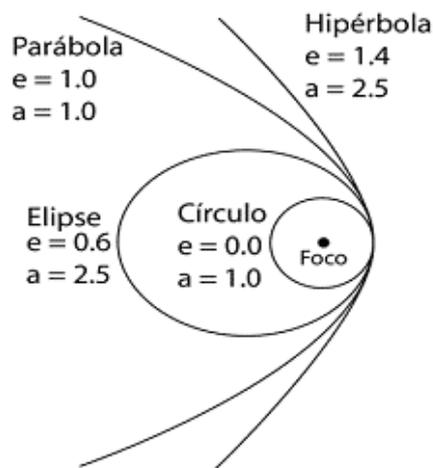


<sup>31</sup> El semieje mayor de la órbita planetaria vendría dado en su formulación original por:  $\frac{a_{n-1}+4}{a_n}$ , donde:  $a_0 = 0$  (Mercurio) y la sucesión restante de sumandos  $\{a_1, a_2, \dots\}$  define una progresión geométrica de término general:  $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ . Esto es:  $\{0, 3, 6, 12, 24, 48, \dots\}$ . Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno distarían del Sol:  $\{0,4; 0,7; 1,0; 1,6; 2,8; 5,2; \dots\}$  ua.

<sup>32</sup> Precedentes y versiones plurales: Tomás de Aquino, *Quaestio disputata De anima*, a. 4, arg. 1; *Summa Theologiae* I, 2, a. 3, arg. 2 (“Praetera, quod potest compleri per pauciora principia, non fit per plura”); *Commentaria in octo libros Physicorum*, lib. 1, lect. 11, n. 14 (“Quod potest fieri per pauciora, superfluum est si fiat per plura”) ...

<sup>33</sup> Las magnitudes físicas manejadas en la deducción se han introducido en una nota previa.

<sup>34</sup> Valor de  $p$ :  $2a = r(0) + r(\pi) = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2} \Rightarrow p = a(1 - e^2)$ .



La ilusoria circularidad ha caído, profanada después en los modelos micro-cósmicos fraguados en el siglo XX (mimética estructural de micro- y macrocosmos, las superestructuras replican las subestructuras, sucumbiendo las órbitas idealmente circulares previstas por Niels Bohr en las que el momento angular extrínseco del electrón fuese múltiplo entero de la constante racionalizada de Planck, corregidas por incorporación del número cuántico azimutal  $l$  en el modelo de Sommerfeld que denota la excentricidad de las órbitas. Como la Tierra o el Sol, el núcleo pierde su privilegiada posición en favor del centro de masas del átomo en su conjunto)<sup>35</sup>. La centrada armonía dianoica ( $e = 0$ ) cede a la excéntrica *harmonia mundi*:  $0 < e < 1$ , elíptica reservada a los planetas, correspondientes las órbitas abiertas, parabólica e hiperbólica, a  $e = 1$  o  $e > 1$ , respectivamente. Circunferencia y parábola serían casos ideales en los que la excentricidad adopta valor entero que no se presentan de forma natural pues la menor perturbación modificaría el

trazado orbital. Ciertos cuerpos astrales (cometas, asteroides, ...) siguen cursos hiperbólicos, la circularidad es idónea aproximación para algunos planetas de atenuada excentricidad traslatoria (la Tierra: 0,01671, Venus: 0,00677. o Neptuno: 0,00858). El vector de Runge-Lenz ( $\frac{L}{m} \wedge \vec{r}' + GM \frac{\vec{r}}{r}$ ), localizado en el plano orbital en la directriz de uno de los semiejes de la cónica y de módulo coincidente con el valor absoluto de la excentricidad, se conserva  $[\frac{L}{m} \cdot (\vec{r}' \wedge \vec{v})] = GM r - (\frac{L}{m} \wedge \vec{r}' + GM \frac{\vec{r}}{r}) \cdot \vec{r}$ , perfilando un lugar geométrico focalizado en el Sol que deshace el hechizo de la circularidad en su dianoica ensidad (el *hipo-cosmos dianoetós* es sub-horizonte uránico, dominio inferior del *noetós*).

