La dualidad en la Programación Lineal Su utilidad en el Análisis Económico-Financiero

MANUEL GÓMEZ DÍAZ
Universidad de Santiago de Compostela
Departamento de Economía Financiera y Contabilidad

El planteamiento de un problema típico de maximización en la Programación Lineal puede ser el siguiente:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar}: & Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\
\text{sujeto a} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \le b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \le b_2 \\
& \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\
& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \le b_m \\
& x_1 \ge 0 \ ; \ x_2 \ge 0 \ ; \dots \ x_n \ge 0
\end{array}
$$

Si formamos las matrices:

$$
\underset{(m \times n)}{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_1 n \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_2 n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}} \ ; \ \underset{(m \times 1)}{b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}} \ ; \ \underset{(n \times 1)}{X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}} \ ; \ \underset{(n \times 1)}{\bar{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}
$$

$$
\underset{(1 \times n)}{C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}}
$$

podemos expresar el problema así:

Cuadernos de Estudios Empresariales, nº 6. Servicio de Publicaciones UCM. Madrid 1996.

$$\text{Máx. } Z = CX$$
$$AX \leq b$$
$$X \geq \bar{O}$$ (Se dice forma abreviada, matricial o canónica)

Para resolver un problema de P.L. por el método Simplex, habremos de convertir previamente en igualdades todas las desigualdades (inecuaciones existentes) utilizando el conocido procedimiento de las variables de holgura:

$$\begin{array}{lllllllll}
a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \ldots & + a_{1n}x_n & + x_{n+1} & & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \ldots & + a_{2n}x_n & . & + x_{n+2} & & & = b_2 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \ldots & + a_{mn}x_n & . & & . & + x_{n+m} & = b_m
\end{array}$$

matricialmente se expresa:

$$[A \, \vdots \, I] \begin{bmatrix} X \\ \hline X_h \end{bmatrix} = [b]$$

siendo:

I = matriz identidad ($m \, x \, n$)
X_h = matriz de las variables de holgura ($m \, x \, 1$)

En el caso en que las desigualdades tuviesen sentido inverso ($\geq$), la matriz de la izquierda sería: $[A \_ -I]$ y para obtener una primera solución básica se utilizarían variables artificiales.

NOTACIÓN MATRICIAL DE LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA LINEAL

Supondremos que los m primeros vectores de la matriz A (columnas) forman un programa base y la solución es óptima.

Hacemos las siguientes particiones en las matrices:

$$A = [B \,\vdots\, N] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & a_{1m+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & a_{2m+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & a_{mm+1} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]$$

$$C = \left[C_b \,\vdots\, C_n\right] = \left[c_1\, c_2 \ldots c_m \,\vdots\, c_{m+1} \ldots c_n\right]$$

$$X = \left[\frac{X_b}{X_n}\right]$$

según nuestro anterior supuesto, la solución óptima es:

$$B = \left[P_1\, P_2 \ldots P_m\right]$$

$$Z = CX = \left[C_b \,\vdots\, C_n\right] \times \left[\frac{X_b}{X_n}\right] = C_b X_b + C_n X_n$$

$$AX = b = [B \,\vdots\, N] \times \left[\frac{X_b}{X_n}\right] = BX_b + B_n X_n \text{ ; y como } X_n = \begin{bmatrix} 0_{m+1} \\ \vdots \\ 0_{m+n} \end{bmatrix}$$

tenemos :

$$Z = C_b X_b$$
$$BX_b = b$$

LA DUALIDAD

"A todo problema lineal, llamado primal, le corresponde otro que denominamos dual. Entre ambos existen una serie de relaciones y propiedades importantes".

(P_1) ——— programa primal

(D_1) ——— programa dual

Para un análisis sistemático de la dualidad dividiremos su estudio en cinco partes perfectamente diferenciadas:

1) PLANTEAMIENTO
2) RELACIONES ENTRE PRIMAL Y DUAL (Teoremas)
3) RESOLUCIÓN DEL DUAL
4) SIGNIFICACIÓN ECONÓMICA DEL DUAL
5) PRINCIPALES APLICACIONES EN ECONOMÍA

PLANTEAMIENTO DEL PROGRAMA DUAL

Podemos enunciar las siguientes relaciones entre un problema primal (P_1) y su dual (D_1):

a) El dual tiene tantas restricciones como variables existen en el primal.
b) El dual tiene tantas variables como restricciones existen en el primal.
c) Los coeficientes de la función objetivo del programa primal son los términos independientes (con su signo) de las restricciones del dual.
d) Los términos independientes de las restricciones del programa primal (con su signo), son los coeficientes de la función objetivo del programa dual.
e) La matriz de coeficientes de las restricciones del programa dual es igual a la traspuesta de la matriz de coeficientes de las restricciones del primal.
f) A un programa primal de maximización, le corresponde un dual de minimización y viceversa.
g) El dual de un dual es su primal.
h) El sentido de la desigualdad o la igualdad de las restricciones del dual es dependiente de la amplia casuística que puede haber en la presentación del primal. Lo mismo puede decirse del signo de las variables duales.

A continuación abordaremos este problema y se extraerán las reglas de general aplicación para plantear correctamente el dual, sea cual fuere la presentación del primal; pero antes haremos un breve recordatorio matemático que creemos de interés.

Maximizar Z equivale a minimizar $-Z$ y minimizar Z equivale a maximizar $-Z$.

EJEMPLOS:

1) Máx. $Z = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3$

equivale a:

Mín. $-Z = -3x_1 - 5x_2 - 6x_3$

2) Mín. $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

equivale a:

Máx. $-Z = -2x_1 - 3x_2 - x_3$

Por otra parte:

$AX \geq b$ equivale a $-AX \leq -b$

$AX \leq B$ equivale a $-AX \geq -b$

$AX = b$ equivale a: $AX \geq b$

$AX \leq b$

Definimos como estructura canónica en la programación lineal y le llamamos problema primal (P_1) a la siguiente:

$$\text{Máx. } Z = CX$$
$$AX \leq b$$
$$X \geq 0$$

Existe otra estructura, asociada a la anterior, que llamamos problema dual (D_1) y tiene la siguiente forma:

$$\text{Mín. } G = b^T Y$$
$$A^T Y \geq C^T$$
$$Y \geq 0$$

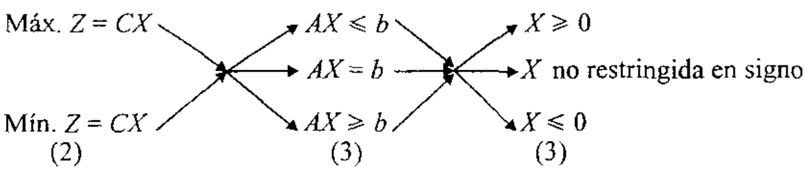
Algunos autores denominan a las anteriores formas "problemas duales simétricos", en contraposición con los "asimétricos" o aquellos en que las restricciones aparecen con el signo igual, es decir: $AX = b$.

