

Los métodos actuariales en la instrumentación de compromisos de pensiones a través de planes de pensiones

FERNANDO RICOTE GIL

Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales
Profesor del Departamento de Economía Financiera y Actuarial
Universidad Complutense de Madrid

RESUMEN

Este artículo contempla los métodos actuariales aplicables a la gerencia de los compromisos de pensiones. Son descritos los métodos de aportación definida y los de prestación definida, los individuales y los agregados.

Este estudio hace referencia adicionalmente a los sistemas contributivos en los que las prestaciones se financian con las aportaciones del empresario y de los partícipes.

El artículo analiza las posibles modificaciones y alternativas a los métodos que se contemplan y los sistemas de amortización de los costes suplementarios o adicionales que se producen como consecuencia del reconocimiento de servicios pasados.

El autor efectúa también un análisis de los beneficios o pérdidas, así como su posible distribución entre los partícipes.

Por último, el estudio expone la situación de equilibrio actuarial a la que debe orientarse toda gestión de los compromisos por pensiones.

Palabras clave: Pensión, compromisos de pensiones, métodos actuariales, equilibrio financiero, amortización, coste normal, coste adicional, coste suplementario.

ABSTRACT

This article contemplates the applicable actuarial methods to the management of the commitments of pensions. The methods of defined contribution and those of defined benefit, the singular and the attachés are described.

This study makes it indexes additionally to the contributions systems in those that the benefits are financed with the manager's contributions and of the participants.

The article analyses the possible modifications and alternative to the methods that are contemplated and the systems of paying-off of the supplementary or additional costs that take place as consequence of the recognition of last services.

The author also makes an analysis of the benefits or losses and as well as his possible distribution among the participants.

Lastly the study exposes the situation of actuarial balance to which all administration of the commitments should be guided by pensions.

Key words: Pension, commitments of pensions, actuarial methods, financial balance, paying-off, normal cost, additional cost, supplementary cost.

1. PLANES DE CONTRIBUCIÓN DEFINIDA

Los planes de contribución definida se caracterizan porque fijan la cuantía anual de las contribuciones, mientras que la prestación sólo se calcula en el caso de que ocurra alguna de las contingencias cubiertas por el plan.

Por lo tanto, se calculará en cada momento el fondo de capitalización y no habrá lugar a la aplicación de métodos actuariales de financiación del coste actuarial.

2. FONDO DE CAPITALIZACIÓN

El *fondo de capitalización* en cualquier año t se define como la prestación a la que tendría derecho el beneficiario del plan si durante ese año ocurriera alguna de las contingencias aseguradas (fallecimiento del partícipe, invalidez, etc.). Es decir, equivale al concepto de provisión matemática y se calcula mediante *capitalización financiera*.

Por tanto, el *fondo de capitalización* al final de cada año es siendo i_h el interés unitario realmente obtenido en el año h :

$$F_t = \sum_{s=1}^t C_s \prod_{h=s}^t (1 + i_h)$$

Si el partícipe llega con vida a la edad de jubilación ($t=t_j$), el capital acumulado es:

$$F_{t_i} = \sum_{s=1}^{t_i} C_s \prod_{h=s}^{t_i} (1 + i_h)$$

La prestación puede reconocerse en forma de capital (de importe F_{t_i}) o en forma de renta.

Si la prestación es en forma de renta, el importe de la misma se obtiene igualando el Fondo de Capitalización al valor actuarial de la renta.

3. PLANES DE PRESTACIÓN DEFINIDA

Los planes de prestación definida se caracterizan por definir el importe de las prestaciones, calculando las contribuciones o cuotas necesarias para garantizar dichos pagos mediante procedimientos actuariales.

En este caso es el promotor el que asume el riesgo de que las inversiones sean deficientes y se beneficia si las inversiones son muy rentables.

El principal problema en este tipo de planes es elegir la distribución del coste total del plan durante el período de actividad de cada partícipe, lo que depende fundamentalmente de la capacidad contributiva del promotor o del partícipe. Para ello existen distintos *métodos actuariales*, que pueden agruparse en dos tipos extremos:

- Métodos de las prestaciones acumuladas
- Métodos de las prestaciones proyectadas

Antes de analizar cada método, vamos a definir una serie de *conceptos fundamentales*:

- *Edad de entrada al plan* (X_e). Es la edad a la que al partícipe se le incluye como miembro del plan. Suele coincidir con la edad de entrada en la empresa.
- *Edad inicial* (X_0). Es la edad del partícipe en la fecha en que el plan entra en vigor. Puede coincidir o no con la edad de entrada en la empresa, y es útil en caso de reconocimiento de los servicios pasados.
- *Edad actual* (X). Es la edad actuarial del partícipe en la fecha de referencia del cálculo del coste del plan.

