Algunas reflexiones sobre el planteamiento dual en la programación lineal

SERAFÍN PIÑEIRO FERNÁNDEZ

Economista. Profesor Titular. Dpto. Organización de Empresas.
Director de la Escuela Universitaria de Estudios Empresariales.
Universidad Complutense de Madrid

Se ha dicho, y con acierto, que la Economía de la Empresa alcanza su mayoría de edad a partir del momento que dispone de su propio método —el método operativo— convirtiéndose a partir de entonces en una disciplina científica y autónoma. El proceso configurador de la misma no alcanza, pues, su plenitud hasta fechas relativamente recientes y es por ello por lo que *Kosiol* la define como una criatura del siglo XX y como uno de los brotes más jóvenes del copioso árbol del conocimiento científico.

Dentro del sugestivo campo de la investigación operativa aplicada al ámbito económico de la empresa, se puede considerar a la programación lineal —continua, discreta o mixta— como una de las técnicas más frecuentemente utilizadas para dar adecuada respuesta a múltiples problemas de optimización. Para *Saul I. Gass* (1972, p. 9), *el modelo de programación lineal, esto es, la optimización de una función lineal sujeta a restricciones lineales, es sencillo en su estructura matemática, pero poderoso en su adaptabilidad a un amplio rango de aplicaciones.* Conviene, no obstante, recordar que únicamente los programas lineales en los que las variables pueden tomar cualquier valor de la recta real mayor que cero son convexos y que, consecuentemente, el espacio de las soluciones es convexo encontrándose, siempre, la solución óptima en un punto o puntos extremos del mismo. Se pretende con esta puntualización establecer una clara delimitación del alcance de nuestro análisis que se ciñe a la programación lineal continua bajo las hipótesis, por lo tanto, de *proporcionalidad, adictividad, divisibilidad y determinismo.*

Cuadernos de Estudios Empresariales, n.° 2, 171-180, Editorial Complutense, Madrid, 1992

Admitimos que algunas de estas hipótesis son, sin duda, limitativas en cuanto al alcance de esta técnica cuantitativa lo que explica, por consiguiente, su validez plena en el corto plazo y no tanto en un horizonte a largo. Pero no cabe subestimar que los estudios sobre postoptimización, sensibilidad y parametrización han potenciado su aplicación en la práctica y, en todo caso, dentro de las limitaciones que se puedan esgrimir, los modelos de programación lineal pueden ser utilizados con pequeños márgenes de error, pero con ventajas importantes, incluso en el orden predictivo, encontrándose en el planteamiento primal-dual una apoyatura de mayor interés. Esos estudios han permitido, en definitiva, analizar la estabilidad en el tiempo del programa óptimo ante ciertas alteraciones de los datos numéricos o estructurales.

Muchas de estas aplicaciones se hacen especialmente visibles en cualquier actividad empresarial orientada a rentabilizar al máximo la utilización de recursos escasos de que dispone el empresario. En nuestros días éste cuenta con un desarrollo informático que le posibilita la utilización práctica del modelo sin mayores dificultades. Recordemos que la perspectiva temporal de la técnica de la programación lineal nos sitúa en 1947 con el planteamiento matemático del modelo formulado por *George B. Dantzig* y resuelto a través del conocido algoritmo del *simplex.* Este algoritmo, como se sabe, pretende alcanzar, a través de un proceso iterativo que arranca con una solución básica factible, una solución óptima que haga máxima o mínima la función objetivo. Este proceso reclama el uso del ordenador cuando la dimensión del problema entraña más allá de quince variables. Aún admitiendo la importancia de este algoritmo, sobre el que descansan estas breves reflexiones, hay, como señala *Desbaiceille, G.* (1969, p. 14), otras variantes del mismo que *pueden utilizarse con provecho: método del producto de la inversa, método de descomposición de Dantzig y Wolfe (para matrices muy grandes); además, diferentes métodos han visto también la luz: de Kantorovtch, Frisch, etcétera.*

