Cuadernos de Estudios Empresariales
1998, número 8, 81-94

ISSN: 1131-6985

Equilibrio de largo plazo y composición de la demanda: un análisis del modelo Pasinetti-Morishima

LUIS C. CURRAIS NUNES,
JOSÉ ANTONIO SEIJAS MACÍAS
Universidad de A Coruña

RESUMEN

En el presente artículo consideramos un sistema de producción con dos categorías de ahorradores: trabajadores y capitalistas de modo que se establece una frontera distributiva entre salarios y beneficios asociada a una determinada tecnología. Se determina la tasa máxima de crecimiento relacionada con el vector de procesos activos elegidos dentro de las posibilidades técnicas del sistema. Partiendo de un análisis sraffiano todas las conclusiones se derivan del intervalo post-keynesiano de las posibilidades distributivas. El desarrollo del sistema dual muestra que la demanda se verá acotada por las necesidades de inversión aunque los consumidores sean libres para establecer un ordenamiento de sus preferencias sujeto a esta restricción.

SUMMARY

In this paper we establish a production system with two types of savers: wokers and capitalists and we provide a distributive frontier between wages and profits for a determinated level of technology. We calculate the maximum rate of economic growth related to the active proceses vector choosen in the technical matrix of the system. From a sraffian analysis all the conclusions are derivated from the distributive post-keynesian interval.The dual system shows that the demand is bounded by investment although consumers are free to establish an order of their preferences subject to this constraint.

I. INTRODUCCIÓN

Al analizar la distribución entre salarios y beneficios, la frontera distributiva se determina a partir de la técnica de producción elegida a través de una amplia gama de posibilidades tecnológicas. En un sistema de producción simple se puede observar un conjunto de relaciones que se establecen entre el tipo de beneficio y la tasa de salario correspondiente a cada técnica, cada una de las cuales asociada a una particular matriz de coeficientes interindustriales y un particular vector de coeficientes de trabajo. Entre todas las técnicas alternativas, sólo una es la efectivamente elegida además de ser la única que se puede observar. Dado el tipo de beneficio (o el salario unitario) utilizando el criterio de rentabilidad, la técnica elegida será función del tipo de beneficio. A nivel de una sólo industria la elección de la técnica está asociada al menor coste de producción, mientras que a nivel del sistema económico en su conjunto se elige para cada tipo de beneficio la que comporta el salario más elevado, o lo que es lo mismo, que para cada salario unitario establece el tipo de beneficio más elevado. Al considerar las variaciones del tipo de beneficio posibles económicamente, el criterio de elección que nos ocupa llevará el sistema económico a uno de los puntos pertenecientes a los segmentos más externos de las curvas que representan las distintas relaciones entre r y w. Esta envolvente representa la frontera tecnológica de posibilidades distributivas. En los últimos 20 años muchos economistas desarrollaron otros modelos extendiendo las conclusiones derivadas de las discusiones entre neoclásicos y keynesianos sobretodo a partir de la controversia generada entre las dos Cambridges. Partiendo de la formalización de Hosoda (1984) a cerca del modelo de Morishima-von Neumman discutiremos las condiciones que nos aseguran la existencia del equilibrio de largo plazo y su relación con la composición de la demanda.

A partir de la formulación de Morishima (1969, pp 89-132) se analiza la existencia de equilibrio según el comportamiento de los beneficios de trabajadores y capitalistas. Estableciendo dos líneas orientativas se asegura la existencia de equilibrio de largo plazo a partir de una particular tecnología y composición de la demanda.

II. EL MODELO DE VON NEUMANN

En el esquema de crecimiento económico planteado por von Neumann (1945, pp. 1-9) se analiza la posible configuración de los medios de producción, a partir de la técnica elegida, que da lugar al tipo de crecimiento máximo G. Haciendo uso del teorema del punto fijo de Brouwer y dada la tecnología del sistema, se trata de escoger entre las técnicas disponibles aquella que garantice el mayor tipo de crecimiento uniforme para todas las mercancías con precios positivos. Se supone un sistema económico donde la tecnología está integrada por un número finito de procesos productivos. El trabajo es considerado como una mercancía más, estando remunerado por un salario de subsistencia. En cada proceso productivo se requiere una cantidad de input de mercancías que, por otro lado, produce una cantidad de output de mercancías. Todo el excedente del ~~sistema económico después de reemplazados los medios de producción se distribuye~~ en forma de beneficios. De este modo la tasa de crecimiento del sistema g coincide con el tipo de beneficio r. A partir de la tecnología disponible se establecen los siguientes supuestos: i) Todo el producto neto se destina a la acumulación. ii) Todas las mercancías con precios positivos crecen a un tipo uniforme. iii) Aquellas mercancías que crezcan a una tasa superior tienen su precio igual a cero (bienes gratuitos). Sin embargo en el presente análisis, en el supuesto de producción simple y que todo el capital es circulante, el sistema crece a un tipo uniforme de modo que todas las mercancías son base.