ELEMENTOS DEL PROBLEMA DUAL

Y Vector columna de *VARIABLES DUALES*, (m _ 1)
C^T Vector columna de *RECURSOS DUALES*, (n _ 1)
b^T Vector fila de *PRECIOS O RENDIMIENTOS DUALES* (1 _ m)
A^T Matriz traspuesta. *COEFICIENTES TECNOLÓGICOS DUALES* (n x m)
G Escalar. *VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO DUAL*

El problema primal puede presentarse como máximo o como mínimo y tanto las restricciones como las variables con distintos signos; como quiera que el dual es una aplicación del primal, según se presente éste así resultará aquél.

Si partimos de un primal en forma abreviada, al considerar máximo y mínimo, así como los diferentes signos de variables y restricciones, llegaremos a 18 formas diferentes:



2 x 3 x 3 = 18 combinaciones diferentes

Si, además, tenemos en cuenta que dentro del bloque AX puede haber cualquier número de ecuaciones y de inecuaciones en ambos sentidos y que cada una de las variables x_i, independientemente de las otras, puede tomar los valores $x_i \geq 0$; $x_i \leq 0$, o ser no restringida en signo, el problema resulta más complejo.

Trataremos, pues, de establecer una metodología básica para llegar en cualquier caso, de forma inequívoca, al planteamiento del dual y, al tiempo, deducir unas reglas generales, de obligado cumplimiento, para alcanzar directamente el mismo objetivo.

Hemos definido anteriormente el problema dual como una aplicación del primal en su forma canónica, es decir:

$$(P_1)\text{: Máx. } Z = CX \qquad\qquad (D_1)\text{: Mín. } G = b^T\, Y$$

$$AX \leq b \qquad\qquad A^T\, Y \geq C^T$$

$$X \geq 0 \qquad\qquad Y \geq 0$$

por lo tanto, cualquiera que sea la forma en que se presente el primal habremos de transformarlo "correctamente" en otro equivalente que tenga la forma canónica. Luego, la aplicación correspondiente nos llevará sin dificultad al dual.

Para conseguir lo primero utilizaremos las propiedades matemáticas recordadas anteriormente y, cuando sea necesario, también recurriremos a cambios de variables.

DIVERSAS FORMAS DEL PRIMAL-DUAL

Casos de Máximo

1) (P_1): Máx. $Z = CX$

$AX \leq b$

$X \geq 0$

(D_1): Mín. $G = b^T Y$

$A^T Y \geq C^T$

$Y \geq 0$

2) (P_1): Máx. $Z = CX$

$AX \geq b$

$X \geq 0$

Forma canónica:

Máx. $Z = CX$

$-AX \leq -b$

$X \geq 0$

(D_1): Mín. $G = -b^T W$

$-A^T W \geq C^T$

$W \geq 0$

y haciendo $Y = -W$

Mín. $G = b^T Y$

$A^T Y \geq C^T$

$Y \leq 0$

3) (P_1): Máx. $Z = CX$

$AX = b$

$X \geq 0$

Forma canónica:

$$\begin{array}{lll} \text{Máx. } Z = CX \;; & \text{Máx. } Z = CX \;; & \text{Máx. } Z = CX \\ AX \le b & AX \le b & \left[\dfrac{A}{-A}\right][X] \le \left[\dfrac{b}{-b}\right] \\ AX \ge b & -AX \le -b & X \ge 0 \\ X \ge 0 & X \ge 0 & \end{array}$$

(D_1): Mín. $G = \left[b^T \vdots -b^T\right] \left[\dfrac{W}{V}\right]$

$$\left[A^T \vdots -A^T\right] \left[\frac{W}{V}\right] \ge C^T$$

$W \ge 0\,,\; V \ge 0$

Mín. $G = b^T W - b^T V$

$A^T W - A^T V \ge C^T$

$W \ge 0$; $V \ge 0$ y si hacemos $Y=$

Mín. $G = b^T Y$

$A^T Y \ge C^T$

Y: no restringida en signo,]

depende de los valores de W

4) (P_1): Máx.$Z = CX$

$AX \le b$

$X \le 0$

Forma canónica:

$X = -R$

Máx. $Z = -CR$

$-AR \le b$

$R \ge 0$

(D_1): Mín. $G = b^T Y$

$-A^T Y \ge -C^T$

$Y \ge 0$

ó bien:

Mín. $G = b^T Y$

$A^T Y \leq C^T$

$Y \geq 0$

5) (P_1): Máx.$Z = CX$

$AX \geq b$

$X \leq 0$

Forma canónica:

$X = -R$

Máx. $Z = -CR$

$-AR \geq b$

$R \geq 0$

Máx. $Z = -CR$

$AR \leq -b$

$R \geq 0$

(D_1): Mín. $G = -b^T W$

$A^T W \geq -C^T$

$W \geq 0$

haciendo $-Y = W$

Mín. $G = b^T Y$

$-A^T Y \geq -C^T$

$A^T Y \leq C^T$

$Y \leq 0$

6) (P_1): Máx. $Z = CX$

$AX = b$

$X \leq 0$

Forma canónica:

Máx. $Z = CX$

$AX \leq b$

$AX \geq b$; $-AX \leq -b$

$X \leq 0$

Haciendo $X = -R$

Máx. $Z = -CR$

$-AR \leq b$

$AR \leq -b$

$R \geq 0$

$$(D_1): \text{Mín. } G = \begin{bmatrix} b^T & -b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix} = b^T W - b^T V$$

$$\begin{bmatrix} -A^T & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix} \geq -C^T; \ -A^T W + A^T V \geq -C$$

$W \geq 0$; $V \geq 0$

Mín. $G = b^T (W - V)$

$A^T (V\text{-}W) \geq -C^T$; $A^T (W\text{-}V) \leq C^T$

$W \geq 0$; $V \geq 0$

y haciendo $Y = W - V$

Mín. $G = b^T Y$

$A^T Y \leq C^T$

Y: no restringida en signo

7) (P_1): Máx. $Z = CX$

$AX \leq b$

X: no restringida en signo

Forma canónica:

$X = X' - X''$; $X' \geq 0$; $X'' \geq 0$

Máx. $Z = C\,(X' - X'')$

$A\,(X' - X'') \leq b$

$X' \geq 0$; $X'' \geq 0$

Máx. $Z = \begin{bmatrix} C & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} A & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix} \leq b$

$X' \geq 0$; $X'' \geq 0$

(D_1): Mín. $G = b^T W$

$\begin{bmatrix} A^T \\ -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} C^T \\ -C^T \end{bmatrix}$

$W \geq 0$

Mín. $G = b^T W$

$\begin{bmatrix} A^T W \\ -A^T W \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} C^T \\ -C^T \end{bmatrix}$; $A^T W = C$

$W \geq 0$

Mín. $G = b^T W$

$A^T W = C^T$

$W \geq 0$

8) (P_1): Máx. $Z = CX$

$AX \geq b$

X no restringida en signo

Forma canónica:

$X = X' - X''$; $X' \geq 0$, $X'' \geq 0$

Máx. $Z = C\,(X' - X'')$

$-A\,(X' - X'') \leq -b$

$X' \geq 0$, $X'' \geq 0$

$$\text{Máx. } Z = \begin{bmatrix} C & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -A & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix} \leq -b$$