La programación lineal es, evidentemente, un caso singular y particular dentro de la programación matemática en el sentido más amplio de la palabra. Por ello, las numerosas aportaciones científicas, entre otras muchas, de *Lagrange,* y del *Khun* y *Tucker,* tienen especial relevancia en el planteamiento del problema dual a partir del problema primal y reveladoras de las estrechas relaciones de asociación existentes entre ambos. Los aportes de la teoría de la dualidad y el enfoque analítico, basada en las funciones langragianas, permiten una formulación rigurosamente correcta desde el punto de vista matemático. Como afirma *Dantzig,* la noción del problema dual y su relación con el primal fue introducida por *John von Neumann,* creador de la *Teoría de los Juegos y el Comportamiento Económico (Theory of Games and Economic Behavior),* siendo realizada por

Khun y Tucker la formulación explícita de los teoremas que relacionan ambos problemas fielmente recogida por el conocido diagrama que lleva su nombre. Siguiendo a *Saul I. Gass* (1972, p. 122), el teorema de la dualidad pone de relieve que *si, el problema primal, o el problema dual, tiene una solución óptima finita, entonces el otro problema tiene una solución óptima finita y los extremos de las funciones lineales son iguales, o sea, Mín f(x) = Máx g(w). Si uno de los dos problemas tiene una solución óptima ilimitada, entonces el otro problema no tiene soluciones posibles.* Este teorema, conocido por *teorema de la coincidencia,* se ve orlado por otros dos y que son los *teoremas de la correspondencia* (demostrativo de que en la tabla óptima de uno de los dos problemas se tiene toda la información acerca de la solución óptima del otro) y el de la *complementariedad de las variables de holgura* (explicativo, por ejemplo, del significado de precios sombra que tienen las variables duales según que las restricciones asociadas del primal estén o no saturadas, es decir que las variables de holgura del primal sean o no distintas de cero). Recordemos que, en el supuesto de existir soluciones finitas óptimas para ambos problemas, la matriz inversa de la base óptima se convierte en el eje central entre ambos problemas, o mejor aún, entre las variables que intervienen en los mismos, cumpliéndose que las soluciones vienen dadas por las expresiones siguientes:

$$X^0 = B^{-1} \quad b \text{ (primal)}, \; W^0 = c_B \quad B^{-1} \text{ (dual)}$$

En definitiva, se puede afirmar que la dualidad de los programas lineales es un fenómeno matemático que simula diferentes problemas económicos de tipo práctico y teórico en el seno de la ciencia económica en general y en el de la empresarial en particular. En una estricta aplicación del modelo de programación lineal al campo de la actividad empresarial, y suponiendo que se opera con *simplex produtivos,* es decir, programas o combinaciones de procesos productivos, a nivel unitario, tomados en número igual al de factores limitados de que dispone la empresa, es evidente que los niveles de utilización de esos procesos no puede ser negativo y, consecuentemente, las variables representativas de esos niveles tienen que cumplir las condiciones de no negatividad. En el planteamiento del problema dual, sin embargo, no se requiere que las variables sean, necesariamente, no negativas y que, en determinados casos, pueden ser libres. Admitiendo que entre ambos problemas se da la característica de ser reversibles, que es tanto como decir que el dual de un dual es el primal, y que como apunta *M. Simonnard* (1972, p. 133) cabe reservarse la *elección de tomar uno u otro como problema primal, siendo el otro el dual,* en nuestro análisis entenderemos que en el programa primal, entendido como programa productivo, se cumplen las condiciones de no negatividad para las variables. No obstante, y para no pecar de restrictivos desde el punto de vista matemático, la posibilidad de que las variables puedan ser libres dependerá de la forma *simétrica* o *asimétrica* que revista el problema.

La aplicación del algoritmo requiere, como se sabe, que las restricciones a que está sujeta la función objetivo a optimizar tienen que venir dadas por ecuaciones y no por inecuaciones, es decir, hay que desembocar en la denominada formulación estándar lo que se consigue siempre mediante la utilización de las variables de holgura o complementarias. Si la utilización de estas variables es insuficiente para producir la matriz identidad que nos facilita una solución básica de partida será, entonces, preciso recurrir a vectores artificiales para conseguirla, manteniéndose, en cualquier caso la formulación estándar del sistema de condiciones restrictivas.