Otros procesos de producción nunca formarán parte de la técnica elegida. Para que la técnica elegida produzca el crecimiento máximo, las proporciones que se obtienen las distintas mercancías deben corresponder al sistema tipo de Sraffa caracterizado por un tipo de excedente uniforme. La tecnología del sistema se caracteriza por un conjunto de matrices. A cada una de ellas se asocia una de las técnicas, x, disponibles:

$$x = a, b, ..., c \tag{1}$$

$$A^{(a)}, A^{(b)}, ..., A^{(c)} \tag{2}$$

Dado que todas las matrices son no-negativas podemos afirmar que sólo uno de sus autovalores, el de máximo valor, nos asegura un autovector no-negativo. Si cada matriz se caracteriza por un autovalor máximo E tenemos :

$$E(a), E(b), ..., E(c) \tag{3}$$

Cada uno de estos autovalores que caracteriza el sistema tipo se vincula al tipo de excedente uniforme y al tipo de beneficio máximo para cada técnica determinando la tasa de crecimiento máxima G. El autovalor máximo de la matriz de coeficientes interindustriales coincidirá con el autovalor máximo de la submatriz de la diagonal principal que se refiere a las mercancías base.

$$G^{(a)} = \frac{1}{E^{(a)}} - 1 \tag{4}$$

Además, cada uno de los autovalores se asocia a un autovector por la derecha q y a un autovector por la izquierda p, estableciendo un sistema dual de precios y cantidades, tal como:

$$(EI - A)q = 0 \tag{5}$$

$$p(EI - A) = 0 \tag{6}$$

El mínimo de los autovalores nos proporcionará la mayor tasa de crecimiento para el sistema. En el modelo de von Neumann consideramos que el salario de excedente es nulo ($w = 0$), de modo que el tipo de crecimiento es el máximo que permite la tecnología y que todo el beneficio se destina a la inversión. Sin embargo, podemos relajar estos supuestos y aun así obtener un sistema de precios determinado, utilizando la *ecuación de Cambridge* (tal como denominada por Pasinetti):

$$r = \frac{1}{S_c} \cdot g \tag{7}$$

Aunque originalmente se considerara que los salarios se dedicasen a la subsistencia y los beneficios de los capitalistas al consumo y a la inversión de modo que:

$$S_w = 0 \ ; \ P_c = 1 - s_c \tag{8}$$

Pasinetti(1978, pp.126-131) ha podido demostrar que aunque la propensión al ahorro de los trabajadores fuera mayor que cero ($w > 0$), la ecuación de Cambridge seguiría siendo válida como relación de equilibrio dinámico de largo plazo [1].

De este modo se cumple que:

$$0 \leq S_w \leq S_c \leq 1 \tag{9}$$

[1] Suponiendo que S_c y P_c son respectivamente el ahorro y el beneficio de los capitalistas y S_w y P_w el ahorro y el beneficio de los trabajadores tenemos que:

$$S_c = s_c P_c \ , \ S_w = s_w (P_w + W)$$

donde W son los salarios y s_c y s_w son las propensiones a ahorrar de los capitalistas y de los trabajadores de modo que $0 \leq s_w < s_c \leq 1$. Definimos el beneficio total como $P_T = P_c + P_w$, el ahorro total como $S_t = S_c + S_w$ y el stock de capital como $K_T = K_c + K_w$, tal que a largo plazo el ahorro y los beneficios tienden a ser proporcionales al stock de capital,