La criatura mortal, *ser de un día*, elevó su mente para observar los sinuosos rastros de las estrellas, sus pies dejaron la tierra y probaron la *divina ambrosía* de Zeus, el célebre epigrama de Ptolomeo vaticina el ímprobo esfuerzo de *Μαθηματικὴ Σύνταξις* que cundirá en los siglos futuros. La historia humana (encuadrada en ella la del pensamiento) se inserta en esa naturaleza que la modernidad no concibe en clave cuántica, inflexiones críticas más o menos abruptas, convulsas fosas tectónicas, áreas de fractura o franjas invasivas de desgarro, límites disruptivos sobre el tejido de un espíritu continuo, y la Edad Media, con su herencia griega y su debilidad por la *auctoritas*, es el pasaje, sombrío y luminoso a la vez (la tibia penumbra que envuelve a la criatura a la que no ha sido concedido el reposo en sí misma por deficiencia congénita de auto-identidad, una identidad en proceso, en constante confrontación y reinvencción), hacia una era que le debe sus piezas maestras:

La mecánica y la física de la que los tiempos modernos están comprensiblemente orgullosos, proceden, mediante una ininterrumpida serie de mejoras apenas perceptibles, de las doctrinas proferidas en el corazón de las escuelas medievales<sup>36</sup>.

No conceptualizable, no procesable en formas puras de inteligibilidad, opaca a categorías intelectivas por ajena al espacio-tiempo, pero razonable (si el sueño de la razón engendra monstruos, en su vigilia meta-sensible la razón alumbra *noúmena*), la ensidad, signo extra-intelectivo de transgresión de la apariencia de las cosas, invita a la fuga racional hacia su inaparente y atemporal ensimismamiento, una incondicionada dimensión ideal de *no-ob-yacencia* de las mismas en tesitura nouménica (la cosa emancipada de la insomne tutela de una inteligencia amétrope hasta la densidad sémica nula<sup>37</sup>, mar-

<sup>35</sup> La transformación del momento cinético orbital en el operador  $\hat{L}$  según la maniobra algebraica convencional:  $-\hbar (\vec{r}' \wedge \vec{v})$ , rinde, por cierto, una entidad sin significado físico en sí misma (como sucede con la función de onda), conmutables sus componentes con el hamiltoniano cuando este sea independiente de las variables angulares:  $[\hat{L}_i, H] = 0$ . La sombra del orden dianoico planea también sobre el microcosmos, acechando a sus moradores. Compactada la expresión de la fuerza central responsable del movimiento planetario:  $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r$ , el problema de Kepler para un cuerpo con 6 grados de libertad queda recogido en el hamiltoniano:  $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$ , en completa sintonía con el operador para el átomo de hidrógeno:  $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$ . La ley de Newton:

$$\begin{aligned} \vec{p}' &= -\frac{k}{r^2} \vec{r} = f(\vec{r}) \vec{u}_r \\ \Rightarrow \vec{p}' \wedge \vec{L} &= m \frac{f(\vec{r})}{r} [\vec{r}'(\vec{r}' \cdot \vec{r}') - r^2 \vec{r}'] = mf(\vec{r}) r^2 \left[ \frac{\vec{r}'}{r^2} - \frac{\vec{r}'}{r} \right] \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} [\vec{p}' \wedge \vec{L}] &= -mf(\vec{r}) r^2 \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d}{dt} (mk \vec{u}_r) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} [\vec{p}' \wedge \vec{L} - mk \vec{u}_r] &= \vec{0}. \end{aligned}$$

El producto vectorial:  $(\vec{p}' \wedge \vec{L} - mk \vec{u}_r) \wedge \vec{L} = \vec{0}$ , y dado que:  
 $(\vec{p}' \wedge \vec{L} - mk \vec{u}_r) \cdot \vec{r}' = L^2 - mkr = Ar \cos \theta$   
 (siendo:  $\vec{A} = \vec{p}' \wedge \vec{L} - mk \vec{u}_r$ )

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2} (1 + \frac{A}{mk} \cos \theta) \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta') \right],$$

solución concertada estándar que vincula  $E$ ,  $A$  y  $L$  examinada por Goldstein para la órbita planetaria. Cf. Herbert Goldstein, "Prehistory of the Runge-Lenz vector". *American Journal of Physics* 43 (1975): 737-738.

<sup>36</sup> Pierre Duhem, *Les origines de la statique*, vol. I (Paris: Hermann, 1905). Edición inglesa: *The Origins of Statics* (Dordrecht: Kluwer, 1991), 38.