Concretamente, si el problema primal viene dado en forma canónica, y siguiendo a *Borrel Fontelles* (1982, p. 271), la formulación sería:

a) Si se trata de minimizar la función objetivo:
   - — Todas las restricciones son de la forma > =.
   - — Todas las variables son no negativas.

b) Si se trata de maximizar la función objetivo:
   - — Todas las restricciones son de la forma < =.
   - — Todas las variables son no negativas.

En b) no se necesitan vectores artificiales, mientras que en el a) habrá que recurrir a ellos para poder aplicar el método simplex (salvo que se aplique el método alternativo conocido como simplex dual).

Hechas estas consideraciones, cuando se construye el programa dual a partir de un primal dado en forma canónica se obtiene la forma simétrica de la dualidad y en ella tanto las variables primales como las duales cumplen la condición de no negatividad. Por el contrario, cuando se construye el programa dual a partir de un primal dado en forma estándar se obtiene la forma asimétrica de la dualidad y en este caso las variables duales son libres, es decir, no están restringidas a ser no negativas. En los *Esquemas 1* y *2* que se ofrecen a continuación se presentan las respectivas formulaciones recurriendo para ello a la expresión matricial de ambos problemas.

Ahora bien, en el caso de que el sistema de condiciones a que está sujeto cualquiera de los problemas coexistieran restricciones de todo tipo (< =, > =, =) nos podemos encontrar, por la relación cruzada entre restricciones y variables según la teoría langragiana, con variables que pueden ser negativas unas, positivas otras y libres las restantes. En este caso la correcta formulación de los

$$\text{Min } Z = cX \quad AX \geq b \quad X \geq 0$$

$$\left.\boxed{\begin{array}{l}\text{Max } G = wb\\ WA \leq C\\ W \geq 0\end{array}}\right\} \begin{array}{l} W = (w_1 w_2 ... w_m) \cdot \\ C = (c_1 c_2 ... c_n) \cdot \\ A = [a_{ij}] \\ 0 = (00...0)\end{array} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Max } G = b^T w\\ A^T W \leq c^T\\ W \geq 0\end{array}\right\} \begin{array}{l} b^T = (b_1 b_2 ... b_m) \cdot \\ \\ A^T = [a_{ji}] \cdot \end{array} \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}, \ c^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \ 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = (c_1 c_2 ... c_n) \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ b_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} [a_{ij}] \end{bmatrix}, \ 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

PRIMAL-DUAL SIMETRICOS
* El programa dual de un programa primal en forma canónica

$$\text{Max } Z = cX \quad AX \leq b \quad X \geq 0$$

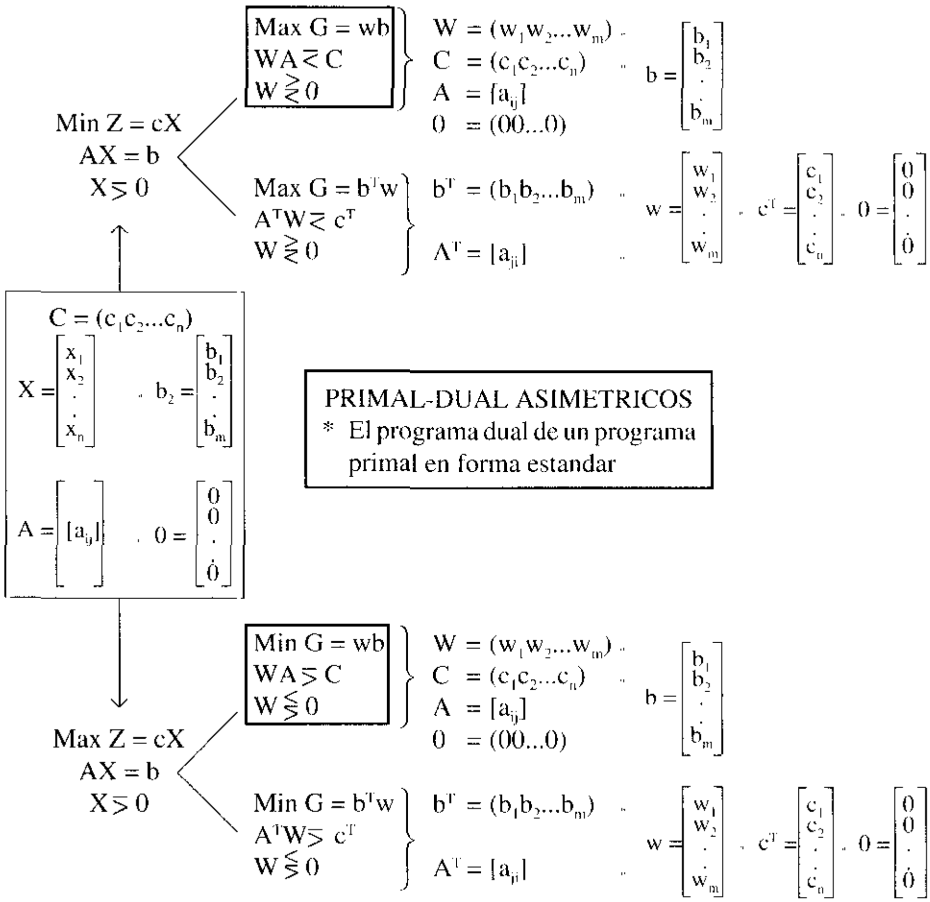
$$\left.\boxed{\begin{array}{l}\text{Min } G = wb\\ WA \geq C\\ W \geq 0\end{array}}\right\} \begin{array}{l} W = (w_1 w_2 ... w_m) \cdot \\ C = (c_1 c_2 ... c_n) \cdot \\ A = [a_{ij}] \\ 0 = (00...0)\end{array} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Min } G = b^T w\\ A^T W \geq c^T\\ W \geq 0\end{array}\right\} \begin{array}{l} b^T = (b_1 b_2 ... b_m) \cdot \\ \\ A^T = [a_{ji}] \cdot \end{array} \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}, \ c^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \ 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esquema 1.