$$\frac{S}{K} = \frac{S_c}{K_c} = \frac{S_W}{K_W}$$

$$r = \frac{P}{K} = \frac{P_c}{K_c} = \frac{P_w}{K_w}$$

Los trabajadores prestan su capital a los capitalistas que se remunera al tipo de interés de mercado que es equivalente a la tipo de beneficio r. A largo plazo el ahorro de los capitalistas es el determinante del tipo de beneficio. En equilibrio el volumen de inversión D es igual al ahorro S,

$$\frac{P}{D} = \frac{P}{S} = \frac{P_c}{s_c P_c} = \frac{P_w}{s_w (W + P_w)}$$

si multiplicamos por D/K ($D/K = g$) encontramos la ecuación de cambridge, tal que:

$$r = \frac{P}{K} = \frac{g}{s_c}$$

A largo plazo el capital de cada ahorrador tiende a ser proporcional a su ahorro. Si en este supuesto los trabajadores prestan su ahorro a los capitalistas y obtienen una rentabilidad igual al tipo de beneficio, el total de los beneficios anuales de esta clase será igual a la suma del ahorro que a largo plazo entregan a préstamo. De este modo este stock de ahorro igualará su participación en los beneficios y por lo tanto los dos flujos se compensan y se anulan, haciendo con que el ahorro de los capitalistas sea el determinante del tipo de beneficio.

III. EL EQUILIBRIO DE LARGO PLAZO Y LA ELECCIÓN DE LA TÉCNICA DE PRODUCCIÓN

La elección de la técnica de producción que establece la frontera distributiva determina el equilibrio de largo plazo del sistema económico. Este problema ha sido tratado por Schefold (1980) y más tarde Bidard y Franke (1987) para un contexto de producción conjunta con resultados muy similares a los obtenidos por Hosoda (1989) en un contexto de producción simple. A partir de una metodología sraffiana de análisis en un contexto postkeynesiano analizaremos la posibilidad de equilibrio según la elección de la técnica y la composición de la demanda. Considerando que $r < G$ ($0 \leq r \leq r_{max}$) y determinando el número de mercancías n, cada industria j detiene $v(j)$ procesos productivos de modo que $v(j) \geq 1$ y $v = \sum_{j=1}^{n} v(j)$. Los vectores columna $A_{j1}, A_{j2}, ..., A_{jv(1)}$ denotan los procesos productivos utilizados por cada industria para producir una unidad de mercancía. La técnica del sistema se determina a partir de la matriz de coeficientes interindustriales A y del vector de coeficientes de trabajo T, tal como:

$$A = (A_{11}, ..., A_{1v(1)}, A_{21}, ..., A_{2v(2)}, ..., A_{n1}, A_{nv(n)}) \qquad (10)$$

$$T = (T_{11}, ..., T_{1v(1)}, T_{21}, ..., T_{2v(2)}, ..., T_{n1}, T_{nv(n)}) \qquad (10)$$

donde T_{jk} es el coeficiente de trabajo ($T > 0$) relativo al proceso A_{jk} de modo que $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq k \leq v(j)$.

Definimos la matriz U_{n*v} como matriz auxiliar de modo que:

$$U = (u_1, ..., u_1, u_2, ..., u_2, ..., u_n, ..., u_n) \qquad (12)$$

donde u_j es un vector columna tal que cada componente j es igual a uno ($j = 1, ..., n$) y todos los otros son iguales a cero. Si elegimos una de las técnicas alternativas disponibles podemos construir la matriz A^* de coeficientes técnicos, de modo que:

$$A^* = (A_{1k(1)}, A_{2k(2)}, ..., A_{nk(n)}) \; ; \; 1 \leq k(j) \leq v(j) \; ; \; j = 1, ..., n \qquad (13)$$

Considerando dos técnicas definidas a partir de las matrices orladas de coeficientes técnicos (A^{δ}, L^{δ}) y $(A^{\varepsilon}, L^{\varepsilon})$ podemos representar las combinaciones convexas de las dos técnicas tal que $(\lambda A^{\delta} + (1-\lambda)A^{\varepsilon}, \lambda T^{\delta} + (1-\lambda)T^{\varepsilon})$, $\forall 0 \; \lambda \leq$ ≤ 1. Definida la técnica del sistema podemos representar un particular vector de producción positivo $x = (x_{k(1)}, x_{k(2)}, x_{k(3)}, ..., x_{k(n)})$ de modo que cada industria utiliza tan sólo un proceso $k(j)$ entre aquellos disponibles.

