PERT y CPM:
Programación y control de proyectos

Serafín PIÑEIRO FERNÁNDEZ
Catedrático EUEE
Universidad Complutense de Madrid

1. INTRODUCCIÓN

Dentro del amplio y sugestivo campo de la Investigación Operativa, cuyo desarrollo se hace especialmente visible a partir de los años 50, se han consolidado numerosas técnicas operativas que si bien surgen, en un principio, fuera del ámbito de la empresa industrial y comercial, pronto se incorporaron al mismo dando una respuesta efectiva, incluso espectacular, a la resolución de numerosos problemas de optimización que frecuentemente se dan en las actividades empresariales. Por otra parte, los avances producidos en las últimas décadas en el campo de la informática, han puesto al alcance del empresario aplicaciones que le facilitan la utilización de las técnicas de programación lineal, líneas de espera, juegos, programación y control de proyectos, simulación, inventario, reemplazo, etc.

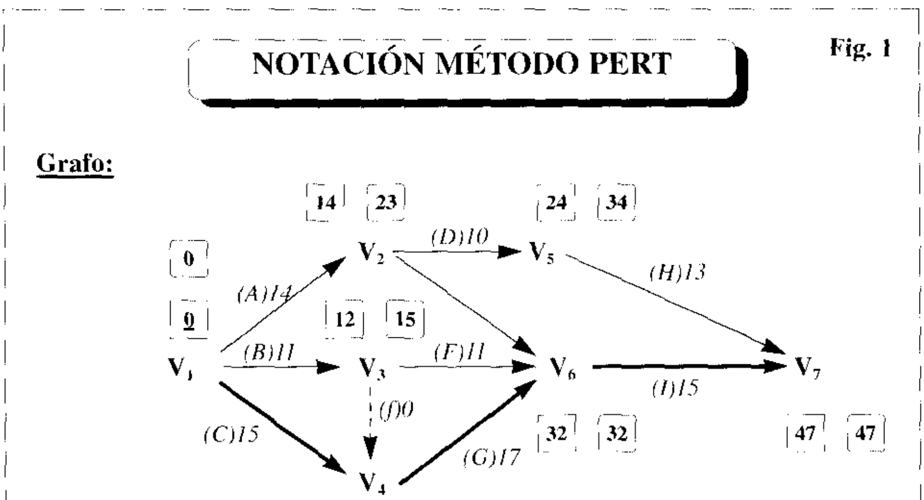
Todas estas técnicas operativas contribuyen muy positivamente a la toma de decisiones relacionadas con problemas de optimización que se pueden presentar, no obstante, bajo situaciones de certidumbre (en las que el decisor entiende que cada curso de acción conduce a un solo resultado), de riesgo (si entiende que pueden darse resultados alternos, cuyas probabilidades se conocen o se pueden suponer) y de incertidumbre (cuando no sabe qué resultados se pueden producir ni siquiera en términos probabilísticos). Para RIGGS, J. L. (1973), *un paso más allá del riesgo, hacia lo desconocido, es la entrada en la incertidumbre.*

Admitiendo la importancia que todas estas técnicas tienen en el campo económico de la empresa, se hace a continuación una exposición de aquéllas que están relacionadas con la programación y control de proyectos y muy concretamente las que se conocen bajo las siglas PERT (Project Evaluation and Review Technique) y CPM (Critical Path Method).

Cuadernos de Estudios Empresariales, n.° 5, 271-291. Servicio de Publicaciones UCM. Madrid, 1995

La aplicación efectiva del método PERT, que tuvo lugar en 1957 en el seno de la armada norteamericana con el proyecto «Polaris» de fabricación de proyectiles para submarinos atómicos, permitió realizarlo en 3 años frente a los 5 previstos inicialmente.

Se trata de una técnica que pretende optimizar el desarrollo y la ejecución de un proyecto complejo mediante el análisis previo de todas y cada una de las múltiples actividades o tareas que lo integran y que están interrelacionadas temporalmente. El PERT es una derivación de la Teoría Grafos o Redes, ya que utiliza una representación basada en un grafo –(figura geométrica formada por una serie de puntos «vértices» y un cierto número de segmentos «aristas o arcos» que unen dos vértices)– conexo, orientado, sin circuitos y sin bucles en el que los vértices denominan sucesos, acontecimientos o etapas, en tanto que los arcos representan actividades, tareas u operaciones. El grafo PERT, por tanto, pone de manifiesto la relación de dependencia entre las actividades y las situaciones configuradoras del proyecto cuya ejecución se pretende optimizar.



El grafo anterior responde a un proyecto comprensivo de 9 actividades reales y una actividad ficticia que tienen que ejecutarse en un determinado orden y que implican un tiempo medio (Tiempo Pert) expresado en días tal como se detalla en la siguiente **Tabla n.° 1.**

Características del Proyecto. *Tabla núm. 1*		
Actividad	**Tiempo medio (T)**	**Interrelaciones**
A (V_1 - V_2)	14 Días	< D y E
B (V_1 - V_3)	12	< F y G
C (V_1 - V_4)	15	< G
D (V_2 - V_5)	10	< H
E (V_2 - V_6)	9	< I
F (V_3 - V_6)	11	< I
G (V_4 - V_6)	17	< I
H (V_5 - V_7)	13	–
I (V_6 - V_7)	15	–

Dado que la actividad B precede a F y G, se tiene que establecer una *actividad ficticia (f) 0* sin duración temporal que une los vértices V_3 y V_4. El símbolo < significa que una actividad precede a otra u otras.

El grafo PERT tiene un número finito de actividades, es conexo, no tiene circuitos y entre cada par de vértices existe un sólo arco. Se denomina camino una sucesión de arcos orientados en el mismo sentido. Para el proyecto considerado hay, por lo tanto, los siguientes caminos:

V1-V2-V5-V7 con una duración de 37 días.
V1-V2-V6-V7 con una duración de 38 días.
V1-V3-V6-V7 con una duración de 38 días.
V1-V3-V4-V6-V7 con una duración de 44 días.
V1-V4-V6-V7 con una duración de 47 días.

Este último, con el mayor número de días, define el denominado *camino crítico*, es decir, es el camino de mayor duración temporal entre los nudos o vértices inicial y final.