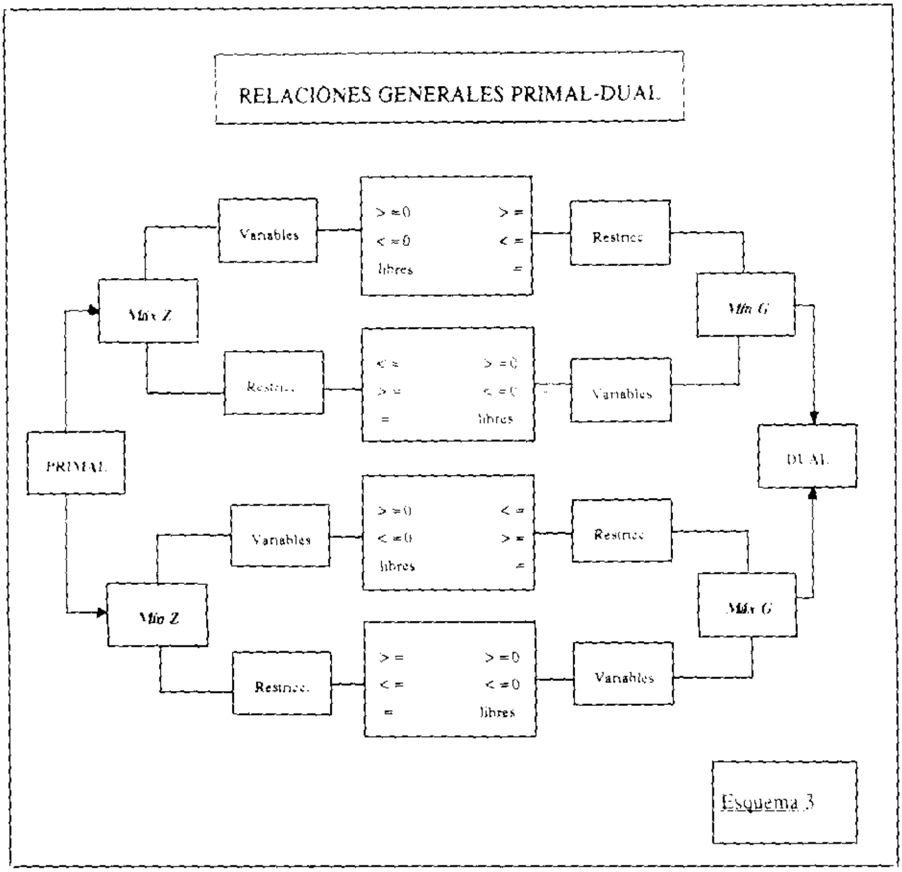
problemas primal-dual se efectuaría siguiendo las pautas que se recogen en el siguiente *Esquema 3.*

