Valoración de rentas de capital con tipos de interés borrosos

MARÍA DE LOS ANGELES DOMÍNGUEZ SERRANO
MARÍA LUISA RUIZ GRACIA
JESÚS MARÍA SÁNCHEZ MONTERO
E. U. Estudios empresariales. Sevilla

INTRODUCCION

En la valoración clásica de rentas de la matemática financiera, se utiliza con frecuencia el concepto de «capital financiero» que nos muestra la valoración de una determinada cuantía de capital referida al momento de su disponibilidad o vencimiento.

En el estudio de las inversiones, se puede observar que la mayoría de los modelos elaborados parten de la hipótesis de un sistema económico estacionario. en los que se supone que los tipos de interés que van a estar vigentes en el futuro. así como las demás magnitudes, son conocidas con absoluta certeza. Sin embargo, la situación económica resulta cambiante y el número de elementos que intervienen en una operación financiera es muy elevado.

Debido a la complejidad del fenómeno inversionista, es evidente que los modelos que se han elaborado sobre ella no pueden ser un reflejo perfecto de la realidad, sino una aproximación tanto más real cuanto mejor sean captados los elementos que intervienen en el proceso.

Es ésta la razón por la que, aunque trabajemos con datos y resultados no exactos, su conocimiento por parte del inversor orientará su decisión y por lo tanto limitará su posibilidad de error.

Las leyes financieras establecen el modo en que se transforma un capital financiero cuando cambiamos el momento de su disponibilidad, siendo el tipo de interés la cantidad representativa de dicha transformación.

Hay muchas maneras de definir el interés. Según Ruiz Amestoy (1990), se denomina interés a la cantidad que se percibe como compensación por diferir la disponibilidad de un capital. En base a esta definición, para calcular su cuantía hay que fijar un precio que deberá venir referido a la unidad de capital y a la unidad de tiempo. A este precio lo denotaremos por «i».

Kaufmann y Gil Aluja en «Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas» (1986) afirman que el establecimiento formal del tipo de interés no presupone la disponibilidad de su utilización a la cambiante realidad del sistema económico, por lo que uno de los problemas más importantes que se plantean ante la realización de un proyecto de inversión viene dado por la fijación del tipo de interés que se debe tomar como base de cálculo. Estas dificultades adquieren en los momentos actuales una importancia especial como consecuencia de que no sólo existe una gran variedad de tipos en el mercado, según el momento y la empresa a quien corresponde realizar la inversión, sino que resultan variables a lo largo del tiempo. Si a esto se añade la incertidumbre con que se plantea el futuro, no es extraño que se haya recurrido a la utilización de tipos de interés borrosos.

La teoría de subconjuntos borrosos está adecuada al tratamiento de la incertidumbre y, por lo tanto, adaptada a las necesidades del mundo real, cada vez más inmerso en el campo de la incertidumbre.

En la actualidad existen en el mercado una gran variedad de tipos de interés; sin embargo, es bien conocido que estos tipos, en lo que se refiere al mercado español, han disminuido en los últimos dos años en dos o tres puntos y es de esperar que puedan disminuir durante los próximos años si se tiende a una convergencia con los tipos de interés vigentes en los países de la CEE si se persigue la búsqueda del mercado único europeo.

NUMEROS BORROSOS

Zadeh (1965) de la Universidad de Berkeley (California) presenta los subconjuntos borrosos a partir de la noción de conjunto.

Se puede representar un subconjunto vulgar como $(E, \mu_A(x))$, siendo:

E conjunto referencial

μ_A función característica de $A \subset E$ definida de la siguiente forma:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

En estos conjuntos un elemento o pertenece o no pertenece a un subconjunto dado.

En el subconjunto borroso:

$$(E, \mu_{\tilde{A}}(x)) \;/\; \mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha \text{ si } x \in A_\alpha$$

siendo A_α un subconjunto de confianza de nivel de presunción α, cuya definición y propiedades pueden ser consultadas en el libro «Las matemáticas del azar y de la incertidumbre» de Kaufmann y Gil Aluja (1990).

(Utilizamos la notación $\tilde{A}$ para representar un subconjunto borroso.)

Los intervalos de confianza son utilizados como un medio de tratamiento de la incertidumbre en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z}$. Si se asocia la noción de subjetividad a la de incertidumbre se llega, para $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{Z}$, a la noción de número borroso.