El *tiempo medio E(T)*, o duración (D_{ij}) de la actividad definida por el nudo *i* el nudo *j*, se obtiene, en situación de incertidumbre, de promediar el *tiempo optimista* (T_o), que es aquel tiempo de ejecución de la actividad en las mejores condiciones posibles; el *tiempo normal* (T_n), en condiciones normales, y el *tiempo pesimista* (T_p), en las condiciones más desfavorables. Responde a la siguiente fórmula:

$$T = E(T) = \frac{T_o + 4T_n + T_p}{6}$$

Además el tiempo Pert, definido para cada una de las actividades en la forma indicada, hay que tener en cuenta para cada uno de los nudos, los denominados:

Tiempo «early» representado en el grafo $\boxed{E_i}$ y que corresponde al momento en que, como muy pronto, se logra la situación del nudo *i*, es decir, el momento más próximo al origen o comienzo de ejecución del proyecto (lo cual implica que se hayan realizado todas las actividades precedentes que sean necesarias para alcanzar dicho nudo).

Tiempo «last» representado en el grafo $\boxed{L_i}$ y que corresponde al momento en que, como muy tarde, se habrá conseguido la situación del nudo *i*, de suerte que no se produzca retraso alguno en el plazo total de ejecución.

El análisis del PERT revela, como veremos a continuación, la existencia de un *camino crítico* que define el método que recibe la denominación de CPM (Critical Path Method = Método del Camino Crítico). Existe, pues, una estrecha relación entre el PERT y el CPM. Son, en definitiva, dos técnicas que permiten planificar, programar y coordinar las diversas actividades de un proyecto complejo, reduciendo la incertidumbre que gravita sobre las decisiones que tiene que tomar la dirección.

El método PERT pretende la reducción del camino crítico, es decir, el acortamiento del tiempo de ejecución del proyecto. De ahí que el PERT analiza la duración de todas y cada una de las actividades que integran el proyecto pero basándose en un nivel de coste, mientras que el CPM relaciona las posibles duraciones de aquéllas con el coste correspondiente. Con ambas técnicas se trata, por consiguiente, de encontrar una duración de ejecución del proyecto de modo que el coste total sea mínimo. Cabe, pues, diferenciar: 1) el PERT-Time, cuya finalidad es el conocimiento del tiempo de ejecución del proyecto y de todas las actividades que lo integran; 2) el PERT-Cost, cuya finalidad es el mejoramiento u optimización en la ejecución del proyecto y el empleo de los recursos, determinando aquella duración que siendo la menor posible le corresponda, a su vez, el mínimo coste, y 3) el PERT-control, cuya finalidad es el seguimiento y control de la ejecución del proyecto.

Como señala FERNÁNDEZ PIRLA, J. Mª (1974), la aplicación del PERT supone, resumidamente, las siguientes fases o etapas: 1.ª Ordenación del conjunto de actividades y elaboración del correspondiente diagrama (grafo o red); 2.ª Estudio del tiempo de ejecución de cada actividad o tarea; 3.ª Calificación de las actividades y descubrimiento del camino crítico; 4.ª Calificación de tiempos para cada actividad; 5.ª Política de ejecución para la mejor disposición de los recursos y que supone el estudio económico de costes y rendimientos que se pueden derivar de las modificaciones estructurales en el proyecto.

Uno de los aspectos de especial importancia es la determinación correcta del grafo, diagrama o red, representativo del proyecto teniendo en cuenta las relaciones de preferencia que se dan entre las diferentes actividades que lo integran. Existen para ello dos procedimientos que de forma sistemática nos ayudan a ello: la matriz de encadenamientos y el cuadro de prelaciones.

El estudio de los tiempos de ejecución (expresado en horas, días, meses, etc.) es otra de las cuestiones a la que se tiene que prestar atención. Es evidente, que si el tiempo de duración de una actividad se conoce con certeza (determinismo) la asignación es única y no presenta ningún problema; por el contrario, para actividades de duración aleatoria es preciso calcular una estimación media del tiempo de duración a partir de un modelo teórico de probabilidad, admitiéndose, entre otros, como el más adecuado el de la distribución BETA (β). Como se verá, y sobre la base de introducir algunas simplificaciones en la formulación de esta distribución, en la práctica se va a manejar una distribución normal tipificada cuya validez, no obstante, reclama que el número de actividades del proyecto sea grande.

Es decir, si las duraciones de las actividades no se conocen con certeza se estima para cada una de ellas tres posibles valores –optimista (T_o), normal (T_n) y pesimista (T_p)– y se admite como válida, entre otras, la citada distribución β cuya función de densidad (con $p>0$ y $q>0$ como parámetros) es:

$$f(T) = 0 \qquad -\infty < T < T_o$$

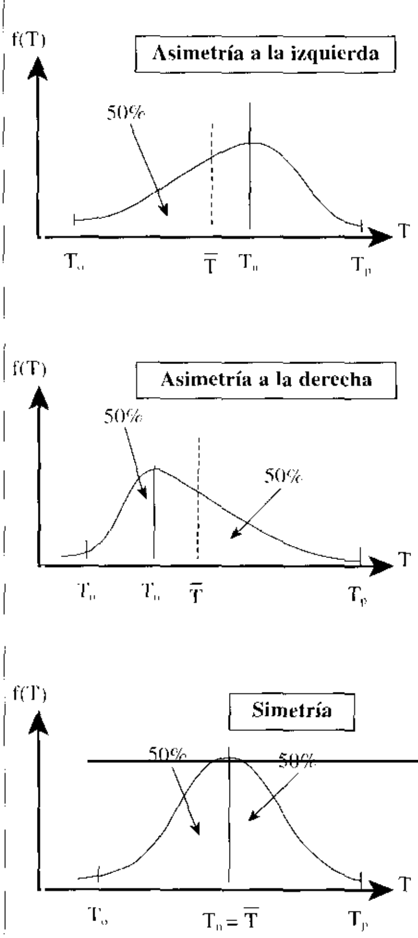
$$f(T) = \frac{(T - T_p)^p \cdot (T_o - T)^q}{(T_o - T_p)^{p+q+1} \cdot \beta\,(p + 1, q + 1)} \qquad T_o < T < T_p$$

$$f(T) = 0 \qquad T_p < T < \infty$$

y que responde a la representación gráfica campaniforme de asimetría a la derecha o la izquierda, tal como se detalla en la **Fig. 2**. El valor medio $\overline{T}$, representativo de la duración así estimada, es el que divide la distribución en dos áreas con el 50% de probabilidades cada una de ellas, es decir no suele coincidir con el tiempo T_n (tiempo más probable o tiempo modal). Si así fuera, la distribución sería simétrica (coincidencia del tiempo normal o más probable con la moda de la distribución) y la representación gráfica se asemejaría a una campana de Gauss.