(D_1): Mín. $G = -b^T W$

$$\begin{bmatrix} -A^T \\ A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} C^T \\ -C^T \end{bmatrix}$$

$W \geq 0$

Mín. $G = -b^T W$

$$\begin{bmatrix} -A^T W \\ A^T W \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} C^T \\ -C^T \end{bmatrix}$$

$W \geq 0$

y haciendo $W = -Y$

Mín. $G = b^T Y$

$$\begin{bmatrix} A^T Y \\ -A^T Y \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} C^T \\ -C^T \end{bmatrix}$$

$Y \leq 0$

ó bien:

Mín. $G = b^T Y$

$A^T Y = C^T$

$Y \leq 0$

9) (P_1): Máx. $Z = CX$

$AX = b$

X no restringida en signo

Forma canónica:

$X = X' - X''$; $X' \geq 0$, $X'' \geq 0$

Máx. $Z = C\,(X' - X'')$

$A\,(X' - X'') = b$

$X' \geq 0$, o bien: Máx. $Z = C\,(X' - X'')$

$A\,(X' - X'') \leq b$

$-A\,(X' - X'') \leq -b$

$X' \geq 0$, $X'' \geq 0$

$$\text{Máx. } Z = [C \;\; -C] \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & -A \\ -A & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$$

$X' \geq 0$; $X'' \geq 0$

$$(D_1): \text{ Min. } G = \begin{bmatrix} b^T & -b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A^T & -A^T \\ -A^T & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} C^T \\ -C^T \end{bmatrix}$$

$W \geq 0$, $V \geq 0$

Mín.$G = b^T W - b^T V = b^T (W - V)$

$A^T W - A^T V \geq C^T$

$-A^T W + A^T V \geq -C^T$

Mín. $G = b^T (W - V)$

$A^T (W - V) \geq C^T$

$A^T (W - V) \leq -C^T$

$W \geq 0$; $V \geq 0$, y haciendo $Y = W - V$

Mín. $G = b^T Y$

$A^T \ Y \geq C^T$

$A^T \ Y \leq C^T$

Y: no restringida en signo

O lo que es lo mismo:

Mín. $G = b^T Y$

$A^T \ Y = C^T$

Y: no restringida en signo

Casos de Mínimo

1) (P_1): Mín. $Z = CX$

$AX \leq b$

$X \geq 0$

Forma canónica:

Máx. $-Z = -CX$

$AX \leq b$

$X \geq 0$

(D_1): Mín. $-G = b^T W$

$A^T W \geq -C^T$

$W \geq 0$

y haciendo $W = -Y$

Mín. $-G = -b^T Y$

$-A^T Y \geq -C^T$

$Y \leq 0$; o lo que es lo mismo:

Máx. $G = b^T Y$

$A^T Y \leq C^T$

$Y \leq 0$

2) (P_1): Mín. $Z = CX$

$AX \geq b$

$X \geq 0$

(D_1): Máx. $G = b^T Y$

$A^T \leq C^T$

$Y \geq 0$

3) (P_1): Mín. $Z = CX$

$AX = b$

$X \geq 0$

Forma canónica:

Máx. $-Z = -CX$

$AX \leq b$

$AX \geq b$

$X \geq 0$

Máx. $-Z = -CX$

$AX \leq b$

$-AX \leq -b$

$X \geq 0$

es decir:

Máx. $-Z = -CX$

$$\begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} [X] \leq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$$

$X \geq 0$

$$(D_1): \text{ Mín. } -G = \begin{bmatrix} b^T & -b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix} = b^T (W - V)$$

$$\begin{bmatrix} A^T & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -C^T \end{bmatrix}$$

$$W \geq 0 \;;\; V \geq 0$$

Mín. $-G = b^T (W - V)$

$A^T W - A^T V \geq -C^T$; $A^T (W - V) \geq -C^T$

$W \geq 0$, $V \geq 0$

y haciendo $V - W = Y$

Mín. $-G = -b^T Y$

$-A^T Y \geq -C^T$

Y: no restringida en signo

ó bien:

Máx. $G = b^T Y$

$A^T Y \leq C^T$

Y: no restringida en signo

) (P_1): Mín. $Z = CX$

$AX \leq b$

$X \leq 0$

Forma canónica:

hacemos $X = -R$

Mín. $Z = -CR$

$-AR \leq b$

$R \geq 0$

Máx. $-Z = CR$

$-AR \leq b$

$R \geq 0$

(D_1): Mín. $G = b^T W$

$-A^T W \geq C^T$

$W \geq 0$

y haciendo $Y = -W$

Mín. $-G = -b^T Y$

$A^T Y \geq C^T$

$Y \leq 0$, o lo que es lo mismo:

Máx. $G = b^T Y$

$A^T Y \geq C^T$

$Y \leq 0$

5) (P_1): Mín. $Z = CX$

$AX \geq b$

$X \leq 0$

Forma canónica:

hacemos $X = -R$

Mín. $Z = -CR$

$-AR \geq b$

$R \geq 0$

Máx. $-Z = CR$

$AR \leq -b$

$R \geq 0$

(D_1): Mín. $G = -b^T Y$

$AY \geq C^T$

$Y \geq 0$; o lo que es lo mismo:

Máx. $G = b^T Y$

$A^T Y \geq C^T$

$Y \geq 0$

6) (P_1): Mín. $Z = CX$

$AX = b$

$X \leq 0$

Forma canónica:

hacemos $X = -R$

Mín. $Z = -CR$

$-AR = b$

$R \geq 0$

Máx. $-Z = CR$

$-AR \leq b$

$AR \leq -b$

$R \geq 0$

ó sea:

Máx. $-Z = CR$

$$\begin{bmatrix} -A \\ A \end{bmatrix} [R] \leq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$$

$R \geq 0$

(D_1) : Mín. $-G = \begin{bmatrix} b^T & -b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix} = b^T ($

$$\begin{bmatrix} -A^T & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} C^T \end{bmatrix}$$

$W \geq 0$; $V \geq 0$

es decir:

Mín. $-G = b^T (W - V)$

$-A^T (W - V) \geq C^T$

$W \geq 0$; $V \geq 0$

y haciendo $Y = -(W - V)$

Mín. $-G = -b^T Y$

$A^T Y \geq C^T$

Y: no restringida en signo

O lo que es lo mismo:

Máx. $G = b^T Y$

$A^T Y \geq C^T$

Y: no restringida en signo

7) (P_1): Mín. $Z = CX$

$AX \leq b$

X no restringida en signo

Forma canónica:

$X = X' - X''$; $X' \geq 0$, $X'' \geq 0$

Mín. $Z = C\,(X' - X'')$

$A\,(X' - X'') \leq b$; $X' \geq 0$; $X'' \geq 0$

$$\text{Mín. } Z = \begin{bmatrix} C & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}$$

$X' \geq 0$; $X'' \geq 0$

$$\text{Máx. } -Z = -\begin{bmatrix} C & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}$$