Un subconjunto $\tilde{A} \subset \mathbb{R}$ se dice «normal» cuando max $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$, $\forall\, x \in \tilde{A}$.

Un subconjunto $\tilde{A} \subset \mathbb{R}$ se dice «convexo» cuando los subconjuntos vulgares de nivel α son segmentos o intervalos de confianza de la forma:

$$A_\alpha = \left[a_1^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)}\right]$$

Una definición equivalente de convexidad es:

$$\tilde{A} \subset \mathbb{R} \text{ convexo} \Leftrightarrow \forall\ x_1, x_2 \in A_\alpha,\ \forall\ \alpha \in [0,1],\ \forall\ \lambda \in [0,1]$$
$$\mu_{A_\alpha}(\lambda\ x_1 + (1-\lambda)\ x_2) \geq \min\left(\mu_{A_\alpha}(x_1),\ \mu_{A_\alpha}(x_2)\right)$$

Llamaremos número borroso a todo subconjunto borroso de $\mathbb{R}$ normal y convexo. Por tanto, un número borroso es la asociación de dos conceptos, el de intervalo de confianza (ligado a la incertidumbre) y el de nivel de presunción (ligado a la subjetividad).

Con los números borrosos se pueden hacer operaciones de suma, diferencia, producto y cociente, siendo los resultado de éstas números borrosos, es decir, son operaciones internas.

TIPOS DE INTERES BORROSOS

En la figura I, se representa un tipo de interés i, borroso y de forma triangular. El «nivel de presunción» del número borroso puede variar entre 0 y 1.

A cada $\alpha_k / 0 \leq \alpha_k \leq 1$ le hacemos corresponder el intervalo de confianza de nivel α_k: $[r_k^{(\alpha)}, s_k^{(\alpha)}]$. Siendo posible expresar este intervalo de confianza en función de α_k de la forma:

$$[r_k^{(\alpha)}, s_k^{(\alpha)}] = [r + (m-r)\,\alpha_k,\ s - (s-m)\,\alpha_k]$$

Esto se deduce de la semajanza de los triángulos $[r, x, r_k^{(\alpha)}]$ y [r,m,vértice superior] (Ver figura I). De donde:

$$\frac{x - r}{\alpha_k} = \frac{m - r}{1} \Rightarrow x - r = \alpha_k (m - r) \Rightarrow x = r + (m - r)\, \alpha_k = r_k^{(\alpha)}$$

Análogamente para $s_k^{(\alpha)}$.

A partir de los intervalos de confianza se pueden realizar las siguientes operaciones:

$[a,b]\ (+)\ [c,d] = [a+c\ ,\ b+d]$
$[a,b]\ (.)\ [c,d] = [a \cdot c\ ,\ b \cdot d]$, siendo $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$
$[a,b]\ (:)\ [c,d] = [a/d\ ,\ b/c]$, siendo $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$ y $c > 0$
$[1,1]\ (:)\ [c,d] = [1/d\ ,\ 1/c]$, siendo $c,d \in \mathbb{R}^+$ y $c > 0$

Lo que permite escribir el tipo de actualización (descuento) en forma borrosa de la siguiente forma:

$$\frac{1}{1 + [\, r_k^{(\alpha)}, s_k^{(\alpha)} \,]} = \frac{1}{[\, 1 + r_k^{(\alpha)}, 1 + s_k^{(\alpha)} \,]} = \left[\frac{1}{1 + s_k^{(\alpha)}}, \frac{1}{1 + r_k^{(\alpha)}} \right]$$

VALORACION DE LAS RENTAS DE CAPITAL

Caso constante, temporal, postpagable

1. *Inmediata*

Consideremos una renta de n términos constantes que denotamos por «a», cuyo esquema es:

Si consideramos el tanto de interés constante y valoramos con la ley financiera de capitalización compuesta, el valor de esta renta en los momentos 0 y n (que denotamos por V_0 y V_n, respectivamente) viene dado por las fórmulas:

$$V_0 = a\, a_{\overline{n}|i} \text{ y } V_n = a\, s_{\overline{n}|i}$$

donde: $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$ y $s_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1 + i)^n - 1}{i}$