<sup>37</sup> Correlación entre densidad sémica y grado de abstracción o concreción conceptual. El nómeno se sustrae a los conceptos puros del entendimiento, no es conceptualizable (densidad sémica nula: la abstracción reduce la carga sémica hasta desbordar al entendimiento, el nómeno sería idea extra-intelectiva de razón). Kant, *Prolegomena* § 32: considerados rectamente los objetos de los sentidos como complejos de apariencias, una profesión de ensidad subyace a su conexión en nuestras representaciones, la confesión de *Ding an sich*, no cognoscible como sea en sí misma, únicamente por la forma en que los sentidos se ven afectados por ese "algo desconocido". Hermenéutica del nómeno en clave escolástica. De ser *notitia genita* por abstracción demandaría una *species* como razón formal de inteligibilidad (*formalis ratio intelligendi*), la *species* es una *similitudo obiecti*

ginada de la restringida competencia de una potencia cognitiva mermada por deficiencia natural de intuición no sensible<sup>38</sup>), no instando ya a la elevación epistémica hacia el auténtico carisma óptico cifrado en el invisible e inmutable *νοητόν*. Expresión de consistencia puramente ideal como *ens rationis* externo al campo objetivo del *Verstand*, extraña a sus categorías operativas, no visado de prístina (¿asintótica?) epistematicidad más allá de la percepción sensorial y la comparecencia en especie o *medium* representativo otorgado por el platonismo o expediente de inteligibilidad *ante rem* por conformidad a una *ratio exemplar* abonada al entendimiento divino incoado en el auge de la escolástica, devendrá la ensidad, con la transvaluación práctica (*nullus conceptus in intellectu*: dominio privativo de la *Vernunft*) del inmaterial *νοητόν* platónico en *νοούμενον*, límite meta-noémico de convergencia racional de la serie completa de pulsiones sensibles a través de las cuales la cosa se significa epistemológicamente y se despliega ontológicamente en *ob-yacencia ad aliud: dispositio ad aliud (ad cognoscentem)* frente a *habitus in se*, la incon-

*sensibili*, pero el nómeno no tiene ocasión sensible, disipándose toda posibilidad de semejanza objetiva portadora o depositaria de la virtud representativa del *medium intelligendi* que pudiera ser la especie para él. Sería *notitia intuitiva* si se plegase a las formas puras de la sensibilidad, mas estas son la forma del fenómeno, cuya materia es la sensación (el fenómeno resulta de la aplicación de las formas *a priori* de la sensibilidad a la impresión sensible: dato empírico + forma *a priori* sensible = fenómeno. No hay conocimiento objetivo sin dato empírico, ni cabe objetividad sin aprioridad formal sensible. Las facultades designan distintos niveles de aprioridad en el sujeto transcendental: la diversidad formal de fenómenos sensibles, que transluce el primer grado de unidad de la conciencia psíquica o empírica, no transcendental, se unifica por síntesis categorial, esto es, bajo formas puras de inteligibilidad). Si la noticia abstracta requiere un *medium intelligendi*, la intuitiva prescinde de *species* intermedia, procesada, no obstante, la intuición sensible en conceptos puros de entendimiento. La ensidad no es, entonces, conceptualizable (susceptible de conceptualización por aplicación de categorías intelectivas), ni inteligible (refractaria al esquematismo de las formas puras de inteligibilidad, operativas sobre un objeto de experiencia posible en general). Sería objetiva a una forma de intuición que aprehendiese la inteligibilidad de la cosa *per se*, no *per medium in cognoscendo* (el conocimiento *per medium cognitum* es mediato, a diferencia de la intuición), sin requerir el concurso esquemático de las categorías. La ensidad sería una inaparente dimensión intelectivamente intuible de la cosa, más allá de su fenomenalidad y la ingeniería conceptual que la asiste.