$X' \geq 0$; $X'' \geq 0$

$$(D_1): \quad \text{Min. } -G = b^T W$$

$$\begin{bmatrix} A^T \\ -A^T \end{bmatrix} [W] \geq \begin{bmatrix} -C^T \\ C^T \end{bmatrix}$$

$$W \geq 0$$

ó sea:

$$\text{Min. } -G = b^T W$$

$$\begin{bmatrix} A^T W \\ -A^T W \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -C^T \\ C^T \end{bmatrix} ; \; A^T W = -C$$

$$W \geq 0$$

y haciendo el cambio $Y = -W$

$$\text{Mín.} -G = -b^T Y$$

$$-A^T Y \geq -C^T$$

$$-A^T Y \leq -C^T$$

$Y \leq 0$; o lo que es lo mismo

$$\text{Máx. } G = b^T Y$$

$$A^T Y \geq C^T$$

$$A^T Y \leq C^T$$

$Y \leq 0$, que equivale a:

$$\text{Máx. } G = b^T Y$$

$$A^T Y = C^T$$

$$Y \leq 0$$

8) (P_1): Mín. $Z = CX$

$AX \geq b$

X no restringida en signo

Forma canónica:

$X = X' - X''$; $X' \geq 0$, $X'' \geq 0$

Mín. $Z = C\,(X' - X'')$

$A\,(X' - X'') \geq b$

$X' \geq 0$; $X'' \geq 0$

Máx. $-Z = -C\,(X' - X'')$

$-A\,(X' - X'') \leq -b$

$X' \geq 0$; $X'' \geq 0$

$$\text{Máx. } -Z = \begin{bmatrix} -C & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -A & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -b \end{bmatrix}$$

$X' \geq 0$; $X'' \geq 0$

(D_1): Min. $-G = -b^T Y$

$$\begin{bmatrix} -A^T \\ A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -C^T \\ C^T \end{bmatrix}$$

$Y \geq 0$

Min. $-G = -b^T Y$

$$\begin{bmatrix} -A^T Y \\ A^T Y \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -C^T \\ C^T \end{bmatrix}$$

$Y \geq 0$

o lo que es lo mismo:

Máx. $G = b^T Y$

$A^T Y \leq C^T$

$A^T Y \geq C^T$

$Y \geq 0$

ó sea:

Máx. $G = b^T Y$

$A^T \ Y = C^T$

$Y \leq 0$

9) (P_1): Mín. $Z = CX$

$AX = b$

X no restringida en signo

$X = X' - X''$; $X' \geq 0$, $X'' \geq 0$

Mín. $Z = C\ (X' - X'')$

$A\ (X' - X'') = b$

$X' \geq 0$; $X'' \geq 0$

o bien:

Máx. $-Z = -C\ (X' - X'')$

$A\ (X' - X'') \leq b$

$-A\ (X' - X'') \leq -b$

$X' \geq 0$; $X'' \geq 0$

o en forma matricial:

$$\text{Máx. } -Z = \begin{bmatrix} -C & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & -A \\ -A & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$$

$X' \geq 0$; $X'' \geq 0$

$$(D_1): \quad \text{Min.} \ -G = \begin{bmatrix} b^T & -b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A^T & -A^T \\ -A^T & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -C^T \\ C^T \end{bmatrix}$$

$$W \geq 0 \ ; \ V \geq 0$$

Mín. $-G = b^T W - b^T V = b^T (W-$

$A^T \ W - A^T V \geq -C^T$

$-A^T \ W + A^T V \geq C^T$

$W \geq 0 \ ; \ V \geq 0$

Mín. $-G = b^T (W-V)$

$A^T \ (W - V) \geq -C^T$

$A^T \ (W - V) \leq -C^T$

y haciendo $V - W = Y$

Mín. $-G = -b^T Y$

$-A^T \ Y \geq -C^T \ ; \ A^T \ Y \geq C^T$

$-A^T \ Y \leq -C^T \ ; \ A^T \ Y \geq C^T$

Y: no restringida en signo

o lo que es lo mismo:

Máx. $G = b^T Y$

$A^T \ Y = C^T$

Y: no restringida en signo

CONCLUSIONES

Podemos representar así las distintas soluciones anteriores:

CASOS DE MÁXIMO

Signos primal	*Signos dual*
R.: $\leqslant$	$\geqslant$
V.: $\geqslant$	$\geqslant 0$
R.: $\leqslant$	$\geqslant$
V.: $\geqslant$	$\leqslant 0$
R.: $=$	$\geqslant$
V.: $\geqslant$	No restr.
R.: $\leqslant$	$\leqslant$
V.: $\geqslant$	$\geqslant 0$
R.: $\geqslant$	$\leqslant$
V.: $\leqslant$	$\leqslant 0$
R.: $=$	$\leqslant$
V.: $\leqslant$	No restr.
R.: $\leqslant$	$=$
V.: No restr.	$\geqslant 0$
R.: $\geqslant$	$=$
V.: No restr.	$\leqslant 0$
R.: $=$	$=$
V.: No restr.	No restr.

CASOS DE MÍNIMO

Signos primal	*Signos dual*
R.: $\leqslant$	$\leqslant$
V.: $\geqslant$	$\leqslant 0$
R.: $\geqslant$	$\leqslant$
V.: $\geqslant$	$\geqslant 0$
R.: $=$	$\leqslant$
V.: $\geqslant$	No restr.
R.: $\leqslant$	$\geqslant$
V.: $\leqslant$	$\leqslant 0$
R.: $\geqslant$	$\geqslant$
V.: $\leqslant$	$\geqslant 0$
R.: $=$	$\geqslant$
V.: $\leqslant$	No restr.
R.: $\leqslant$	$=$
V.: No restr.	$\leqslant 0$
R.: $\geqslant$	$=$
V.: No restr.	$\geqslant 0$
R.: $=$	$=$
V.: No restr.	No restr.

Claves:

R. (restricciones)
V. (variables)
No restr. (no restricción en signo)

R	R	Mismo sentido
V	V	Distinto sentido

$=$	$=$
No restr.	No restr.

R	R	Distinto sentido
V	V	Mismo sentido

REGLAS OBTENIDAS

1ª) Cada restricción primal da lugar a una variable dual, por lo que habrá tantas variables duales como restricciones primales.

2ª) Cada variable primal da lugar a una restricción dual, por lo que habrá tantas restricciones duales como variables primales.

3ª) A la función objetivo primal *Máx. Z*, se corresponde una función objetivo dual *Mín. G* y a cada función objetivo primal *Mín. X*, se corresponde una dual *Máx. G*. (Añadimos que los signos de los coeficientes de las respectivas variables duales serán los de los "oportunos" vectores del primal, con independencia de que en el óptimo dichas variables deban tomar valores mayores que cero, menores que cero o ser libres en signo)[1].

4ª) ***Casos en que el primal es un máximo:***

a) Cada restricción del primal determina una variable dual de signo (sentido) contrario al suyo, y si aquélla es igualdad, la variable dual resultante es no restringida en signo (libre).