Fig. 2

DISTRIBUCIÓN BETA



La función β existe sólo entre los valores T_o (duración mínima ≅ tiempo optimista) y T_p (duración máxima ≅ tiempo pesimista), alcanzando la función de densidad su valor máximo para T_n (duración más probable ≅ tiempo normal). La esperanza matemática y la varianza vienen dadas por:

$$E(T) = \frac{T_o + (p+q)\,.\,T_n + T_p}{p+q+2}$$

$$\sigma_T^2 = \left(\frac{T_p - T_o}{p+q+2}\right)^2 \cdot \frac{(p+1)\cdot(q+1)}{p+q+3}$$

En la práctica se opera de forma aproximada admitiendo que para los parámetros p y q se cumple que $p + q$ vale 4 y que $(p + 1)\,.\,(q + 1)/(p + q + 3)$ vale 1, con lo cual y a los efectos operativos se tiene que la *esperanza matemática* y la *varianza* vienen dadas por:

$$E(T) = \frac{T_o + 4T_n + T_p}{6}$$

$$\sigma_T^2 = \left(\frac{T_p - T_o}{6}\right)^2$$

es decir, la desviación típica es igual a un sexto del recorrido $(T_p - T_o)$.

Dentro de las diferentes notaciones que se pueden utilizar, se ha adoptado la que se recoge en la **Fig. 1**, relativa a un proyecto hipotético integrado por 9 actividades reales que motivan 7 situaciones o acontecimientos.

Establecidos los aspectos básicos definidores del método PERT, es decir los conceptos operativos, se analizan a continuación los procedimientos metodológicos para su efectiva aplicación.

2. LA METODOLOGÍA DEL CAMINO CRÍTICO

La duración total del proyecto viene siempre condicionada por el conjunto de actividades que definen el camino crítico. Hemos visto para nuestro ejemplo, que las posibles rutas para alcanzar el nudo final son cinco y dado que todas las actividades, nueve, tienen que realizarse es fácilmente comprensible que la ruta que lo define viene dada por la cadena V_1-V_4-V_6-V_7, es decir por las actividades C, G e I (actividades críticas) que totalizan la mayor duración temporal, 47 días.

Ahora bien, cuando el proyecto es de gran envergadura, la determinación de las actividades que forman el camino crítico reclama una metodología como la que se expone a continuación y basada en el cálculo de los tiempos «early» y «last» de cada uno de los nudos. Si para el nudo *j* se verifica que E_j=L_j, significa que el acontecimiento definido por el mismo se produce en una fecha fija y por ello el nudo es fijo; si $E_j \neq L_j$, significa que existe una holgura temporal para alcanzar el acontecimiento, no hay una fecha fija, y de ahí que el nudo sea flotante, oscilante o fluctuante y que se define dicha holgura por $O_j = L_j - E_j$. El camino crítico está jalonado por nudos fijos, es decir, por el conjunto de arcos que representan actividades cuya ejecución consume la totalidad del tiempo que media entre dichos nudos. Para los nudos inicial y final se cumple siempre la coincidencia de los tiempos «early» y «last».

Cálculo de los tiempos «early». Se efectúa comenzando por el nudo inicial al que se le asigna un tiempo «early» igual a 0. Para los nudos inmediatos de todas las actividades que parten del nudo inicial, los tiempos «early» se corresponderán con las respectivas duraciones. Para las actividades de los restantes nudos, los tiempos «early» verificarán que:

$$E_j = \max[E_i + D_{ij}], \forall_i$$

El tiempo «early» del último nudo indica el tiempo necesario para finalizar la ejecución del proyecto.

Cálculo de los tiempos «last». Se efectúa partiendo del último nudo, cuyo tiempo «early» ya se conoce, hasta llegar al nudo inicial. El cálculo que es también iterativo responde a la siguiente fórmula:

$$L_i = \text{mín}[L_j - D_{ij}], \forall_j$$

En el grafo de la **Fig. 1** se dan los datos correspondientes a los tiempos «early» y «last» de los correspondientes nudos y cuyos valores se han obtenido en base a las fórmulas anteriores. La disposición de los cálculos se ofrece en la siguiente **Tabla 2:**

Tiempos EARLY						**Tiempos LAST.-Tabla 2**					
V_j	V_i	Act.	D_{ij}	E_i+D_{ij}	E_j	V_i	V_j	Act.	D_{ij}	L_j-D_{ij}	L_i
V1	*	*	*	*	**0**	**V7**	*	*	*	*	**47**
V2	*V1*	*(A)*	*14*	*0+14=14*	**14**	**V6**	*V7*	*(I)*	*15*	*47-15=32*	**32**
V3	*V1*	*(B)*	*12*	*0+12=12*	**12**	**V5**	*V7*	*(H)*	*13*	*47-13=34*	**34**
V4	*V1*	*(C)*	*15*	*0+15=15*	**15**	**V4**	*V6*	*(G)*	*17*	*32-17=15*	**15**
	V3	*(f)*	*0*	*0+12=12*		**V3**	*V6*	*(F)*	*11*	*32-11=21*	
V5	*V2*	*(D)*	*10*	*14+10=24*	**24**		*V4*	*(f)*	*0*	*15-0=15*	**15**
V6	*V2*	*(E)*	*9*	*14+9=23*		**V2**	*V6*	*(E)*	*9*	*32-9=23*	**23**
	V3	*(F)*	*11*	*12+11=23*			*V5*	*(D)*	*10*	*34-10=24*	
	V4	*(G)*	*17*	*15+17=32*	**32**	**V1**	*V4*	*(C)*	*15*	*15-15=0*	**0**
V7	*V5*	*(H)*	*13*	*24+13=37*			*V3*	*(B)*	*12*	*15-12=3*	
	V6	*(I)*	*15*	*32+15=47*	**47**		*V2*	*(A)*	*14*	*23-14=9*	

El camino crítico viene jalonado por las actividades definidas por nudos fijos, es decir, por aquellos en los que se cumple que tiempo «early» es igual al tiempo «last». En nuestro ejemplo, se cumple esta coincidencia en los vértices V_1, V_4, V_6 y V_7 y por lo tanto dicho camino está formado por las actividades C, G e I. Los valores obtenidos para los citados tiempos en cada uno de los nudos quedan reflejados en el grafo de la Fig 1.