Si consideramos un tipo de interés borroso y triangular, se obtiene:

$$V_o = a\left[\frac{1}{1+s_k^{(\alpha)}}\ ,\ \frac{1}{1+r_k^{(\alpha)}}\right] + a\left[\frac{1}{1+s_k^{(\alpha)}}\ ,\ \frac{1}{1+r_k^{(\alpha)}}\right]^2 +$$

$$+\ldots\ldots+ a\left[\frac{1}{1+s_k^{(\alpha)}}\ ,\ \frac{1}{1+r_k^{(\alpha)}}\right]^n =$$

$$= a\left\{\left[\frac{1}{1+s_k^{(\alpha)}}\ ,\ \frac{1}{1+r_k^{(\alpha)}}\right]+\ldots+\left[\frac{1}{\left(1+s_k^{(\alpha)}\right)^n}\ ,\ \frac{1}{\left(1+r_k^{(\alpha)}\right)^n}\right]\right\}=$$

$$= a\left\{\left[\frac{1}{1+s_k^{(\alpha)}} + \frac{1}{\left(1+s_k^{(\alpha)}\right)^2} +\ldots+ \frac{1}{\left(1+s_k^{(\alpha)}\right)^n}\ ,\right.\right.$$

$$\left.\left.,\ \frac{1}{1+r_k^{(\alpha)}} + \frac{1}{\left(1+r_k^{(\alpha)}\right)^2} +\ldots+ \frac{1}{\left(1+r_k^{(\alpha)}\right)^n}\right]\right\}$$

Ahora bien:

$$\frac{1}{1+s_k^{(\alpha)}} + \frac{1}{\left(1+s_k^{(\alpha)}\right)^2} +\ldots+ \frac{1}{\left(1+s_k^{(\alpha)}\right)^n}$$

es la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica de razón $r = \dfrac{1}{1+s_k^{(\alpha)}}$ por lo tanto su valor es:

$$\frac{\dfrac{1}{1+s_k^{(\alpha)}} - \dfrac{1}{\left(1+s_k^{(\alpha)}\right)^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{1 - s_k^{(\alpha)}}} = \frac{1 - \left(1 + s_k^{(\alpha)}\right)^{-n}}{s_k^{(\alpha)}} = a_{\overline{n}|\, s_k^{(\alpha)}}$$

Razonando de forma análoga con el segundo miembro del intervalo:

$$\frac{1}{1+r_k^{(\alpha)}} + \frac{1}{\left(1+r_k^{(\alpha)}\right)^2} +\ldots+ \frac{1}{\left(1+r_k^{(\alpha)}\right)^n} = a_{\overline{n}|\, r_k^{(\alpha)}}$$

Luego la expresión para el valor de la renta en el origen será:

$$V_0 = a\ [a_{n|s_k^{(\alpha)}}\ ,\ a_{n|r_k^{(\alpha)}}]$$

Para calcular el valor final de la renta constante de n términos iguales de cuantía a, vamos a capitalizar cada término para valorarlos en el momento n:

$$V_n = a\ [1 + r_k^{(\alpha)}\ ,\ 1 + s_k^{(\alpha)}]^{(n-1)} + a\ [1 + r_k^{(\alpha)}\ ,\ 1 + s_k^{(\alpha)}]^{(n-2)} +$$

$$+ \ldots\ldots + a\ [1 + r_k^{(\alpha)}\ ,\ 1 + s_k^{(\alpha)}] + a\ [1,1] =$$

$$= a\ \{[(1 + r_k^{(\alpha)})^{n-1}\ ,\ (1 + s_k^{(\alpha)})^{n-1}] + \ldots\ldots +$$

$$+ [(1 + r_k^{(\alpha)})\ ,\ (1 + s_k^{(\alpha)})] + [1,1]\} =$$

$$= a\ [(1 + r_k^{(\alpha)})^{n-1} + \ldots\ldots + (1 + r_k^{(\alpha)}) + 1,$$

$$,\ (1 + s_k^{(\alpha)})^{n-1} + \ldots\ldots + (1 + s_k^{(\alpha)}) + 1]$$

Al igual que antes, tanto el primer miembro como el segundo del intervalo con suma de n términos de una progresión geométrica de razones $r = (1 + r_k^{(\alpha)})^{-1}$ y $r = (1 + s_k^{(\alpha)})^{-1}$, respectivamente; por tanto:

$$V_n = a \left[\frac{1 - (1 + r_k^{(\alpha)})^n}{1 - (1 + r_k^{(\alpha)})}\ ,\ \frac{1 - (1 + s_k^{(\alpha)})^n}{1 - (1 + s_k^{(\alpha)})} \right] =$$