Definimos el vector q orlado asociado a x como el vector de cantidades tal que $q = (0, ..., x_{k(1)}, ..., 0, ..., x_{k(n)}, ..., 0)$.

A cada vector no-negativo Y se asocia una determinada tasa de crecimiento g y un vector no-negativo q de modo que:

$$[U - (1+g)A]q = Y \tag{14}$$

La tasa máxima de crecimiento G (equivalente a la tasa máxima de beneficio r_{max}) se determinará a partir de la aplicación de $G = 1/E_{min} - 1$, tal que, E_{min} será el elegido entre los autovalores máximos asociados a cada una de las tecnologías disponibles.

La tecnología asociada a E_{min} determinará el vector de precios de producción que representen los menores costes. Analizando el gasto, los capitalistas consumen la cesta de mercancías $c(p)$ y los trabajadores consumen $w(p)$, por unidad de valor recibida, denota un vector de precios tal que:

$$c(p) = \frac{1-s_c}{pd(p)} d(p) \; ; \; w(p) = \frac{1-s_w}{pt(p)} t(p) \tag{15}$$

donde $d(p)$ y $t(p)$ denotan el gasto total posible por categoría de gasto.

A partir de Pasinetti (1978, pp.134), el ahorro total de los capitalistas se definiría como $S_c = s_c P_c$ y el ahorro total de los trabajadores tal que $S_w = s_w(wTq + P_w)$. Si a largo plazo los beneficios totales son proporcionales al ahorro total tenemos que:

$$\frac{P_w}{S_w} = \frac{P_c}{S_c} \rightarrow \frac{P_w}{s_w(wTq + P_w} = \frac{P_c}{s_c P_c} \forall P_c; \; w > 0 \tag{16}$$

donde w define la tasa de salarios en términos de una mercancía o de una cesta de mercancías de subsistencia tal que $b = (b_0, b_1, ..., b_n)$ donde b_i es la cantidad del bien i de modo que $w = W/pb$; W denota la parte del producto neto total utilizada para pagar los salarios *ex-post*, al contrario de Ricardo y tal como formulado por Sraffa (7). Los beneficios capitalistas se determinan, dada la tasa de beneficio global exógena y encontrado el valor de la producción total, restando la parte que se destina al beneficio de los trabajadores.

$$P_w = \frac{s_w}{s_c - s_w} wTq \tag{17}$$

Si sabemos que $rpAq = P_c + P_w$ tenemos que:

$$P_c = rpAq - \frac{s_w}{s_c - s_w} wTq \tag{18}$$

Podemos establecer las condiciones de equilibrio competitivo a largo plazo de modo que el coste de producción de cada proceso y el coste total de la producción se definan como:

$$pU \leq (1 + r)pA + wT \tag{19}$$

$$pUq = (1 + r)pAq + wTq \tag{20}$$

A partir del vector de precios se definen todas las relaciones distributivas y condiciones de equilibrio competitivo de largo plazo. Para aquellos procesos cuyo precio asociado es menor que su coste la cantidad producida es igual a cero tal como determina el vector q. En equilibrio el coste de la producción es igual a su precio. El sistema será estable si existe un mecanismo de precios para el cual el nivel de precios relativos, respecto a la tasa de beneficios,varíe según las condiciones de oferta y demanda de la economía y si la inversión requerida se realiza.

$$\begin{aligned} Uq \geq (1+g)Aq &+ \left[wTq + \left(\frac{s_w}{s_c - s_w} wTq \right) \right] \frac{1 - s_w}{pt(p)} t(p) \\ &+ \left[rpAq - \left(\frac{s_w}{s_c - sw} wTq \right) \right] \frac{1 - s_c}{pd(p)} d(p) \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} pUq = (1+g)pAq + (1-s_w) &\left[wTq + \left(\frac{s_w}{s_c - s_w} wTq \right) \right] \\ +(1 - s_c) \left(rpAq - \frac{s_w}{s_c - s_w} wTq \right) &\ \forall\ pUq > 0\ ;\ p \geq 0\ ;\ q \geq 0\ ;\ w \geq 0 \end{aligned} \tag{22}$$

El valor total de la producción deberá ser igual a la cantidad necesaria para reemplazar los medios de producción utilizados a lo largo del período, más la cantidad para ampliarlo según el tipo de crecimiento del sistema más las cantidades suficientes para atender las necesidades de consumo de los trabajadores y capitalistas.