<sup>38</sup> La intuición intelectual de que adolece el *Homo viator* es justamente la capacidad que le permitiría proceder cognitivamente sin mediación de *species intelligibilis*, vector de inteligibilidad en la abstracción: aptitud para la captación de la inteligibilidad *per se* de las cosas, propia de la forma inmaterial subsistente, sujeta a multiplicidad inteligible, mas no sensible, excusada de *principium individuationis (materia signata)*. La promesa de un estado beatífico contemplativo *in patria animae (anima separata)* en el que la inteligibilidad *per se* (no *per speciem* como *medium cognoscendi, species sensibilis e intelligibilis, medium intelligendi* la segunda) de la forma pura se haría accesible, abandonado el estado de vía, suscita la alienante expectativa de un destino ultraterreno de naturaleza restituida (designio gnoseomórfico superior) en el que el *noús*, amétrope en su expatriación (*in statu naturae destitutae*), recobraría la emetropía original, intuición intelectual de la que se ve privado en su industria mundana, su comercio con lo sensible (la distinción deleuziana entre *aisthêton* –ser sensible– y *aisthêton* –ser de lo sensible– no es sino una reedición adulterada de la fórmula diafórica sartreana fenómeno de ser / ser (transfenoménico) de fenómeno que rehúsa el “*tò dektikón tòn aisthêton eidón áneu tês hyles*”). La ametropía del viador por expatriación psíquica habilitará a la metafísica como recurso “óptico” para la rectificación del defecto congénito de convergencia.

dicionada ensidad – noumenalidad, la clausura en sí misma de la cosa, suspendida fuera del espacio-tiempo de potencial manifestación ante cognoscente, como límite racional de acotación o traba a la divergencia (progresión *ad infinitum*) de sucesiones de condicionada adalidad – fenomenalidad; idea límite de razón (*ens rationis ratiocinatae*) que, por sobreexcepción metaempírica (más allá de toda unidad de síntesis categorial del plural espectro de presencia objetiva de la cosa a la conciencia), crea la ilusión de apariencia transcendental ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum \text{fenómeno}_i = \text{noúmeno}$ ). La irrupción de la “deformidad” en el orbe supralunar, la resistencia a anularse de la excentricidad, desfiguradas las trayectorias astrales por extravío de la perfecta circularidad, y aún más alarmante, la pernicioso apertura de su trazado a semejanza de las prosaicas deflexiones y la procaz sintaxis de los cuerpos sublunares en busca de un lugar natural dictado por el elemento preponderante en su íntima constitución, es premonitoria señal de distorsión inteligible y recesión ontológica del *noetón* hasta su deceso onto-epistémico. En el éter perdurará la ilusión del absoluto: frente al espacio y tiempo del fenómeno, formas apriorizadas de la sensibilidad indefectibles para el conocimiento, un espacio verdadero, matemático, sin relación prevalente a nada exterior, el del *dianoetón*, vasto y demudado umbral del *noúmenon* que la mecánica racionalista asaltarán como espacio fásico<sup>39</sup> y la experiencia de Michelson – Morley abatirá definitivamente en los albores del siglo XX, despejando el terreno a la relatividad especial.

Malograda la circularidad, quebrantada la memoria cíclica de un precoz *lógos* fisiocéntrico en trance de superación de su alienación teofánica, presa del asombro ancestral ante la luz despedazada del crepúsculo y los fantasmas que en ella prosperan, un *lógos* no homocéntrico asoma al mundo, abriéndose cauce en la moderna era del *yo*. El Macondo peninsular de los intrincados mapas que dibujara el patriarca pre-otoñal de los Buendía tras sus febriles días de hielo y fierros mágicos habría de recibir, al cabo, los beneficios de la ciencia.

<sup>39</sup> Fibrado tangente del espacio de configuración de un sistema mecánico, dotado de una topología simpléctica (pares variedad diferenciable / 2-forma cerrada no degenerada útiles en la reformulación hamiltoniana de teoremas de mecánica clásica).