El cálculo de los tiempos «early» y «last» se puede efectuar siguiendo otros métodos, siendo de corriente aplicación, sobre todo cuando el proyecto consta de un elevado número de actividades, el matricial de Zaderenko S. G (1968).

3. CALIFICACIÓN DE LAS HOLGURAS TEMPORALES

La determinación del camino crítico pone en evidencia qué actividades del proyecto tienen holgura temporal, es decir, aquéllas que disponen para su ejecución de más tiempo del que necesitan para su realización. El análisis de las posibles holguras permiten hacer una clasificación de los tiempos en tres tipos: 1) Tiempo total sobrante de fluctuación (T_F); 2) Tiempo libre (T_L), y 3) Tiempo independiente (T_I). Es evidente, después de lo apuntado anteriormente, que para las actividades definidoras del camino crítico se consume la totalidad del tiempo que media entre dos nudos y que, por consiguiente, se cumple que $T_F= 0$, circunstancia que va asociada al hecho de que para los nudos que jalonan dicho camino se cumple que el tiempo «early» es igual al tiempo «last» ; mientras que para los restantes caminos se producen holguras temporales al no producirse tal coincidencia y que, por lo tanto, TF > 0. El análisis de qué tipo de holgura se produce es particularmente importante para la mejor y efectiva realización del proyecto, habida cuenta, por otra parte, la relación que existe entre ellas. Precisemos el significado de las diferentes holguras:

Tiempo de fluctuación total o tiempo sobrante total (T_F), es la mayor disponibilidad de tiempo que puede afectarse a la ejecución de una actividad con perjuicio de los tiempos sobrantes en las actividades precedentes y siguientes. La holgura total de una determinada actividad es, por otra parte, el tiempo máximo que puede prolongarse o retrasarse el tiempo de ejecución de la misma sin que ello altere la fecha de terminación del proyecto. Se obtiene de la siguiente forma:

$$T_F = L_j - E_i - D_{ij}$$

Tiempo libre (TL), cantidad del tiempo total que se puede utilizar sin afectar a las holguras de las actividades siguientes, pero que reducirá, sin embargo, las holguras de las actividades precedentes. Viene dado por:

$$T_L = E_j - E_i - D_{ij} = T_F - O_j$$

(ya que $O_j = L_j$ - E_j).

Tiempo independiente (T_I), es la parte del tiempo libre en que puede alargarse una cierta actividad sin afectar a las holguras de las actividades precedentes y siguientes. Esta holgura se pierde si no es utilizada en la propia actividad. Se formula así:

$$T_I = E_j - L_i - D_{ij} = T_L - O_i = T_F - O_i - O_j$$

(ya que $O_i = L_i - E_i$,, $O_j = L_j - E_j$).

Recurriendo al grafo detallado en la **Fig. 1** las holguras temporales se producen en los nudos V_2, V_4 y V_5 con los siguientes grados de oscilación:

$$O_2 = L_2 - E_2 = 23 - 14 = 9$$
$$O_4 = L_4 - E_4 = 15 - 12 = 3$$
$$O_5 = L_5 - E_5 = 34 - 24 = 10$$

mientras que para los restantes vértices las oscilaciones son nulas al ser los que jalonan el camino crítico.

En la siguiente **Tabla 3** se ofrece la clasificación de los tiempos sobrantes correspondientes al citado grafo de nuestro ejemplo, haciéndose a continuación una representación gráfica que nos permite apreciar el significado de las diferentes holguras a tenor de la definición que anteriormente se ha dado para las mismas.

HOLGURAS TEMPORALES: CÁLCULO Y CLASIFICACIÓN								**Tabla 3**
Actividad	*Duración*	*Tiempo «early»*		*Tiempo «last»*		*Holguras*		
Vi-Vj ( )	*Dij*	*Nudo i*	*Nudo j*	*Nudo i*	*Nudo j*	*TF*	*Tl*	*Tl*
V1-V2 (A)	14	0	14	0	23	9	0	0
V1-V3 (B)	12	0	12	0	15	3	0	0
V1-V4 (C)	15	0	15	0	15	0	0	0
V2-V5 (D)	10	14	24	23	34	10	0	–9
V2-V6 (E)	9	14	32	23	32	9	9	0
V3-V4 (f)	0	12	15	15	15	3	3	0
V3-V6 (F)	11	12	32	15	32	9	9	6
V4-V6 (G)	17	15	32	15	32	0	0	0
V5-V7 (H)	13	24	47	34	47	10	10	0
V6-V7 (I)	15	32	47	32	47	0	0	0

Nota: Un valor negativo para una holgura, tal como la independiente de la actividad D no tiene sentido y es, por tanto, equivalente a valor cero.

Tomando en consideración la actividad V2-V6 (E) se puede hacer el siguiente gráfico (**Fig. 3**) que ayuda a comprender el alcance y significado de las holguras temporales que se pueden producir en la ejecución del proyecto.

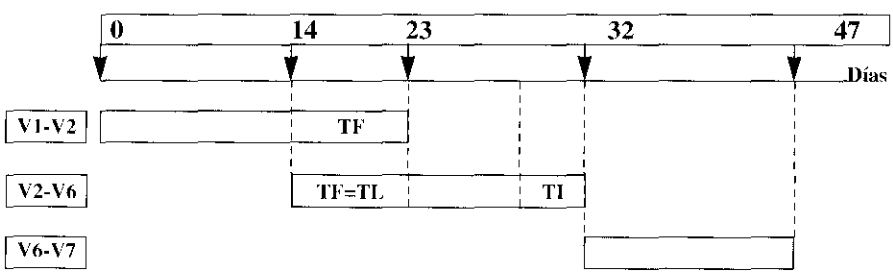


Fig. 3

La zona oscura se corresponde con la duración de la actividad

Es importante tener en cuenta que en un proyecto complejo y con un elevado número de actividades puede haber más de un camino crítico. En el caso sencillo de nuestro grafo se ve que si la duración de la actividad (B) fuera de 15 días, se obtendría otro camino crítico definido por V_1–V_3–V_4–V_6–V_7. Las actividades críticas se caracterizan porque un retraso en la ejecución de cualquiera de ellas implica un retraso de la misma magnitud en el proyecto total.