Restr. $(P_1) \leq \longrightarrow$ variab. $(D_1) \geq 0$

Restr. $(P_1) \geq \longrightarrow$ variab. $(D_1) \leq 0$

Restr. (P_1) igualdad $\longrightarrow$ variab. (D_1) no restringida en signo

b) Cada variable primal determina una restricción dual del mismo signo (sentido) y si aquélla es no restringida en signo, la restricción dual resultante es una igualdad.

Variab. $(P_1) \leq 0 \longrightarrow$ restr. $(D_1) \leq$

Variab. $(P_1) \geq 0 \longrightarrow$ restr. $(D_1) \leq$

Variab. (P_1) no restr. $\longrightarrow$ restr. igualdad

5ª)***Casos en que el primal es un máximo:***

a) Cada restricción del primal determina una variable dual del mismo signo (sentido), y si aquélla es una igualdad, la variable dual resultante es no restringida en signo (libre).

---

[1] La forma "SIMÉTRICA" de la dualidad es la que se obtiene a partir de un programa primal en su forma canónica.

Algunos autores en los desarrollos que hemos hecho anteriormente no hacen el cambio de variable, por ejemplo W = -Y, para que la formulación del programa solución quede con signos positivos. En tal caso,la *variable que para nosotros aparece al final como "menor que cero", según ellos aparecerá como* "mayor que cero" y sus respectivos coeficientes en la función objetivo y en la matriz *A* irán precedidos del signo menos. Volveremos a referirnos a ello con mayor extensión.

Restr. $(P_1) \geq \longrightarrow$ variab. $(D_1) \geq 0$

Restr. $(P_1) \leq \longrightarrow$ variab. $(D_1) \leq 0$

Restr. (P_1) igualdad $\longrightarrow$ variab. (D_1) no restringida en signo

b) Cada variable primal determina una restricción dual de signo (sentido) contrario, y si aquélla es no restringida en signo, la restricción dual correspondiente es una igualdad.

Variab. $(P_1) \leq 0 \longrightarrow$ restr. $(D_1) \geq$

Variab. $(P_1) \geq 0 \longrightarrow$ restr. $(D_1) \leq$

Variab. (P_1) no restr. $\longrightarrow$ restr. igualdad

Creemos oportuno hacer las siguientes matizaciones para la correcta aplicación de las anteriores reglas:

En toda la casuística tratada hemos considerado como de única naturaleza las restricciones que componían el "bloque":

$$AX \geq b$$

es decir, que todas tenían igual signo (sentido de la desigualdad, en su caso); sin embargo, la realidad puede —y de hecho lo hace— ofrecer pluralidad de signos en un mismo problema. En tal caso, a cada grupo "homogéneo" de restricciones ($AX \geq b$; $AX=b$ ó $AX \leq b$) le aplicaremos las reglas conocidas con independencia del otro grupo u otros dos, con los que haremos lo mismo.

Demostración:

Máx. $Z = CX$

$A'X \leq b'$

$A''X \geq b''$ Forma canónica: Máx. $Z = CX$

$A'''X = b'''$ $A'X \leq b'$

$X \geq 0$ $-A'X \leq -b''$

$A'''X \leq b'''$

$-A'''X \leq -b'''$

$X \geq 0$

en forma matricial:

$$\text{Máx. } Z = CX$$

$$\begin{bmatrix} A' \\ -A'' \\ A''' \\ -A''' \end{bmatrix} X \leq \begin{bmatrix} b' \\ -b'' \\ b''' \\ -b''' \end{bmatrix}$$

$$X \geq 0$$

$$\text{Dual : Mín. } G = \begin{bmatrix} b'^T & -b''^T & b'''^T & -b'''^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A'^T & -A''^T & A'''^T & -A'''^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{bmatrix} \geq C^T$$

$$W_1 \geq 0\ ;\ W_2 \geq 0\ ;\ W_3 \geq 0\ ;\ W_4 \geq 0$$

$$\text{Mín. } G = b'^T W_1 - b''^T W_2 + b'''^T W_3 - b'''^T W_4 = b'^T W_1 - b''^T W_2 +$$
$$+ b'''^T (W_3 - W_4)\ A'^T W_1 - A''^T W_2 + A'''^T (W_3 - W_4) \geq C^T$$

$$W_1 \geq 0\ ;\ W_2 \geq 0\ ;\ W_3 \geq 0\ ;\ W_4 \geq 0$$

y haciendo:

$W_1 = Y_1$

$-W_2 = Y_2$

$W_3 - W_4 = Y_3$

$$\text{Mín. } G = b'^T Y_1 + b''^T Y_2 + b'''^T Y_3$$

$$A'^T Y_1 + A''^T Y_2 + A'''^T Y_3 \geq C^T$$

$Y_1 \geq 0$

$Y_2 \leq 0$

Y_3: no restringida en signo

Resolución con la aplicación de las reglas

1) Máx. Z = CX $\longrightarrow$ Mín. $G = b^T Y$

2) Tres restr. primal $\longrightarrow$ Tres variables duales

$\geq \longrightarrow Y_2 \leq 0$

$= \longrightarrow Y_3$ no restr.

3) Una variab. prim. $\geq 0 \longrightarrow$ Una restr. dual del mismo signo $\geq$ que:

$$\begin{aligned}
&\text{Mín. } G = b'^{\,T} Y_1 + b''^{\,T} Y_2 + b'''^{\,T} Y_3 \\
&A'^{\,T} Y_1 + A''^{\,T} Y_2 + A'''^{\,T} Y_3 \geq C^T \\
&Y_1 \geq 0 \\
&Y_2 \leq 0 \\
&Y_3\text{: no restringida en signo}
\end{aligned}$$

RELACIONES ENTRE PRIMAL Y DUAL (Teoremas)

Teorema de la dualidad

"Si un problema primal (dual) tiene una solución óptima finita, su correspondiente dual (primal) tiene una solución óptima finita y los extremos de tales funciones lineales son iguales", es decir:

$$\begin{array}{ccc}
(P_1) & & (D_1) \\
\text{Máx. } Z & = & \text{Mín. } G \\
\text{Mín. } Z & = & \text{Máx. } G
\end{array}$$

DEMOSTRACIÓN

Definiciones

$\bar{Z}$ = Vector fila de los rendimientos indirectos:

$$[Z_1 \ Z_2 \ \dots \ Z_{m+n}]$$

W = Vector fila de los rendimientos marginales:

$$[W_1 \; W_2 \; ... \; W_{m+n}]$$

$\bar{X}$ = Vector fila $[\bar{X}_1 \; \bar{X}_2 \; ... \; \bar{X}_{n+m}]$, siendo $\bar{X}_j$ el vector columna $\begin{bmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \\ \vdots \\ X_{mj} \end{bmatrix}$ de los coeficientes de la combinación lineal equivalente de P_j.