De este modo, resolviendo el sistema planteado por las ecuaciones (19)-(22), quedan determinados los vectores precio y cantidad asociados a la tasa de beneficio $r(<G)$ que establecen el equilibrio de largo plazo. Estos vectores se denominan vectores de precios y cantidades de equilibrio competitivo. La técnica utilizada para alcanzar el equilibrio será la denominada técnica de equilibrio competitivo. Aquí, al contrario que en el modelo de von Neumann la tasa de crecimiento pasa a ser endógena y dependiente de la tasa de beneficio. A partir de (20) y (22) obtenemos la tasa de crecimiento del modelo:

$$g = \begin{cases} s_c r & \text{si} \quad rpAq > \dfrac{s_w}{s_c - s_w} wTq \\ s_w\left(r + \dfrac{wTq}{pAq}\right) & \text{si} \quad rpAq = \dfrac{s_w}{s_c - s_w} wTq \end{cases} \tag{23}$$

Considerando la existencia de los vectores de precio y cantidad de equilibrio competitivo, p^* y q^*, asociados a la tasa de beneficio r, podemos elegir una técnica (A^*,T^*), donde al menos cada industria utiliza un proceso, tal que [2]:

$$p^* = (1 + r)p^*A^* + T^* \tag{24}$$

Si (A^*,T^*) es una combinación convexa de otras matrices asociadas a distintas técnicas tal como (A^δ, T^δ) y $(A^\varepsilon, T^\varepsilon)$ se cumple que:

$$p^* = (1+r)p^* A^\rho + T^\rho \;\; \forall \;\; \rho = \beta, \varepsilon / r < \frac{1}{E(A^\rho)-1} \tag{25}$$

Suponiendo una técnica (A^*, T^*) que no pueda ser representada como una combinación convexa de otras técnicas tenemos que $\forall \tau$:

$$p^* \leq (1 + r)p^*T^\tau = T^\tau \rightarrow p^* \leq T^\tau[I - (1 + r)A^\tau]^{-1} \tag{26}$$

El lado derecho de la segunda ecuación determina el coste de producción asociado a la técnica τ. La técnica (A^*, T^*) será aquella asociada a E_{min} que determinará el vector de precios que proporcione los más bajos costes de pro-

[2] Se ha supuesto $w = 1$.

ducción para un r dado. Puesto que el coste de producción está medido en términos de la tasa de salario, podemos decir que hemos establecido la mayor tasa de salario medida en términos de una mercancía. Así pues, hemos alcanzado un punto de la frontera salario- beneficio a partir de las condiciones de equilibrio competitivo a largo plazo. Partiendo de un punto de la frontera, si despejamos p* y analizamos las técnicas disponibles tenemos que:

$$p^* = T^*[I - (1 + r)A^*]^{-1} \leq P^{\rho} = T^{\rho}[I - (1 + r)A^{\rho}]^{-1} \qquad (27)$$

que generalizando:

$$p^*U \leq (1 + r)p^*A + T \qquad (28)$$

con lo que hemos obtenido (19).

Analizando los puntos de la frontera buscaremos el punto que esté asociado a la mayor tasa de salario. Una vez encontrado q^* no tenemos garantizado que el número de procesos sea igual al número de industrias. La técnica asociada a p^* y a q^* puede contener más de n procesos de modo que alguna industria pueda utilizar varios procesos, por lo tanto, no tenemos garantizado que cada industria elija un único proceso, con lo que la técnica elegida puede no ser la de equilibrio competitivo.

Tenemos que construir, ahora, un vector de cantidades q^*, tal que asociado al vector de precios p* cumpla las condiciones de equilibrio competitivo (19)-(22).