Por otra parte, aquellas actividades con holguras relativamente pequeñas se denominan subcríticas. Así, recurriendo a nuestro grafo original y teniendo en cuenta los datos recogidos en la **Tabla 3**, las actividades V_1–V_3 (B) y V_5–V_7(f) cabe calificarlas de subcríticas en primer lugar; las actividades V_1–V_2 (A), V_2–V_6 (E) y la V_5–V_6 serían subcríticas en segundo lugar, etc. Cabe, por consiguiente, hablar de caminos subcríticos. Como se verá más adelante, el CPM nos permite definir también el denominado camino *crítico irreducible*.

El análisis y calificación de los tiempos sobrantes es una cuestión fundamental en la correcta aplicación del método PERT por parte de la dirección del proyecto. El posible acortamiento del tiempo de ejecución de las diferentes tareas o actividades es de gran importancia estratégica y puede, sin duda, reportar grandes ventajas derivadas de la correcta asignación de los recursos con que se cuenta para llevarlo a cabo. El PERT en cuanto a los aspectos analizados se convierte, por tanto, en la antesala del CPM.

4. EL CAMINO CRÍTICO COMO VARIABLE ALEATORIA

Ya se ha visto anteriormente que cuando las duraciones de las actividades no se conocen con certeza hay que operar en términos de probabilidad, estimando para la ejecución de cada actividad el tiempo optimista, el pesimista y el normal. En este caso, las duración de cada actividad se considera como una variable aleatoria, calculándose a tal efecto la esperanza matemática, la varianza y la desviación típica. Para el grafo que hemos usado de ejemplo se ha supuesto para cada actividad los tiempos que se detallan en la **Tabla 4**.

Admitiendo el modelo teórico de la distribución Beta (de parámetros, p y q) y con las correcciones admisibles en la práctica de hacer $p+q=4$ y $(p+1).(q+1)/(p+q+3)$ igual a la unidad, se concluía que para la duración de cada actividad Dij se puede definir la esperanza matemática y la varianza tal como se ha dicho.

Al ser, por tanto, las duraciones variables aleatorias es evidente que se puede considerar, a su vez, el camino crítico como una variable aleatoria que vamos de designar por T*, de tal forma que su esperanza y su varianza vendrían dadas por:

$$E(T^*)=\sum_{ij \in U^*} E(D_{ij})$$

$$\sigma^2 (T^*)=\sum_{ij \in U^*} \sigma^2(D_{ij})$$

siendo U* el conjunto de arcos (actividades) que definen el camino crítico.

La plena validez del siguiente razonamiento cabe tan sólo admitirla si se pudiera hablar de un camino crítico formado por un número infintamente grande de actividades independientes, pues en ese caso se podría aplicar sin ningún reparo lo que nos dice el Teorema Central del Límite: *Cuando el número de variables aleatorias independientes, cualquiera que sea la distribución de probabilidad a la que se ajusten, es infintamente grande motiva que la suma de dichas variables tienda a una distribución normal, cuya media y varianza son, respectivamente, la suma de las medias y varianzas de cada una de las variables.* Es decir, se cumpliría entonces que:

$$T^* \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} N[E(T^*), \sigma (T^*)]$$

designando por N la distribución normal de Gauss que viene dada por la siguiente expresión:

$$N = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-1}{2}(T^*-E)^2/\sigma^2}$$

Cuando la variable T* viene expresada en unidades de desviación, $\varepsilon = \frac{T^*-E}{\sigma}$, entonces se obtiene la forma tipificada:

$$N = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}$$

diciéndose en este caso que ε (variable tipificada) se distribuye normalmente con media cero y varianza uno. En la **Fig. 4** recoge la curva correspondiente con indicación de las áreas incluidas entre $\varepsilon = -1$ y $+1$, $\varepsilon = -2$ y $+2$, $\varepsilon = -3$ y $+3$, que son, respectivamente, el 68,27%, 95,45% y 99,73% del área total que vale uno. Valiéndose de tablas ya elaboradas se definen las áreas bajo esta curva, limitadas por la ordenada para $\varepsilon = 0$ y cualquier otro valor positivo de ε.

Dado que cualquier proyecto, por complejo que sea, consta de un número finito de actividades de duración aleatoria –no todas, además, independientes–, la aceptación de la distribución normal es muy discutible y, en todo caso, reclama que el número de actividades sea discretamente elevado (no menos de 30, de las cuales 10 ó 12 definan el posible camino crítico).

Admitiendo que la distribución Beta (corregida) se pueda sustituir por la *Distribución Normal Tipificada* la variable normal ε de media cero y desviación típica la unidad, cuyos valores están tabulados estadísticamente, viene dada, por tanto, por la expresión

$$\varepsilon = \frac{T^* - E(T^*)}{\sigma(T^*)}$$

que es esencial, como veremos más adelante, para abordar el cálculo de cualquier probablidad para la variable aleatoria T*.

Tomando en consideración el grafo ejemplo, las duraciones que figuran para las diferentes actividades se han obtenido promediando los valores aleatorios que se detallan en la **Tabla 4** y determinando, además, los aspectos estadísticos reveladores de la esperanza matemática, la varianza y la desviación típica conforme a una distribución normal.

ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LAS DURACIONES ALEATORIAS Tabla 4

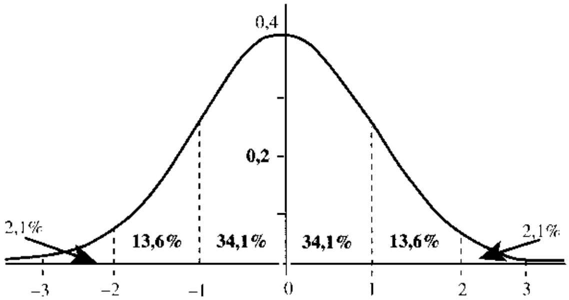
Actividad	Tiempos estimados:			Esperanza matemática Dij=E(Tij)	Varianza	Desviación típica
	T. máximo	T. normal	T. mínimo			
V1-V2 (A)	21	13	11	14	2,77777778	1,66666667
V1-V3 (B)	14	12	10	12	0,44444444	0,66666667
V1-V4 (C)	*18*	*15*	*12*	*15*	*1*	*1*
V2-V5 (D)	12	10	8	10	0,44444444	0,66666667
V2-V6 (E)	11	9	7	9	0,44444444	0,66666667
V3-V4 (f)	0	0	0	0	0	0
V3-V6 (F)	13	12	5	11	1,77777778	1,33333333
V4-V6 (G)	*20*	*18*	*10*	*17*	*2,77777778*	*1,66666667*
V5-V7 (H)	16	13	10	13	1	1
V6-V7 (I)	*19*	*15*	*11*	*15*	*1,77777778*	*1,33333333*
La esperanza matemática de la variable T*=E(T*)=15+17+15=47						
La varianza de la variable T*=1+2,777+1,777=5,554;la desviación típica=2,356						

La lectura atenta de los datos recogidos en la **Tabla 4** revela que la media de la variable aleatoria T* del camino crítico es de 47 días, es decir, es el valor que representa el 50% de probabilidad de acabar el proyecto en ese plazo.