## 6. Fuentes y referencias bibliográficas

- Copernicus, Nicolaus. *De revolutionibus orbium coelestium, On the Revolutions of the Heavenly Spheres: A New Translation from the Latin, with an Introduction and Notes*, edited by A. M. Duncan. New York: Barnes & Noble, 1976.
- Di Bono, Mario. "Copernicus, Amico, Fracastoro and Tusi's Device: Observations on the Use and Transmission of a Model". *Journal for the History of Astronomy* 26 (1995): 133-154.
- Duhem, Pierre. *Le système du monde. Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*, 3 vol. Paris: Librairie scientifique A. Hermann, 1913-1915.
- Duhem, Pierre. *To Save the Phenomena: An Essay on the Idea of Physical Theory from Plato to Galileo*. Chicago: University of Chicago Press, 1969.
- Furley, David. *The Greek Cosmologist, vol. I: The Formation of the Atomic Theory and Its Earliest Critics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- Gardner, Michael R. "Realism and Instrumentalism in Pre-Newtonian Astronomy". *Minnesota Studies in the Philosophy of Science* 10 (1983): 201-265.
- Gingerich, Owen. "Alfonso X as a Patron of Astronomy". En *The Eye of Heaven: Ptolemy, Copernicus, Kepler*. New York: American Institute of Physics, 1993.
- Goldstein, Bernard R. & Bowen, Alan C. "The Role of Observation in Ptolemy's Lunar Theories". En *Ancient Astronomy and Celestial Divination*, edited by Noel M. Swerdlow, 141-159. Massachusetts: MIT Press, 1999.
- Goldstein, Herbert. "Prehistory of the Runge-Lenz vector". *American Journal of Physics* 43 (1975): 737-738.
- Hanson, Norwood R. "The Mathematical Power of Epicyclic Astronomy". *Isis* 51, no. 2 (1960): 150-158.
- Hartner, William. "Nâsir al-Dîn al-Tûsi's Lunar Theory". *Physis* 11 (1969): 287-304.
- Hartner, William. "Ptolemy, Azarquiel, Ibn al-Shâtir, and Copernicus's Mercury Models. An Accuracy Test". *Archives internationales d'histoire des sciences* 24 (1974): 5-25.
- Kennedy, Edward S. "Late Medieval Planetary Theory". *Isis* 57 (1966): 365-378.
- Kepler, Johannes. *Astronomia Nova, Aitiologētos, seu Physica Coelestis, tradita commentariis De Motibus Stellae Martis, Ex observationibus G. V. Tychoonis Brahe. Jussu & Sumptibus Rudolphi II. Praga*, 1609.
- King, David & Saliba, George (ed.). *From Deferent to Equant: A Volume of Studies in the History of Science in Ancient and Medieval Near East*. New York: New York Academy of Sciences, 1987.
- Kunitzsch, Paul. *Der Almagest. Die Syntaxis mathematica des Claudius Ptolemäus in arabisch-lateinischer Überlieferung*. Wiesbaden, 1974.
- Koyré, Alexander. *The Astronomical Revolution*. Ithaca: Cornell University Press, 1973.
- Laudan, Larry. "Normative Naturalism". *Philosophy of Science* 57 (1990): 44-59.
- Moser, Jürgen K. "Regularization of Kepler's Problem and the Averaging Method on a Manifold". *Communications on Pure and Applied Mathematics* 23 (1970): 609-636.
- Moulines, Carlos U. "Forma y función de los principios-guía en las teorías físicas. En *Exploraciones metacientíficas*. Madrid: Alianza, 1982 [Primera publicación: "Cuantificadores existenciales y principios-guía en las teorías físicas". *Crítica* 10 (1978): 59-88].
- Neugebauer, Otto. "The Ptolemaic System". En *The Exact Sciences in Antiquity*. New York: Dover Publications, 1957.
- Ptolomeo, Claudio. *Almagest*. En *Ptolemy's Almagest*, editado por G. J. Toomer, 27-659. Princeton: Princeton University Press, 1998.
- Ptolomeo, Claudio. *Hipótesis planetarias*. Madrid: Alianza, 1987.
- Putnam, Hilary. "The Corroboration of Theories". En *Scientific Revolutions*, edited by Ian Hacking, 60-70. New York: Oxford University Press, 1981.
- Roberts, Victor. "The Planetary Theory of Ibn al-Shâtir: Latitudes of the Planets". *Isis* 57, no. 2 (1966): 208-219.
- Sabra, Abd Al-Hamid & Shehaby, Nabil. *Al-Shukûk alâ Batlamyûs (Dubitationes in Ptolemaeum)*. Cairo: National Library Press, 1971.
- Saliba, George. "Ibn Sinâ and Abû Ubayd al-Jûzjânî: The Problem of the Ptolemaic Equant". *Journal for the History of Arabic Science* 4 (1980): 376-404.
- Saliba, George. "The First Non-Ptolemaic Astronomy at the Maragha School". *Isis* 70 (1979): 571-576.
- Swerdlow, Noel M. "The Derivation and First Draft of Copernicus's Planetary Theory: A Translation of the Commentariolus with Commentary". *Proceedings of the American Philosophical Society* 117, no. 6 (1973): 423-512.
- Swerdlow, Noel M. & Neugebauer, Otto. *Mathematical Astronomy in Copernicus's De Revolutionibus*. New York: Springer, 1984.
- Westman, Robert S. "Kepler's Theory of Hypothesis and the 'Realist Dilemma'". *Studies in the History and Philosophy of Science* 3 (1972): 233-264.