Para ello definimos la siguiente aplicación, que nos determina la mayor tasa de crecimiento asociada al vector de procesos x:

$$g(x) + \max\left[s_c r, s_w\left(r + \frac{wTx}{p^*A^*x}\right)\right] \ \forall \ x \geq 0 \qquad (29)$$

Para que el sistema económico pueda mantenerse en equilibrio dinámico todas las cantidades físicas deberán crecer en el transcurso del tiempo acompañando el crecimiento de la fuerza de trabajo. El volumen de producción del sistema se determinará a partir de las necesidades de consumo agregado, de modo que se pueda mantener la plena utilización de la capacidad productiva a partir de una dinámica proporcional tal que:

$$\begin{aligned}\delta(x) = [1 + g(x)]A^*x &+ \left[1 + \frac{s_w}{s_c - s_w}\right]\frac{1 - s_w}{p^*t^*(p)}t^*(p) \\ &+ \left[\left(rp^*A^*x - \frac{s_w}{s_c - s_w}\right)\right]\frac{1 - s_c}{p^*d^*(p)}d^*(p)\end{aligned} \qquad (30)$$

Donde el dominio de $g(x)$ y $\delta(x)$ viene dado por el conjunto $K = \{x/x \geq 0$ y $L^*x = 1\}$.Definido el volumen de producción podemos establecer la producción per cápita de los trabajadores como:

$$\alpha(x) = \frac{\delta(x)}{T^*\delta(x)} \tag{31}$$

donde $T^*\delta(x^*)$ son los requisitos de trabajo asociados a la producción que crece a la tasa natural g asegurando la plena utilización de la fuerza de trabajo y de la capacidad productiva. A partir del teorema del punto fijo de Brouwer se puede afirmar la existencia de un punto x^* tal que $x^* = (x^*)$.

Dado $p^* = (1 + r)p^*A^* + T^*$, tenemos que:

$$p^*x^* = (1 + r)p^*A^*x^* + 1 \tag{32}$$

y puesto que $p^*x^* = p^*(x^*) = p^*(\delta(x^*)/L^*\delta(x^*))$, nos queda que $L^*\delta(x^*) = 1$, y por tanto $x^* = (x^*)$; así pues, dado (30) concluimos que:

$$\begin{aligned} x^* = (1+g^*)]A^*x^* + &\left[1 + \frac{s_w}{s_c - s_w}\right]\frac{1-s_w}{p^*t(p^*)}t(p^*) \\ + &\left[\left(rp^*A^*x^* - \frac{s_w}{s_c - s_w}\right)\right]\frac{1-s_c}{p^*d(p^*)}d(p^*) \end{aligned} \tag{33}$$

$$g^* = \begin{cases} s_c r & \text{si} \quad rp^*A^*x^* > \dfrac{s_w}{s_c - s_w} \\ s_w\left(r + \dfrac{1}{p^*A^*x^*}\right) & \text{si} \quad rp^*A^*x^* = \dfrac{s_w}{s_c - s_w} \end{cases} \tag{34}$$

Tenemos a q^* como vector orlado de x^*, que satisface las condiciones de equilibrio (19)-(22) y cumple el supuesto de que cada industria elige un proceso, de modo que ahora podemos establecer que p^* y q^* son los vectores que garantizan la elección del punto asociado a la mayor tasa de crecimiento en la frontera distributiva.

IV. LA COMPOSICIÓN DEL CONSUMO PER CÁPITA Y EL CRECIMIENTO ECONÓMICO

En un sistema económico en expansión además de reemplazar los medios de producción utilizados, también se debe ampliar la capacidad productiva para el período siguiente. El producto neto del sistema ya no se dedicaría totalmente al consumo como en un sistema estacionario sino que una parte del mismo estará destinada a la inversión :

$$q - Aq - D = C \tag{35}$$

donde C_w es el vector columna de los bienes de consumo de los trabajadores, C_c es el vector columna de los bienes de consumo de los capitalistas y D es el vector columna de los bienes que se dedican a la inversión necesaria para aumentar la capacidad productiva:

$$\begin{aligned} C_w &= (C_1w, C_2w, ..., C_{nw}) \\ C_c &= (C_1c, C_2c, ..., C_{nc}) \\ D &= (D_1, D_2, ..., D_n) \end{aligned} \tag{36}$$