$$= a \left[\frac{(1 + r_k^{(\alpha)})^n - 1}{r_k^{(\alpha)}}\ ,\ \frac{(1 + s_k^{(\alpha)})^n - 1}{s_k^{(\alpha)}} \right]$$

$$V_n = a\ [s_{n|r_k^{(\alpha)}},\ s_{n|s_k^{(\alpha)}}]$$

2. *Anticipada*

Valorando p períodos después de terminar la renta tendremos:

$$V_{n+p} = [a\, s_{n|r_k^{(\alpha)}}\ ,\ a\, s_{n|s_k^{(\alpha)}}]\quad [1 + r_k^{(\alpha)}\ ,\ 1 + s_k^{(\alpha)}]^p =$$

$$= a\, s_{n|r_k^{(\alpha)}}\ (1 + r_k^{(\alpha)})^p\ ,\ a\, s_{n|s_k^{(\alpha)}}\ (1 + s_k^{(\alpha)})^p]$$

3. *Diferida*

Valorando h períodos antes de comenzar la renta tendremos:

$$V_{-h} = \left[a\, a_{\overline{n}|s_k^{(\alpha)}} ,\ a\, a_{\overline{n}|r_k^{(\alpha)}}\right] \left[\frac{1}{1+s_k^{(\alpha)}} \ ,\ \frac{1}{1+r_k^{(\alpha)}}\right]^h =$$

$$= \left[a\, a_{\overline{n}|s_k^{(\alpha)}} \left(1 + s_k^{(\alpha)}\right)^{-h} ,\ a\, a_{\overline{n}|r_k^{(\alpha)}} \left(1 + r_k^{(\alpha)}\right)^{-h}\right]$$

EJEMPLO

Vamos a valorar una renta constante de 5 términos de cuantía anual postpagable de 200.000 pts. cada uno, al final de la misma. Supondremos que el tipo de interés es un número borroso triangular como el que aparece en la figura I, donde:

$$r = 0{,}10; \ m = 0{,}125 \ \text{ y } \ s = 0{,}135$$

Por lo tanto, aplicando la fórmula anterior:

$$V_n = a \ \left[s_{\overline{n}|r_k^{(\alpha)}} \ ,\ s_{\overline{n}|s_k^{(\alpha)}}\right]$$

Como vimos en el apartado de tipos de interés borrosos, en el caso de número borroso triangular, pueden obtenerse los extremos del intervalo de confianza de nivel de α_k, de la forma:

$$r_k^{(\alpha)} = r + (m-r)\,\alpha_k$$
$$s_k^{(\alpha)} = s - (s-m)\,\alpha_k$$

En nuestro ejemplo:

$$V_5 = 200.000 \left[\frac{(1 + 0{,}1 + 0{,}025\alpha_k)^5 - 1}{0{,}1 + 0{,}025\alpha_k} \ ,\ \frac{(1 + 0{,}135 - 0{,}01\alpha_k)^5 - 1}{0{,}135 - \alpha_k}\right]$$

Tomando $\alpha_k = 0{,}5$ obtenemos: $r_k^{(\alpha)} = 0{,}1125$, $s_k^{(\alpha)} = 0{,}13$

$$V_5 = 200.000 \ [6{,}2588444 \ ,\ 6{,}4803077]$$

$$V_5 \approx [1.251.769 \ ,\ 1.296.062]$$

Tomando $\alpha_k = 0{,}25$ obtenemos: $r_k^{(\alpha)} = 0{,}10625$, $s_k^{(\alpha)} = 0{,}1325$

$$V_5 = 200.000\ [6{,}1815529\ ,\ 6{,}512583]$$

$$V_5 \approx [1.236.310\ ,\ 1.302.505]$$

Como puede comprobarse se obtiene un intervalo más amplio que contiene el anterior, debido a que hemos tomado un nivel de presunción más pequeño.