Creemos que estas breves reflexiones permiten ver que las restricciones de desigualdad, por ejemplo, del programa dual no están determinadas por la forma de las restricciones del primal, sino por la no negatividad de las variables de éste. *Borrel Fontelles* (1982, p. 282) se manifiesta en este sentido al señalar que *no existe ninguna relación entre el sentido de las desigualdades de las restricciones del programa primal y las del dual, en contra de la extendida creencia entre los economistas, que les hace suponer que si las restricciones del primal son de la forma > =, las del dual son de la forma < =, y viceversa. Tal error es consecuencia de una presentación mutilada de la teoría de la dualidad.* Por otra



Esquema 2.

parte, las estrechas relaciones entre los dos programas permiten explicar las relaciones que, a su vez, se dan en los casos especiales de la programación lineal y que *López Moreno, M. J.* (1991, p. 372) sintetiza en la forma que se detalla a continuación, revelador de que tan sólo una solución óptima finita y única en uno de los dos problemas se corresponde con una solución de la misma naturaleza en el planteamiento del otro. Es decir, se parte, en este caso, de un espacio de las actividades acotado y dándose la solución óptima en un vértice del polígono o poliedro convexo que contiene todas las soluciones factibles del problema.



Esquema 3

Problema PRIMAL	*Problema DUAL*
Solución degenerada	Optimos alternativos
Optimos alternativos	Solución degenerada
Solución infinita	Ausencia de solución
Ausencia de solución	Solución infinita

Todo lo expuesto hasta aquí tiene, pues, un especial interés en cuanto al correcto planteamiento primal-dual, pero también nos permite compreder mejor la aplicación del método o algoritmo alternativo conocido como *simplex-dual*, particularmente interesante en cualquier tipo de problema que tenga en la tabla inicial una solución básica no factible. El método simplex dual, cuyo desarrollo se debe a *C. E. Lemke* (1954, p. 48), opera con la tabla del problema primal, pero le aplica los criterios propios del problema dual. El simplex dual se basa en los siguientes requisitos: 1) Que se cumplan las condiciones de óptimo; 2) Que exista, al menos, una variable básica que tome valor cero o negativo, y 3) Que exista un pivote negativo (pivote dual).

El método tradicional de la dualidad, así como el alternativo del simplex dual, contribuyen, sin duda, a una resolución más expeditiva de los problemas como ocurre en aquellos casos que precisan, por ejemplo, la utilización de una base artificial o el análisis paramétrico de los mismos. En efecto, este análisis se centra generalmente en los coeficientes de la función objetivo (c_j) y en los términos independientes de las restricciones (b_i).

La parametrización de un coeficiente c_j implica el análisis de las distintas soluciones óptimas del modelo para los distintos valores del parámetro. Por el análisis de sensibilidad se sabe, por otra parte, que justamente, en los extremos de intervalo aparecen óptimos alternativos. Ahora bien, es evidente que teniendo en cuenta la relación primal-dual, la construcción del dual nos llevaría al análisis paramétrico de los términos independientes, ya que como se sabe los coeficientes de la función objetivo del primal se convierten en los términos independientes del sistema de restricciones del dual.

La parametrización de b_i, de la misma forma que en el caso anterior, se podría acometer directamente (aplicación del método simplex dual). Si se sigue este método, se sabe que para los valores extremos del intervalo nos encontramos en el caso de la solución degenerada. O bien a través del dual, lo que supondría efectuar el análisis paramétrico de los coeficientes de la función objetivo del mismo.

Cerrando estas breves reflexiones, parece oportuno hacer un comentario acera del significado económico de la dualidad, resaltando la dimensión de precios que caracteriza a las variables duales cuando los segundos miembros del sistema de restricciones representan disponibilidades limitadas de recursos o factores productivos. Son los precios denominados de distintas formas (sombra, teóricos, de referencia, indicativos, etcétera), que practicaría el empresario en el supuesto de adquirir una unidad adicional del correspondiente recurso escaso. Es decir, si el precio del mercado para ese recurso está por encima del*precio sombra* entonces se obtendría una pérdida neta y, consiguientemente, no interesaría su adquisición; por el contrario, si aquel es menor si interesaría ya que, en este caso, se obtendría un beneficio neto, lo que invitaría al empresario a adquirir un número de unidades adicionales en tanto en cuanto nos moviéramos dentro del margen de sensibilidad del término independiente representativo del recurso en cuestión.