Las posibilidades de consumo están vinculadas a la capacidad técnica del sistema de modo que cada consumidor puede fijar las proporciones de sus consumos pero no su nivel absoluto que dependerá de la tasa de crecimiento de la demanda g que acompaña el crecimiento de la fuerza de trabajo y de la población. Definiremos los vectores c_c y c_w que expresen respectivamente el consumo *per cápita* de los capitalistas y de los trabajadores como:

$$c_w \frac{\left[1+\frac{s_w}{s_c - s_w}\right]\frac{1-s_w}{p*t*(p)}t*(p)}{T*x*} \tag{37}$$

$$c_c \frac{\left[rp*A*x* - \frac{s_w}{s_c - s_w}\right]\frac{1-s_c}{p*d*(p)}d*(p)}{\zeta r} \tag{38}$$

donde $T^* x^*$ representa el numero de trabajadores activos y ζr el número de capitalistas como función de la tasa de beneficio. Al final de cada período el aumento de la cantidad de cada bien debe mantener una dinámica proporcional tal que $D = g\ Aq$. Podemos determinar por sustitución que:

$$q - Aq - gAq = C_w C_c \tag{39}$$

donde $C_w + C_c = c_w T^* x^* + c_c r$.

Considerando el sistema de precios relativos a partir de la ecuación (26) y suponiendo que la tasa de inflación es cero [3]:

$$p = T[I - (1 + r)A]^{-1} \tag{40}$$

$$\hat{q} = \frac{q^*}{T^* x^* = \zeta r} \tag{41}$$

Podemos expresar también el sistema de cantidades relativas de forma dual una vez que las proporciones permanecen invariables. Partiendo del punto óptimo p^* definimos el vector de cantidades físicas *per cápita* $\hat{q}$ tal que [4]:

$$\hat{q} - A\hat{q} - gA\hat{q} = c_w + c_c \tag{42}$$

de modo que:

$$\hat{q} = [I - (1 + g)A]^{-1}(c_w + c_c) \tag{43}$$

Si consideramos el producto neto *per cápita* $p(I - A)q$ y υ, como el porcentaje del mismo que se dedica al consumo, tenemos que la inversión será igual a $(1 - \upsilon)$. De este modo podemos expresar g como:

$$g = (1 - \hat{c}_w - \hat{c}_c)\frac{p(I - A)\hat{q}}{pA\hat{q}} \tag{44}$$

donde υ, es la cuota de consumo, tal que, $\upsilon = \hat{c}_w + \hat{c}_c$, para $\hat{c}_w = c_w / pA\hat{q}$ y $\hat{c}_c = c_c / pA\hat{q}$ definido para el intervalo $0 \leq (1 - \hat{c}_w - c_c) \leq 1$.

[3] Si $p^* = (1 + r)p^*A^* + T$, tenemos que

$$p^* - (1 + r)p^*A^* = T^*$$
$$p^*(I - (1 + r)A^*) = T^*$$
$$p^* = T^*[I - (1 + r)A^*]^{-1}$$

[4] En (40) tenemos el vector fila de precios relativos que se obtiene a partir de la multiplicación de las columnas de la matriz A por $(1 + r)$ y a continuación por el vector fila de los requisitos de trabajo T. En (43) tenemos el vector columna de cantidades relativas, donde se multiplican las filas de la matriz A por $(1 + g)$ y a continuación se multiplica por el vector columna de consumo *per cápita* c. De este modo verificamos el carácter dual perfectamente simétrico entre el sistema de cantidades y de precios relativos en equilibrio dinámico.

De tal modo podemos obtener una relación lineal entre g y υ, siempre que el vector de cantidades no sufra variaciones en su composición para diferentes tipos de crecimiento g[5].

Las posibilidades de elección de consumo por trabajador se acotan a medida que aumenta g y desaparecen cuando alcanzamos la tasa máxima de crecimiento que corresponde a la estructura determinada por el autovalor máximo de la matriz A. Una vez fijado el tipo de crecimiento económico se establece un límite al excedente del sistema que restringe las posibilidades de elección.

IV. CONCLUSIÓN

La frontera tecnológica nos muestra una nube de puntos que establece un *trade-off* entre tasa de salarios y tasa de beneficios para el intervalo en que esta ultima varia ($0 \langle r \langle r_{max}$).