B = Base óptima del primal $[P_1 \; P_2 \; ... \; P_m]$

X^0 = Solución óptima del primal

por lo tanto:

$$P_j = B\bar{X}_j \; ; \; A = B\bar{X} \; ; \; \bar{X} = B^{-1}A$$

$$X^0 = B^{-1}b \; ; \; b = BX^0$$

$$f(X^0) = \text{Máx. } Z = C_0 X^0$$

$$\bar{Z} = C_0\bar{X} = C_0 B^{-1}A$$

$$\bar{W} = C - \bar{Z} = C - C_0 B^{-1}A$$

y si estamos en el máximo: $\bar{W} \leq 0$, o sea:

$$\bar{W} = C - C_0\bar{X} = C - C_0 B^{-1}A \leq 0$$

lo que implica:

$$C_0\bar{X} = C_0 B^{-1}A \geq C$$

Sea $Y^0 = \begin{bmatrix} Y_1^0 \\ Y_2^0 \\ \vdots \\ Y_m^0 \end{bmatrix}$ una solución del dual, por lo que: $Y^{0T} = \begin{bmatrix} Y_1^0 & Y_2^0 & \dots & Y_m^0 \end{bmatrix}$

Definimos $Y^T = C_0\, B^{-1}$ y postmultiplicando por A:

$$Y^T A = C_0\, B^{-1} A = C_0\, X \geq C$$

por lo que $Y^T A \geq C$, o bien $A^T\, Y \geq C^T \longrightarrow$ primer bloque de restricciones del dual, y como $Y^T = C_0\ B^{-1}$, implica que $Y \geq 0 \longrightarrow$ segundo bloque de restricciones del dual[2], por lo que Y^T es una solución del dual.

Valor de la función objetivo dual para la solución Y:

$$G = b^T\, Y = Y^T\, b = C_0\, B^{-1}\, b = C_0\, X^0 = \text{Máx. } Z$$

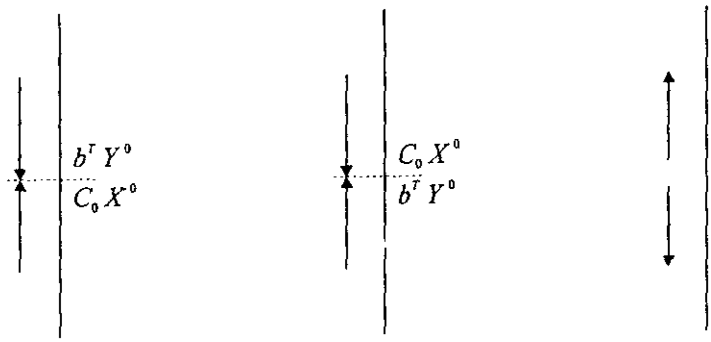
así, pues, *para la ecuación Y^T, el valor de la función objetivo dual es igual al óptimo del primal* (*).

Por otra parte, $AX \leq b$ y $G{=}Y^T\, b$, de donde $G \geq Y^T\, AX$ para cualesquiera X e Y^T y como $Y^T A \geq C$, postmultiplicando por X, tenemos $Y^T\, AX \geq CX{=}Z$ (cualquiera), con lo que $G \geq Z$, o lo que es lo mismo, $f\,(Y^T) \geq f\,(X)$, que enunciamos diciendo que *el valor de la función objetivo dual es siempre mayor que el de la función objetivo primal* (**).

De la síntesis de los enunciados (*) y (**), se deriva que *de no existir soluciones acotadas en un primal y en su dual, los valores que toma la función objetivo de cada uno en los óptimos, son las mismas.*

[2] $C_0\, B^{-1}$ es el vector de los rendimientos indirectos de las variables unitarias (generalmente de holgura) en una solución óptima de un máximo, en donde todos los rendimientos marginales son nulos o negativos, por lo que estén o no en la base, dichas variables tendrán rendimientos indirectos no negativos.

Tendremos, no obstante, que hacer una matización. Nuestro anterior desarrollo se ha basado en tomar el primal como un problema de máximo; sin embargo, si lo tomamos como un mínimo, los enunciados (*) y (**) han de invertirse pero, lógicamente, la intersección de ambos lleva a la misma síntesis[3].



(P_1)--- Máx. (P_1)--- Mín.

Comportamientos posibles de un par de problemas Primal-Dual

	Programa primal factible	Programa primal infactible
Programa dual factible	Ambas soluciones óptimas existen y son iguales	Programa dual no acotado
Programa dual infactible	Programa primal no acotado	Ambos no tienen solución

Teorema de la holgura complementaria

A) Este teorema fija las condiciones "necesarias y suficientes" para que dos soluciones X e Y sean óptimas, respectivamente, de (P_1) y (D_1).

B) En segundo lugar, permite establecer unas relaciones entre las variables primales, duales y las de holgura, en el óptimo, de relevantes implicaciones económicas.

[3] Al hacer extensivo el teorema de la dualidad al caso del Dual Asimétrico, siguiendo el mismo desarrollo que hacemos con el simétrico, no podremos demostrar que $C_0B^{-1} \geq 0$ pero, teniendo en cuenta que en este caso Y es libre en signo, es condición suficiente para ser solución del problema que $Y^T A = C_0B^{-1} \geq C$.

Podemos enunciarlo del siguiente modo:

Sean:

$$(P_1) \text{ ——— } \text{Máx. } Z = CX$$
$$AX \leq b$$
$$X \geq 0$$

$$(D_1) \text{ ——— } \text{Mín. } G = b^T Y$$
$$A^T Y \geq C^T$$

$Y \geq 0$; si X^0 e Y^0 son soluciones, respectivamente, la condición *necesaria* y *suficiente* para que sean óptimas es:

$$Y^{0T} (b - AX^0) = 0$$
$$X^{0T} (A^T Y^0 - C^T) = 0$$ [4]

DEMOSTRACIÓN

Al ser X^0 e Y^0 soluciones de (P_1) y (D_1), se cumple:

$$AX^0 \leq b \quad ; \quad X \geq 0$$
$$A^T Y^0 \geq C^T \; ; \; Y \geq 0; \text{ o bien:}$$
$$b - AX^0 \geq 0$$
$$A^T Y^0 - C^T \geq 0$$

y si multiplicamos la primera por Y^{0T} y la segunda por X^{0T}, no se afecta el sentido de la desigualdad:

$$M = Y^{0T} (b - AX^0) \geq 0$$
$$N = X^{0T} (A^T Y^0 - C^T) \geq 0$$
$$M + N = Y^{0T} (b - AX^0) + X^{0T} (A^T Y^0 - C^T) \geq 0$$
$$= Y^{0T} b - Y^{0T} AX^0 + X^{0T} A^T Y^0 - X^{0T} C^T \geq 0 \quad \text{(los}$$

términos 2 y 3 son iguales)

$$M + N = Y^{0T} b - X^{0T} C^T = b^T Y^0 - CX^0 \geq 0$$

[4] En el caso de un problema dual simétrico, el enunciado sería:
$Y^T (AX^0 - b) = 0 \; ; \; X^T (C^T - A^T X^0) = 0$
y su demostración similar a la que hacemos para el primer caso.