Todo el planteamiento anterior pone de manifiesto que en términos aceptables la distribución Beta da paso a una Distribución Normal Tipificada cuya representación es la conocida campana de Gauss, tal como se detalla en la **Fig. 4.**

Fig. 4

DISTRIBUCIÓN NORMAL (0,1)



5. RELACIÓN TIEMPO-PROBABILIDAD

Con la información contenida en la tabla y los datos tabulados para una curva normal tipificada se determinan a continuación: 1) la probabilidad de que el proyecto se termine antes de una fecha determinada, o bien, 2) la fecha de terminación para cada nivel de probabilidad.

Son éstas dos importantes cuestiones que le interesa conocer a los responsables del proyecto cuando las actividades que lo integran tienen una duración aleatoria. Sabemos, como se apuntó anteriormente para el proyecto ejemplo, que la terminación en 47 días le corresponde una probabilidad del 50%. Lo que se pretende ahora es determinar la probabilidad de concluirlo por encima o por debajo de dicho plazo.

La primera cuestión, pues, se resuelve calculando para una fecha determinada, k, la probabilidad correspondiente definida así:

$$P\,(T^* \leq K)$$

Para ello, partiendo de la expresion que nos relaciona la variable aleatoria del camino crítico, T*, con la variable normal tipificada, ε,

$$T^* = \varepsilon \cdot \sigma\,(T^*) + E(T^*)$$

se obtiene la siguiente expresión de probabilidad:

$$P\,[\varepsilon \cdot \sigma\,(T^*) + E(T^*) \leq K] = P\left[\varepsilon \leq \frac{K - E(T^*)}{\sigma(T^*)}\right]$$

Ejemplo: Para nuestro grafo, la probabilidad de terminar el proyecto antes de 49 días sería:

$$P\,(T^* \leq 49) = 0{,}5 + P(0 \leq T^* \leq 49) = 0{,}5 + P[2{,}356\,\varepsilon + 47 \leq 49] = 0{,}5 + P\left[\varepsilon \leq \frac{49-47}{2{,}356}\right] =$$

$$= 0{,}5 + P\,[\varepsilon \leq 0{,}849] = 0{,}5 + 0{,}2998 = 0{,}7998 \cong \underline{79{,}98\%}$$

La segunda cuestión, es decir, cuando se pretende conocer la fecha de terminación para una determinada probabilidad, H, se resuelve

$$P\,(T^* \leq K) = H$$

siendo H un valor comprendido entre 0 y 1. Es decir, se calcula:

$$P\left[\varepsilon \geq \frac{K - E(T^*)}{\sigma(T^*)}\right] = P\,[\varepsilon \leq K'] = H$$

teniendo en cuenta que:

$$\left[\frac{K - E(T^*)}{\sigma(T^*)}\right] = K'$$

Ejemplo: Para nuestro grafo, el tiempo necesario para la terminación del proyecto con una probabilidad del 95% sería:

$$P\,(T^* \leq k) = 0{,}95 = P[2{,}356\,\varepsilon + 47 \leq k] = P\left[\varepsilon \leq \frac{k-47}{2{,}356}\right] =$$

$$= P\,[\varepsilon \leq k']$$

Según las tablas estadísticas, la abcisa que deja a su izquierda una probabilidad del 95% es prácticamente para K' = 1,65, luego:

$$1{,}65 = \frac{K-47}{2{,}356}\text{, luego } K = 47 + 1{,}65 \times 2{,}356 = 47 + 3{,}8887 = \underline{50{,}3887 \text{ días.}}$$

Para nuestro grafo-ejemplo la aplicación de la fórmulas anteriores, y valiéndonos de las tablas estadísticas de la distribución normal tipificada, nos permiten determinar las siguientes situaciones recogidas en la **Tabla 5:**

RELACIÓN TIEMPO-PROBABILIDAD-TIEMPO. Tabla 5			
Probabilidad de finalizar en K días:		**Fecha terminación para una probabilidad H**	
K(dato)	**P (T*≤ (K)**	**H(dato)**	**K**
43 días	0,0455 (4,55%)	0,2451 (24,51%)	45,374 días
44 días	0,102 (10,2%)	0,3632 (36,32%)	46,175 días
47 días	0,5 (50,%)	0,5 (50%)	47 días
49 días	0,7995 (79,95%)	0,6664 (66,64%)	48,013 días
51 días	0,9545 (95,45%)	0,9082 (90,82%)	50,133 días
Los cálculos se han hecho teniendo en cuenta: E(T*) = 47 días ---σ^2 (T*) = 5,544 ---σ (T*) = 2,356			

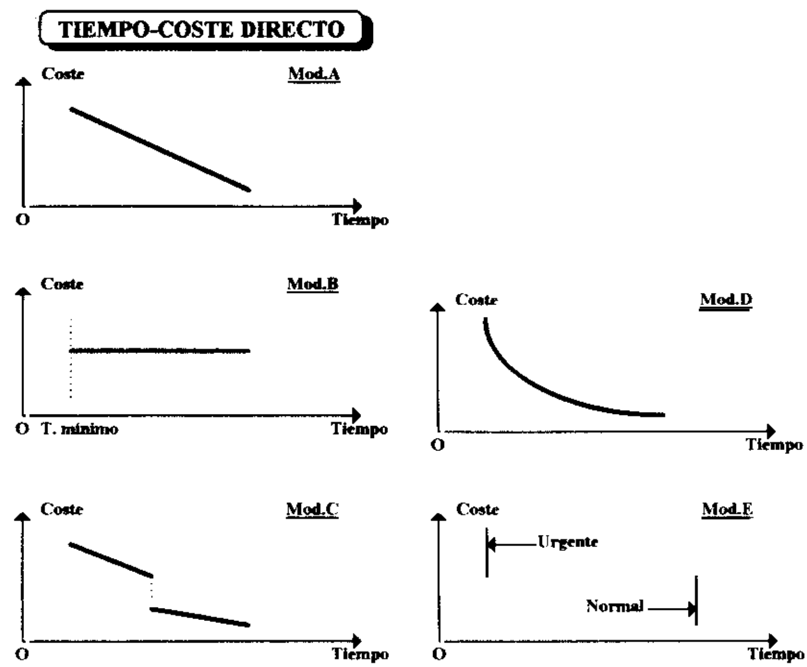
Los datos recogidos en esta **Tabla 5** revelan por una parte que la terminación del proyecto tiene una probabilidad comprendida entre 0,5(50%) y 1(100%) para duraciones que estén por encima de 47 días, en tanto que para aquéllas que estén por debajo la probabilidad estará situada en 0 (0%) y 0,5 (50%). En nuestro ejemplo, la varianza para cada una de las actividades mide el riesgo de no acertar la duración media calculada para las mismas y que será tanto mayor cuanto mayor sea el recorrido de incertidumbre definido por las fechas optimista y pesimista correspondientes (recuerdese que la varianza es el cuadrado de un sexto del recorrido y que, por consiguiente la desviación típica es igual a un sexto del recorrido). Dado que la varianza para el camino crítico es la suma de las varianzas de las actividades que lo conforman, está claro que cuanto menor sea el valor de la misma tanto menor será el riesgo de no acertar en la duración total del proyecto.