En condiciones de equilibrio competitivo a largo plazo se establece una frontera salario beneficio de tal forma que la elección de una técnica resulta un punto de la frontera y determina una tasa de crecimiento óptima. A esta tasa de crecimiento se asocia un vector de precios y un vector de cantidades estableciendo las posibilidades de consumo de la economía. Los consumidores podrán elegir libremente la composición de su consumo pero no su nivel absoluto que depende de las posibilidades técnicas del sistema. Si establecida la tasa de crecimiento g suponemos que las preferencias de los consumidores permanecen constantes en el tiempo, en equilibrio dinámico, sus elecciones dependerán de su renta *per cápita* y de los precios relativos de los bienes y servicios. El desarrollo del sistema dual muestra que la demanda se verá acotada por las necesidades de inversión, aunque los consumidores sean libres para establecer un ordenamiento de sus preferencias sujeto a esta restricción. Cuanto menores sean los salarios de los trabajadores mayor será la dependencia entre el consumo capitalista y el tipo de crecimiento.

---

[5] Esta condición se cumple para el sistema tipo de Sraffa, donde el vector de cantidades es el autovector por la derecha de la matriz A. De este modo las proporciones entre inversión, consumo y producto guardan la misma proporcionalidad, independientemente del sistema de precios. De forma dual esto se establece también para el sistema de precios, si a partir de un determinado producto neto asignamos cuotas del mismo a los salarios y beneficios. Si suponemos intensidad de capital uniforme, tal como Ricardo, los precios no sufren variación cuando cambia la distribución de la renta, para todos los valores de r contemplados en el intervalo.

$$r = (1 - w)\frac{p(I - A)q}{pAq}$$

La estructura de precios no sufre variación cuando se modifica la distribución de la renta.

BIBLIOGRAFÍA

BARANZINI y HARCOURT (1993): *The Dynamics of the Wealth of Nations: Growth, Distribution and Structural Change*, London, Macmillan Press.

BIDARD, C., y FRANKE, R. (1987): «On the Existence of Long-Term Equilibria in the Two-Class Pasinetti-Morishima Model», *Richerque Economique*, vol. 41, n.° 1, pp.3-21.

BIDARD, C., y HOSODA, E. (1987): «On Consumption Baskets in a Generalized von Neumann Model», *International Economic Review*, vol.28, n.° 2, pp. 509-519.

BURMEISTER, E., y KUGA, K. (1970): «The Factor Price Frontier, Duality and Joint Production», *Review of Economic Studies*, vol.37, n.° 109, pp.11-19.

FRANKE, R. (1982): «On a Possibility of Closing the Production Price Sistem from the Side of Wages», *Metroeconómica*, vol 34, n.° 1-2-3, pp. 147-178.

FRANKE, R. (1985): «On the Upper- and Lower- Bounds of Workers' Propensity to Save in a Two - Class Pasinetti Economy», *Australian Economics Papers*, vol.24, n.° 45, pp.271-277.

LEVHARI, D. (1965): «A Nonsubstitution Theorem and Switching Techniques», *Quarterly Journal of Economics*, vol. 79, n.° 314, pp. 98-105.

HOSODA, E. (1989): «Competitive Equilibrium and the Wage Profit Frontier», *Manchester School of Economics and Social Studies*, vol 57, n.° 3, pp 262-279.

MORISHIMA, M. (1969): *The Theory of Economic Growth*, London, Oxford University Press.

MORISHIMA, M. (1989): *Ricardo's Economics: A General Equilibrium Theory of Distribution and Growth*, Cambridge, Cambridge University Press.

NEUMANN, J. (1945): «A Model of General Economic Equilibrium», *Review of Economic Studies*, pp. 1-9.

PARRINELLO, S. (1984): «Adapative Preferences and the Theory of Demand», *Journal of Post Keynesian Economics*, vol. VI, n.° 4, pp.551-560.

PASINETTI, L. (1978): *Crecimiento Económico y Distribución de la Renta*, Madrid, Alianza Universidad.

PASINETTI, L. (1975): *Lezione di Teoria delle Produzione*, Bologna, Societá Editrice il Mulino.

POSSAS, M. (1987): *A Dinâmica da Economía Capitalista: Uma Abordagem Teórica*, Sao Paulo, Editora Brasiliense.

SAMUELSON, A., y MODIGLIANI, F. (1966): «The Pasinetti Paradox in Neoclassical and more General Models», *Review of Economic Studies*, vol. 33, n.° 6, pp. 269-301.

SCHEFOLD, B. (1980): «Von Neuman and Sraffa: Mathematical Equivalence and Conceptual Diference», *Economic Journal*, vol. 90, n.° 351, pp. 140-156.

SRAFFA, P. (1960): *Production of Commodities by Means of Commodities*, Cambridge, Cambridge University Press.