Sabemos que $Z = CX^0$; $b^T Y^0 = G$, y como se demostró en el teorema anterior: $G=Z$ en el óptimo, tenemos que:

$$M + N = b^T Y^0 - CX^0 = 0$$

Como hemos partido del supuesto $M \geq$ y $N \leq 0$, necesariamente sucederá que:

$$M = Y^{0T} (b - AX^0) = 0$$

$$N = X^{0T} (A^T Y^0 - C^T) = 0 \qquad \text{c.q.d.}$$

Este teorema, denominado "de la holgura complementaria", tiene un relevante significado económico, que más adelante analizaremos. Sus implicaciones inmediatas son:

1) $Y^0 > 0$ implica $AX^0 = b$

2) $AX^0 < b$ implica $Y^0 = 0$

3) $X^0 > 0$ implica $A^T Y^0 = C^T$

4) $A^T Y^0 > C^T$ implica $X^0 = 0$

Otra forma de expresar estas conclusiones es la siguiente:

$$X^0_{n+1} Y^0_1 = 0 \ ; X^0_{n+2} Y^0_2 = 0 \ ; \ldots\ldots$$

$$Y^0_{m+1} X^0_1 = 0 \ ; Y^0_{m+2} X^0_2 = 0 \ ; \ldots\ldots$$

es decir:

"Cuando en un óptimo una variable de holgura del primal (dual) alcance un valor positivo, la variable dual (primal) correspondiente a la restricción a que pertenezca aquélla será igual a cero". O también, "cuando en un óptimo una variable del primal (dual) alcance un valor positivo, la variable de holgura dual (primal) que pertenece a la restricción asociada a aquélla tomará el valor cero".

A pesar de la gran importancia económica de este teorema, es verdaderamente "infrecuente", por parte de los tratadistas, reparar en que tal como se ha demostrado y enunciado resulta incompleto, hasta el punto de dar pie para cuestionar prácticamente todo su valor.

El que un producto de dos factores no negativos sea cero implica, sin lugar a dudas, que si uno es positivo el otro es cero, pero no queda excluída la posibilidad de que ambos sean cero. En este caso, el contenido explicativo del teorema se disiparía, lo mismo que buena parte de sus implicaciones económicas. Si queremos recuperar su valor pleno, tendremos que demostrar que tal posibilidad no es posible, es decir:

$$(b - AX^0) + Y^0 \geq 0$$
$$(A^T Y^0 - C^T) + X^0 \geq 0$$

DEMOSTRACIÓN

Sea el siguiente sistema de desigualdades:

$$b - AX \geq 0$$
$$A^T\ Y - C^T \geq 0$$
$$-Y^T b + CX \geq 0$$

las dos primeras corresponden a las restricciones (P_1) y (D_1), Máx. y Mín., respectivamente, y la tercera, según ya conocemos, se da en el caso inverso (Mín. y Máx.).

Si multiplicamos en las dos primeras a (b) y (C^T) por una variable (t), las desigualdades siguen cumpliéndose con tal que esta última alcance el valor adecuado; es decir:

$$tb - AX \geq 0$$
$$A^T\ Y - tC^T \geq 0$$
$$-Y^T b + CX \geq 0 \text{ , siendo } Y \geq 0;\ X \geq 0;\ t \geq 0$$

sistema que también puede expresarse así:

$$\begin{bmatrix} 0 & -A & b \\ A^T & 0 & -C^T \\ -b^T & C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \\ t \end{bmatrix} \geq 0$$

La matriz de coeficientes es "antisimétrica", o sea: $M = -M^T$ y, partiendo de un Lema de "Minkowsky y Fargas", se llega a un teorema matemático cuyo enunciado es: "Dadas las desigualdades $AX \geq 0$, $X \leq 0$, donde A es una matriz antisimétrica $(-A = A^T)$, hay una solución X que cumple:

$$A\bar{X} + \bar{X} > 0 \text{ "}$$

que, aplicado al caso que nos ocupa, resulta:

$$\begin{pmatrix} 0 & -A & b \\ A^T & 0 & -C^T \\ -b^T & C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{X} \\ \bar{t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{X} \\ \bar{t} \end{pmatrix} > 0$$

es decir:

$$-A\bar{X} + \bar{t}b + \bar{Y} > 0$$

$$A^T\bar{Y} - C^T t + \bar{X} > 0$$

$$-b^T\bar{Y} + C\bar{X} + \bar{t} > 0$$

puede suceder que $t \geq 0$, ó, $t = 0$, supongamos que se da lo primero. Si dividimos por (t) cada inecuación, el sistema sigue cumpliéndose:

$$-A\frac{\bar{X}}{t} + b + \frac{\bar{Y}}{t} > 0$$

$$A^T\frac{\bar{Y}}{t} - C^T + \frac{\bar{X}}{t} > 0$$

$$-b^T\frac{\bar{Y}}{t} + C\bar{X} + 1 > 0$$

y haciendo $\frac{\bar{X}}{t} = X^*$; $\frac{\bar{Y}}{t} = Y^*$; $\frac{t}{t} = 1$ (las tres mayores que cero), el sistema inicial quedaría:

$$b - AX^* \geq 0$$

$$A^T\ Y^* - C^T \geq 0$$

$$-b^T\ Y^* + CX^* \geq 0$$

Las dos primeras inecuaciones del sistema corresponden a las respectivas restricciones (P_1) y (D_1) (Máx., Mín.) y la tercera es típica cuando el primal es Mínimo y el dual Máximo, por lo que para darse las tres simultáneamente esta última se verificará como igualdad, lo que sólo sucede en el óptimo. Así pues:

$$X^* = X^0$$
$$Y^* = Y^0$$

y si tal conclusión la llevamos a (*) de la página anterior, sustituyendo $\frac{\bar{X}}{t}$ por X^0 y $\frac{\bar{Y}}{t}$ por Y^0) llegamos a:

$$(b - AX^0) + Y^0 > 0$$
$$(A^T Y^0 - C^T) + X^0 > 0$$

quedando así demostrado el *Teorema de la holgura complementaria* en los dos sentidos, o sea: "... y cuando la variable de holgura del primal (dual) es cero, la correspondiente variable dual (primal) es positiva, etc.".

RELACIONES QUE EXISTEN EN LA SOLUCIÓN ÓPTIMA ENTRE LAS VARIABLES DEL DUAL (PRIMAL) Y LOS VALORES DE LOS RENDIMIENTOS DIRECTOS Y MARGINALES DEL PRIMAL (DUAL)

Definición: Llamaremos variables duales estructurales a las generadas directamente por las restricciones del primal, es decir:

$$Y_1 \ ; Y_2 \ ; \ \ldots\ldots \ ; \ Y_m$$

y variables de holgura duales a las:

$$Y_{m+1}; \ Y_{m+2}; \ \ldots\ldots \ ; \ Y_{m+n}$$

y, oportunamente, podremos decir lo mismo de las variables del primal.