Las **magnitudes fundamentales** que es necesario determinar en cada uno de los métodos son:

- *Coste Normal (CN)*. Es el coste que se asigna a cada año de funcionamiento del Plan de Pensiones para garantizar las prestaciones devengadas a partir de su entrada en vigor.
- *Coste Suplementario (CS)*. Cuando *el* plan entra en vigor, pueden existir trabajadores que llevan prestados un número determinado de años de servicio en la empresa. En estos casos se pueden reconocer derechos con carácter retroactivo e incorporarlos al Plan, computando el número de años de servicio prestado por los empleados desde su edad de entrada hasta el momento en que el plan entró en vigor. El coste de las prestaciones reconocidas por los años de antigüedad en la empresa hasta la fecha de suscripción del plan de pensiones se denomina Coste suplementario.
- *Coste de los Servicios Pasados (CSP)*. Es el coste total de las prestaciones devengadas a una fecha determinada, que se corresponde normalmente con la de cierre del ejercicio de realización de los cálculos actuariales, siguiendo las hipótesis de trabajo de tipo de interés, mortalidad, etc. Representa la provisión matemática en los seguros de vida.
- *Coste No Amortizado (CNA)*. Es la parte de los compromisos adquiridos (Coste de los Servicios Pasados) a la que el plan no podría hacer frente en el caso de su conclusión.

En los métodos en que es necesario Coste Suplementario surge el problema de la amortización del mismo. Es decir, las obligaciones contraídas por servicios pasados dan lugar a unas provisiones que el plan debería tener constituidas pero que no las tiene, debiendo amortizarse durante el período activo del partícipe. Existen diversos métodos de cálculo de la *anualidad de amortización del Coste Suplementario*, que estudiaremos más adelante.

Por tanto, el *Coste Anual* (que resulta de la distribución del coste total del plan a lo largo del período de contribuciones, según los distintos métodos) se compone de dos elementos:

- Coste Normal (*CN*).
- Anualidad de amortización del Coste Suplementario (*Y*).

El cálculo del coste anual se realiza *a priori*, de acuerdo con las hipótesis actuariales (tablas de mortalidad, tipo de interés técnico *i*, evolución de los sala-

rios, etc.). El coste real *a posteriori* dependerá del comportamiento real de las distintas magnitudes (mortalidad, rentabilidad, etc.), pudiendo producirse pérdidas o ganancias actuariales por estos conceptos. Si existe una ganancia actuarial, ésta se puede destinar a incrementar las prestaciones o a amortizar el coste suplementario.

Los *objetivos da todo método actuarial* son los siguientes:

1. Calcular un coste normal que permita cubrir las obligaciones que se van generando desde la fecha de contratación del plan, que suele expresarse como porcentaje del salario.
2. Generar unas reservas que cubran al menos el valor actual actuarial de todas las prestaciones devengadas desde la fecha de efecto del mismo, que corresponden a los partícipes en el supuesto de conclusión del plan.
3. Constituir unas reservas que se ajusten en lo posible a las verdaderas obligaciones contraídas en la fecha de finalización del plan.
4. Flexibilidad que permita al promotor afrontar financieramente el coste del mismo.

Hay que tener en cuenta que ningún método de coste actuarial puede satisfacer los cuatro objetivos al mismo tiempo.

4. MÉTODO DE LAS PRESTACIONES DEVENGADAS

Este método considera que cada año se devenga una parte proporcional de la prestación total a reconocer en la fecha de jubilación.

El devengo es en proporción a los años de servicios pasados sobre servicios totales, pudiendo distinguirse dos casos:

- a) Si la acreditación proporcional año a año se realiza sin tener en cuenta el incremento de salarios, es decir, se devenga anualmente una parte de la prestación en función del salario de cada año, estaríamos ante la modalidad denominada *Crédito Unitario (Unit Credit)*.
- b) Si proyectamos los salarios, es decir, tenemos en cuenta el incremento salarial, calculando el salario final y acreditando año a año una proporción de la prestación en función de ese salario final (estimado de acuerdo con unas hipótesis de crecimiento), estaríamos ante la modalidad denominada *Crédito Unitario Proyectado (Projected Unit Credit)*.

Estos métodos son los que producen menor provisión matemática, porque las dotaciones futuras tienden a ser más altas.

5. MODALIDAD CRÉDITO UNITARIO («UNIT CREDIT»)

Por cada año de servicio en la empresa se atribuye a cada empleado una cuantía de prestación o beneficio (bx). La cuantía de la prestación puede ser una cantidad constante o variable y depende del salario del trabajador o no.

Si la cuantía b es constante, la prestación acumulada por los años de servicio en la empresa en el año x será:

$$B_t = (x - x_e) b$$

donde t representa el momento actual y x_e la edad de entrada en la empresa.