6. EL PERT-COST/CPM

La realización de las diversas actividades del proyecto implican como es lógico la utilización de recursos de muy diversa naturaleza que suponen evidentemente un coste. Es importante diferenciar, por una parte, los costes directos y, por otra, los costes indirectos, que motivan la realización de todas y cada una de las actividades del proyecto en razón del consumo de factores o de recursos que demandan cada una de ellas. Los costes totales de las diferentes actividades del proyecto son la resultante de los costes directos e indirectos que se le asignan a las mismas. Relacionando los diferentes costes con los tiempos o duraciones resulta fácil entender que el comportamiento de los mismos es bien diferente.

Los *costes directos* de una actividad derivan, principalmente, de los costes del trabajo, materiales y equipos que son necesarios para llevarla a cabo. Según las circunstancias, véase la **Fig. 5**, son varios los modelos tiempo-coste directo que se pueden dar. Según RIGGS, J. L. (1973), la reducción del tiempo de ejecución de una actividad puede motivar: 1) Incremento lineal del coste (mod. A), que corresponde con aquellas tareas o actividades que pueden ser realizadas eficientemente aumentando los recursos utilizados; 2) Costes constantes (mod. B) que no varían con el tiempo, como suele ocurrir, por ejemplo, con las actividades subcontratadas para la que se ha establecido un tiempo mínimo; 3) Aumento brusco del coste directo (mod. C) en un momento dado; 4) Incremento más que proporcional del coste (mod. D) a medida que se reduce el tiempo, comportamiento muy corriente y que se produce para aquellas actividades con ciertas limitaciones que impiden que un incremento en los recursos asignados produzca un rendimiento proporcional; 5) Relaciones discontinuas coste-tiempo (mod. E) que se producen, por ejemplo, en actividades de tiempo de reparto, donde solo existe un coste para el tiempo corriente y otro para el urgente.

Fig. 5



En cuanto a los *costes indirectos*, las principales fuentes son los gastos generales, los de supervisión, intereses, primas, etc. Esta clase de costes suelen variar (tal como se detalla en la **Fig. 6**) más que proporcionalmente a medida que aumenta el tiempo de realización de la actividad.

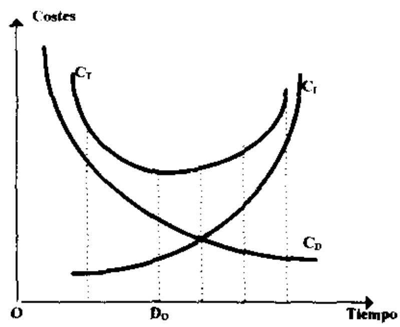
El *coste total* (C_T) es, por tanto, la suma del coste directo (C_D) y del coste indirecto (C_I), es decir,

$$C_T = C_D + C_I$$

y cuya representación gráfica, considerando una variación más que proporcional para los costes directos e indirectos, es:

Fig. 6

COSTES TOTALES, DIRECTOS E INDIRECTOS



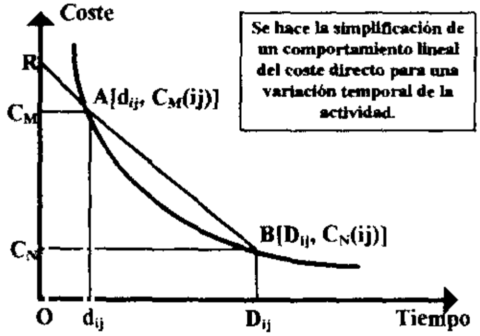
Conforme con la representación anterior, existe una duración que hace mínimo el coste total, como resultante del coste directo e indirecto que corresponde a una actividad determinada. El coste indirecto generalmente se puede suponer como dependiente de la duración del proyecto, es decir, $C_I = f(T^*)$.

6. EL COSTE DIRECTO TOTAL Y EL COEFICIENTE α_{ij}

Para su determinación es preciso analizar la aceleración temporal de las actividades definiendo para cada una de ellas el coste unitario de reducción. Es decir, partiendo del coste directo (Mod. D) se opera de forma aproximada sustituyendo la curva por el segmento AB (Ver **Fig. 7**) y se calcula para cada actividad el coeficiente de coste (ij que mide el incremento de coste por unidad de tiempo reducida.

Fig. 7

COSTE DIRECTO DE LA ACTIVIDAD ij



La ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B viene dada por:

$$c_{ij} = \frac{C_N - C_M}{D_{ij} - d_{ij}} . t_{ij} + C_M - \frac{C_N - C_M}{D_{ij} - d_{ij}} . d_{ij}$$

Se trata de una recta que se puede escribir así:

$$c_{ij} = m_{ij} . t_{ij} + n_{ij}$$

es decir de pendiente m_{ij} negativa y ordenada en el origen igual a n_{ij}.