Con anterioridad hemos demostrado que en el óptimo se cumple que:

$$\text{Máx. } Z = \text{Mín. } G = C_0 X^0 = b^T Y^0$$

y como $X = B^{-1} b$, sustituyendo,

$$C_0 B^{-1} b = b^T Y^0 = Y^{0T} b$$
$$C_0 B^{-1} = Y^{0T}$$

sabemos que:

$$C_0 B^{-1} [A \ \vdots \ I] = [C_0 B^{-1} \ \vdots \ C_0 B^{-1}] = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n \ \vdots \ z_{n+1} \ \dots \ z_{n+m}]$$
$$C_0 B^{-1} = z_{n+1} \ z_{n+2} \ \dots \ z_{n+m}$$

Estamos, pues, en condiciones de hacer el siguiente enunciado:

1) "Si el primal es un máximo canónico (problema simétrico), las variables duales estructurales son iguales en valor a los rendimientos indirectos de las variables de holgura (o de otras con vectores unitarios, si las hubiere). Y si el primal es un mínimo (igualmente en el caso simétrico), las respectivas variables duales estructurales son iguales a los rendimientos indirectos de las variables de holgura del primal cambiados de signo, con la excepción de ser del mismo signo las correspondientes con posibles variables primales unitarias y positivas".

Así pues:

$$Y_1 = z_{n+1} \ ; \ Y_2 = z_{n+2} \ ; \ \dots\dots \ ; \ Y_m = z_{n+m}$$

$$Y_1 = z_{n+1} \ ; \ Y_2 = z_{n+2} \ ; \ \dots\dots \ ; \ Y_m = z_{n+m}$$

Por otra parte, si el primal es:

$$\text{Máx. } Z = CX$$
$$AX \leq b$$
$$X \geq 0$$

[5] Esta segunda parte del enunciado no ha sido demostrada, pero resulta evidente al tener en cuenta que las variables de holgura del mínimo considerado se corresponden con vectores unitarios negativos.

su dual desarrollado será:

$$
\begin{array}{llllllll}
a_{11} Y_1 + a_{21} Y_2 + \ldots + a_{m1} Y_m & - Y_{m+1} & & & = c_1 \\
a_{12} Y_1 + a_{22} Y_2 + \ldots + a_{m2} Y_m & & - Y_{m+2} & & = c_2 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
a_{1n} Y_1 + a_{2n} Y_2 + \ldots + a_{mn} Y_m & & \cdot & + Y_{m+n} & = c_n
\end{array}
$$

también puede expresarse de la forma:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\
a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} & 0 & -1 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} & \ldots & \ldots & \ldots & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \\ Y_{m+1} \\ \vdots \\ Y_{m+n}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n
\end{bmatrix}
$$

o lo que es igual:

$$
[A^T \; -I] \begin{bmatrix} Y \\ Y_h \end{bmatrix} = [C^T]
$$

y operando:

$$
A^T Y - IY_h = C^T
$$

$$
Y^T A - Y^T_h = C
$$

y como sabemos que en el óptimo $Y^T = C_0 B^{-1}$

$$C_0 B^{-1} A - Y^T_h = C$$
$$C_0 B^{-1} A - C = Y^T_h$$

por lo tanto:

$$Y_{m+1} = -W_1 \; ; \; Y_{m+2} = -W_2 \; ; \; \ldots\ldots \; ; \; Y_{m+n} = -W_n$$

lo que permite hacer el siguiente enunciado:

2) "En el óptimo, si el primal es un máximo canónico (simét.) las variables de holgura del dual toman el valor de los rendimientos marginales —cambiados de signo— de las variables estructurales del primal. Y si en el mismo caso simétrico, el primal es un mínimo, las variables de holgura del dual tomarán el valor de los mismos rendimientos del primal, pero con su signo"[6].

El caso de duales asimétricos

Sea el primal:

$$\begin{array}{lll} \text{Máx. } Z = CX & & \\ AX = b & & \\ X \le 0 & \text{su dual será:} & \text{Mín. } G = b^T Y \\ & & A^T Y \le C^T \\ & & Y\text{: libre en signo} \end{array}$$

Máx. $Z = CX$
$AX = b$
X _ 0 su dual será:Mín. $G = b^T Y$
$A^T Y$ _ C^T

[6] Esta segunda parte es evidente si t enemos en cuenta que, en tal caso, el dual será un máximo y las variables de holgura positivas.

Las restricciones del dual pueden expresarse:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \\ Y_{m+1} \\ \vdots \\ Y_{m+n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$[A^T \vdots I] \begin{bmatrix} Y \\ Y_h \end{bmatrix} = [C^T] \; ; \quad A^T Y + I Y_h = C^T$$

o bien:

$$Y^T A + Y^T_h = C$$

y teniendo en cuenta que en el óptimo

$$C_0 X^0 = b^T Y^0$$
$$C_0 B^{-1} b = Y^T b$$
$$C_0 B^{-1} = Y^T$$

sustituímos Y^T por su valor:

$$C_0 B^{-1} A + Y^T_h = C$$

o sea:

$$Y_h^T = C - C_0 B^{-1} A = \overline{W}$$

es decir, en el óptimo:

$$Y_{m+1} = W_1 \; ; \; Y_{m+2} = W_2 \; ; \; \dots\dots \; Y_{m+n} = W_n$$

Si el primal es:

Máx. $Z = CX$

$AX = b$

$X \geq 0$ el dual será: Mín. $G = b^T Y$

$A^T.Y \geq C^T$

Y: no restringida

y como las variables de holgura tienen, en este caso, vectores unitarios negativos, siguiendo el anterior desarrollo obtenemos:

$$Y_h^T = C_0 B^{-1} A - C = -\bar{W}$$

es decir:

$$Y_{m+1} = -W_1 \;\; ; \; Y_{m+2} = -W_2 \; ; \;\; \ldots\ldots \;\; Y_{m+n} = -W_n$$

Finalmente, en los problemas asimétricos, tanto si el primal es un mínimo como si es un máximo, no existen variables de holgura primales (X_{m+1} ; X_{m+2} ; . . . ; X_{m+n}), por lo que no tiene sentido hablar de rendimientos indirectos ni marginales de las mismas. Consecuentemente, los valores de las variables duales estructurales no podrán relacionarse con los rendimientos de aquéllas como hemos hecho en (1), podremos, sin embargo, relacionarlos con tales rendimientos correspondientes a posibles variables estructurales del primal que tuviesen asociados vectores unitarios en la matriz A.

(En el análisis de la significación económica de la "Dualidad" volveremos sobre estos detalles).

BIBLIOGRAFÍA

BUFFA, E.S.; DYER, J.S.: *Ciencias de la Administración e Investigación de Operaciones.* México: Limusa.

CHARNES, A.; COOPER, W.W.: *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming.* Nueva York: Wiley.

GASS, S.I.: *Programación Lineal.* México: CECSA.

KAUFMANN, A.: *Métodos y modelos de la investigación de operaciones.* México: CECSA.

LLEWELLYN, R.W.: *Programación Lineal.* Barcelona: Marcombo.

PRAWDA, J.W.: *Métodos y modelos de investigación de operaciones.* México: Limusa.

ROMAKINE, M.I.: *Eléments d'algébre linéaire et de programation linéaire.* París: Eyrolles.

SUÁREZ SUÁREZ, A.S.: *Aplicaciones económicas de la programación lineal.* B.U.E., Guadiana de Publicaciones.