Sobre esta cuestión *A. Santiago Suárez Suárez* (1970, p. 42) se expresa diciendo *que cuando se aplica la programación lineal a la empresa, es muy usual que el empresario trate de maximizar sus ingresos con esas limitaciones de recursos.* En este caso, que se plantea con frecuencia en la empresa, *la optimización del dual permitirá al empresario conocer el precio teórico de cada factor, es decir, los precios que deben ser imputados a los diferentes recursos limitados para que su valor total sea mínimo con la condición de que el valor teórico de los recursos utilizados en la obtención de una unidad de producto sea igual a su precio.* Para este autor, el sistema de precios teóricos o de referencia, obtenido en la optimización del programa dual, *es un sistema de precios de equilibrio.* Son una especie de precios naturales o justos que responden a la utilización más eficiente de los recursos productivos. Estos precios teóricos (sombra), sin embargo, coincidirían con los precios de mercado únicamente bajo un modelo de competencia perfecta.

No se pretende entrar en un análisis más pormenorizado del planteamiento de la dualidad y de su indiscutible importancia en la resolución de los múltiples y variados problemas de la programación lineal, pero entendemos que las reflexiones aquí recogidas acerca de la correcta formulación del dual, a partir de un primal dado, facilitan la comprensión de un fenómeno asociativo del mayor interés y que ha supuesto un avance significativo en la aplicación práctica de una técnica operativa a múltiples problemas de optimización que frecuentemente se dan en el seno de las empresas. Estos logros en el plano teórico se han visto, afortunadamente, favorecidos por el espectacular desarrollo informático de las últimas décadas.

BIBLIOGRAFIA

ACKOFF, RUSSELL, L.; SASIENE, MAURICE W. (1971): *Fundamentos de Investigación de Operaciones,* México, Ed. Limusa-Wiley.

ALCOCER CHILLON, F. J.; LOPEZ MORENO, M. J. (1968): *Aplicaciones de la Programación Lineal al Campo Económico,* Madrid, Ed. Ejes.

BORRELL FONTELLES, J. (1982): *Métodos matemáticos para la economía. Programación matemática,* Madrid, Ed. Pirámide.

DANTZIG, GEORGE B. (1963): *Linear Programming and Extensions,* Princeton (New Jersey), Ed. Princeton Univ. Press.

Dep. Org. de Empresas UCM (1991): *Economía de la Empresa Orgnización y Gestión),* Madrid.

DESBACEILLE, G. (1969): *Ejercicios y problemas de Investigación Operativa,* Madrid, Ed. ICE.

DORFMAN, R; SAMUELSON, P. A.; SOLOW, R. M. (1972): *Programación Lineal y Análisis Económico,* Madrid, Ed. Aguilar.

FERNANDEZ PIRLA, J. M.ª (1970): *La gestión económica de la Empresa,* Madrid, Ed. ICE.

GASS, SAUL I. (1972): *Programación Lineal. Métodos y aplicaciones,* México, Ed. CECSA.

IGNICIO, J. P. (1982): *Linear programming in single and multiple Objective Systems,* New Jersey, Ed. Prentice-Hall.

LEMKE, C. E. (1954): «The Dual Method of Solving the Linear Programming Problem», *Nsval Research Logistics Quartely,* vol. 1.

LOPEZ MORENO, M. J. (1991): *Economía de la Empresa (Organización y Gestión),* Madrid, UCM.

LLEWLLYN, R. W. (1968): *Programación Lineal,* Barcelona, Ed. Marcombo.

SIMONNARD, M. (1972): *Programación Lineal,* Madrid, Ed. Paraninfo.

SUAREZ SUAREZ, A. SANTIAGO (1970): *Aplicaciones Económicas de la Programación Lineal,* Madrid, Ed. Guadiana.