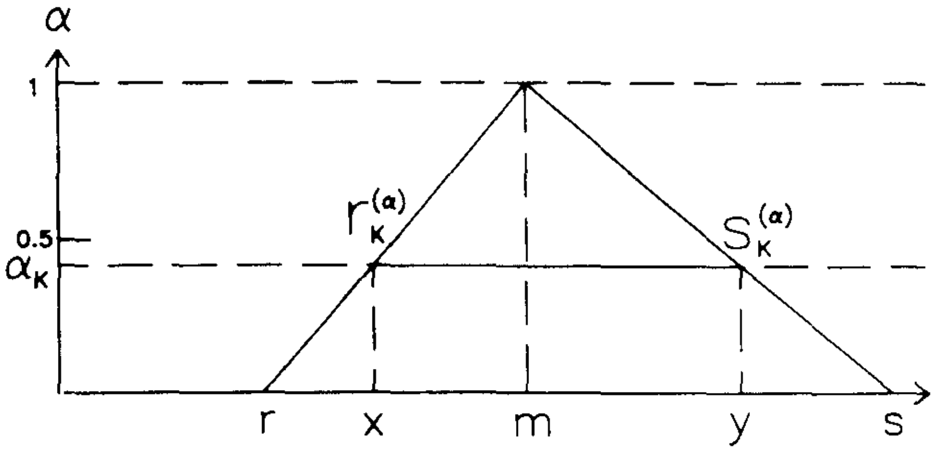

Figura 1.—*Número borroso triangular.*

BIBLIOGRAFIA

DUBOIS, D. (1983): *Modèles mathemàtiques de l'imprécis et de l'incertain en vue d'dedication aux techniques d'aide à la decision.* Tesis Doctoral. Universidad de Grenoble.

DUBOIS, D., y PRADE, H. (1985): *Théorie des possibilités.* Ed. Masson.

DUBOIS, D., y PRADE, H. (1980): *Fuzzy sets and systems theory and applications.* Publ. Academic Press.

GONZALEZ CATALA, V (1984): *introducción a las Operaciones Financieras Bancarias y Bursátiles.* Ed. Tebar Flores.

GUPTA, M. M., SARIDIS, G. N. y GAINES, B. R. (1977): *Fuzzy automata and decision processes.* Publ. North Holland.

KANDEL, A. (1982): *Fuzzy techniques and pattern recognition.* Publ. Wiley.

KAUFMANN, A. (1973-1978): *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous.* Tomo I, II y IV. Ed. Masson. (Traducidos al español, inglés y ruso).

KAUFMANN, A. (1986): *Nouvelles logiques pour l'intelligence artificielle.* Ed. Hermes.

KAUFMANN, A. (1987): *Les expertons.* Ed. Hermes.

KAUFMANN, A. (1988): *Le paramétrage des moteurs d'inference.* Ed. Hermes.

KAUFMANN, A., DUBOIS, T. y COOLS, M. (1975): *Exercises avec solutions sur la treorie des sous-ensembles flous.* Ed. Masson. (Traducido al español).

KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J. (1986): *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas.* Ed. Milladoiro. Santiago de Compostela.

KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J. (1987): *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre.* Ed. Hispano Europea. Barcelona.

KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J. (1988): *Models per la recerca d'efectes oblidats.* Ed. Milladoiro. Barcelona. (Traducido al español.)

KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J. (1990): *Las matemáticas del azar y la incertidumbre.* Centro de Estudios Ramón Areces. Madrid.

MANDINI, E. H. y GAINES, B. A. (1981): *Fuzzy reasoning and its applications.* Publ. Academic Press.

NEGOITA, C. V. (1979): *Management applications to system theory.* Publ. Birkhouser. Bale et Stuttgart.

NEGOITA, C. V. y RALESCU, D. A. (1975): *Applications of fuzzy sets to systems analysis.* Publ. Birkhauser. Bale and Stuttgart.

PRADE, H. (1982): *Modèles mathemàtiques de l'imprécis et de l'incertain en vue d'applications au raisonnement naturel.* Tesis Doctoral de Ciencias. Universidad Paul Sabatier. Toulouse.

PREVOT, M. (1977): *Sous-ensembles flous. Une approche théorique.* Ed. Sirey.

RUIZ AMESTOY, J. M. (1990): *Matemática Financiera.* Centro de Formación del Banco de España. Madrid.

TRILLAS, E. (1980): *Conjuntos Borrosos.* Ed. Vicens. Barcelona.

WANG, P. P. y CHANG, S. K. (1980): *Fuzzy sets. Theory and applications to Policy Analysis and Information Systems.* Plenum Press.

ZIMMERMANN, H. J. (1985): *Fuzzy sets and its applications.* Publ. Kluwer Nijhoff. Dordrecht.