Es evidente que dicho incremento se expresa de la siguiente forma:

$$\alpha_{ij} = \frac{C_M - C_N}{D_{ij} - d_{ij}}$$

por lo tanto la ecuación de la recta AB se puede escribir de la siguiente forma:

$$c_{ij} = - \alpha_{ij} \cdot t_{ij} + n$$

Habida cuenta que la culminación del proyecto supone la realización de todas las actividades, el coste directo total vendrá dado por:

$$\sum_{t_{ij} \in U} c_{ij} = \sum_{t_{ij} \in U} (- \alpha_{ij} \cdot t_{ij} + n_{ij})$$

siendo U el conjunto de actividades que integran el proyecto.

El coste directo, por tanto, se expresa en función de αij.

La forma en que se ha operado implica, evidentemente, un error que será tanto mayor cuanto mayor sea la curvatura respecto al arco AB, lo que se podría paliar, no obstante, ajustando una línea quebrada con tantos tramos como se quisiera entre A y B. En la práctica, sin embargo, y por facilitar la operativa se suele utilizar para cada tarea o actividad *ij* un segmento único tal como se ofrece en la **Fig. 7**.

Esto es tanto como decir que para cada actividad se conoce la relación entre la duración y el coste directo:

D_{ij} (Duración normal) <--------------> $C_N(ij)$ (Coste directo normal)
d_{ij} (Duración mínima) <--------------> $C_M(ij)$ (Coste directo máximo)

Como se verá a continuación, la determinación de los coeficientes de coste (ij para cada una de las actividades que integran el proyecto es imprescindible para estimar la duración mínima posible del proyecto con el menor coste posible. En definitiva, la duración de mínimo coste será aquella para la cual la suma de los costes directos e indirectos sea la menor posible.

Para los costes indirectos se admite que respondan a una función como la siguiente:

$$C_{ij} = F(\lambda) = ok + r.\ \lambda$$

que responde a la siguiente representación gráfica:

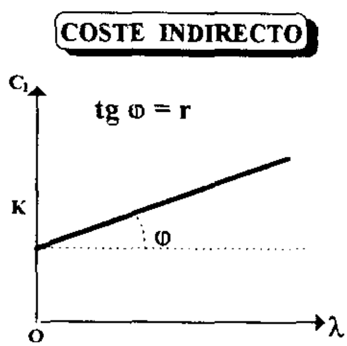


Fig. 8

8. LA DURACIÓN DE MÍNIMO COSTE Y EL CAMINO CRÍTICO IRREDUCIBLE

Llegados a este punto se está en condiciones de formular con rigor un modelo de programación lineal paramétrica en el que el parámetro λ es el plazo de ejecución en las distintas situaciones que se pueden formular. Ese modelo tiene como función objetivo el coste directo total que se trata de minimizar y que está sujeta a un conjunto de restricciones definidas por los diferentes caminos que se pueden establecer entre el vértice o nudo inicial y el vértice o nudo final y de tal forma que para cada actividad *ij* el tiempo de ejecución, t_{ij}, esté comprendido entre la duración normal (D_{ij}) y la duración extrema (d_{ij}). El planteamiento analítico sería:

$$\mathrm{MinZ} = \mathrm{Min} \sum_{ij \in U} (n_{ij} - \alpha_{ij} \cdot t_{ij}) = \mathrm{Min} \sum_{ij \in U} - \alpha_{ij} \cdot t_{ij} \cong \mathrm{Max}_{ij} \sum_{ij \in U} \alpha_{ij} \cdot t_{ij}$$

sujeta a las siguientes restricciones:

$$d_{ij} \leq t_{ij} \leq D_{ij}$$

$$\sum_{ij \in U^*} t_{ij} \leq \lambda \cdot \qquad \forall_{ij} U^* \in U_{ij}$$

en donde: U^* es el conjunto de arcos que forman un camino entre los vértices inicial y final; U_{ij} el conjunto de caminos entre dichos vértices; λ es el parámetro a variar.

Este planteamiento basado en un modelo de programación lineal paramétrica puede ser sustituido con ventaja si el número de actividades no es muy elevado por un procedimiento de cálculo de aproximaciones sucesivas.

BIBLIOGRAFÍA

ACKOFF, R. L.; SASIENI, M. W.
1971 *Fundamentos de Investigación Operativa.* Ed. Limusa-Wiley. México.

BUENO CAMPOS, E.; CRUZ ROCHE, I.; DURÁN HERRERA, J. J.
1979 *Economía de la Empresa. Análisis de las decisiones empresariales.* Ed. Pirámide. Madrid.

CUERVO GARCÍA, A.
Programación de proyectos. Estudio sobre el método PERT. *Rev. Española de Financiación y Contabilidad*, Madrid.

CUERVO GARCÍA, A.
1994 *Introducción a la Administración de Empresas.* Ed. Civitas. Madrid.

DEPARTAMENTO ORGANIZACIÓN DE EMPRESAS
1987 *Economía de la Empresa (Organización y Gestión).* Ed. Fac. C. Económicas y Empresariales UCM. Madrid.

DOMÍNGUEZ MACHUCA, J. A.; DURBÁN OLIVA, S.; MARTÍN ARMARIO, E.
1987 *El subsistema productivo de la empresa.* Ed. Pirámide. Madrid.

FERNÁNDEZ PIRLA, J. M.ª
1974 *Economía y Gestión de la Empresa.* Ed. ICE. Madrid.

MARTÍN DÁVILA, M.
1987 *Métodos operativos de gestión empresarial.* Ed. Pirámide. Madrid.

MILLER, R. W
1963 *Schedule, Cost, and Profit Control with PERT.* Ed. McGraw-Hill. N. York.

ORTIGUEIRA BOUZADA, M.
1971 La programación de proyectos con recursos limitados. *Rev. Económica Política*, n.° 57.

PÉREZ GOROSTEGUI, E.
1987 *Economía de la Empresa Aplicada.* Ed. Pirámide. Madrid.

RIGGS, J. L.
1973 *Modelos de decisión económica.* Ed. Alianza Universidad. Madrid.

ROMERO LÓPEZ, C.
1991 *Técnicas de Programación y Control de Proyectos.* Ed. Pirámide. Madrid.

SHAFFER, L. R.; RITTER, J. B.; MEYER, W. L.
1965 *The Critical-path Method.* Ed. McGraw-Hill. N. York.

SUÁREZ SUÁREZ, A. S.
1991 *Curso de Introducción a la Economía de la Empresa.* Ed. Pirámide. Madrid.

TURNER, J. C.
1974 *Matemática moderna aplicada.* Ed. Alianza Universidad. Madrid.

YU CHUEN-TAO, L.
1974 *Aplicaciones prácticas del PERT y CPM.* Ed. Deusto. Bilbao.