En el caso de que la prestación se defina como porcentaje del salario, la prestación devengada en el año x es:

$$b_t = r s_t$$

donde r es el porcentaje del salario anual, y s , el salario computable en el año t .

La prestación acumulada es la suma de las prestaciones devengadas durante todos los años de servicio pasados (con la hipótesis de crecimiento salarial):

$$B_t = r \sum_{k=t_e}^{t-1} s_k$$

siendo t_e la fecha de entrada en la empresa.

Por tanto, el Coste Normal (valor actuarial de la prestación devengada en el año de la valoración) puede establecerse en una cantidad determinada o en forma de contribución o cuota sobre el salario.

El *Coste Normal del k-ésimo partícipe* puede definirse como la contribución o cuota necesaria para garantizar la prestación devengada en la anualidad, es decir:

$$CN_t^k = b_t \cdot x_j \cdot \ddot{d}_x$$

siendo x_j la edad de jubilación del partícipe.

El *Coste Normal Total* del plan es la suma de los Costes Normales individuales de cada partícipe del plan:

$$CN_t = \sum_{k=1}^m CN_t^k$$

El *Coste de los Servicios Pasados del k-ésimo partícipe* representa la contribución o cuota única necesaria para garantizar el pago de todas las prestaciones devengadas cada año hasta el comienzo de la anualidad t , es decir:

$$CSP_t^k = B_t \cdot x_j \cdot \ddot{d}_x$$

El *Coste de los Servicios Pasados Total* por todos los partícipes es:

$$CSP_t = \sum_{k=1}^m CSP_t^k$$

El *Coste Suplementario* representa la contribución única necesaria para garantizar las prestaciones devengadas durante los años de servicio pasados en el momento de la entrada en vigor del plan, es decir, es el Coste de los Servicios Pasados existente en la fecha en que el plan entra en vigor:

$$CS = CSP_{t_0}$$

El Coste Suplementario no suele aportarse en el momento de la suscripción del plan, por lo que éste no dispone de activos suficientes para garantizar el total de las prestaciones devengadas (Coste de los Servicios Pasados). Por tanto, existirá un *Coste No Amortizado (CNA_t)*, que será igual al Coste de los Servicios Pasados Total menos el Activo Neto del Fondo (A_f), constituido fundamentalmente por las contribuciones y los rendimientos obtenidos de las mismas), es decir:

$$CNA_t = CS_t - A_t$$

Este coste normalmente disminuye al amortizar cada año la cantidad convenida, ya que una parte de la contribución anual se destina a la amortización del Coste Suplementario.

Aunque es un caso poco frecuente, puede suceder que el Coste No Amortizado llegue a ser una cantidad negativa, es decir:

$$CNA_t < A_t$$

lo que significa que el valor actual actuarial del total de contribuciones realizadas al plan supera los compromisos adquiridos por el mismo. Es decir, existe un *excedente actuarial*, que podría reducir los Costes Normales futuros.

6. MODALIDAD CRÉDITO UNITARIO PROYECTADO («PROJECTED UNIT CREDIT»)

La diferencia con la anterior es que esta modalidad tiene en cuenta el crecimiento salarial, al proyectar los salarios al momento de la jubilación. En este caso:

$$S_t = \sum_{h=0}^t s_h$$

La prestación total en el momento de la jubilación t_j se define:

$$B_{t_j} = K \frac{(x_{t_j} - x_e)}{n} (S_{t_j} - S_{t_0})$$

donde n es el número total de años de servicio, y $(S_{t_j} - S_{t_0})$ el salario total adquirido durante todos los años de servicio.

El valor de las prestaciones devengadas en t es:

$$B_t = K \frac{(x - x_e)}{n} (S_t - S_{t-n})$$

y el valor de la prestación devengada en el año t es:

Si consideramos b_t como una parte proporcional de la prestación B_{t_j} acumulada en el momento de la jubilación t_j , entonces:

$$b_t = \frac{B_{t_j}}{(x_j - x_e)}; B_t = \frac{B_{t_j}}{(x_j - x_e)}(x - x_e)$$

Si, por el contrario, consideramos b_t como un porcentaje constante del salario a cada edad, tendremos:

$$b_t = \frac{B_{t_j}}{S_t} s_t; B_t = \frac{B_{t_j}}{S_t} S_t$$

7. MÉTODOS DE LAS PRESTACIONES PROYECTADAS

En estos métodos, el coste anual se obtiene teniendo en cuenta el total de las prestaciones garantizadas por el plan en el momento de la jubilación, en vez de las prestaciones devengadas en un ejercicio determinado. Se determina en base a hipótesis de trabajo sobre la cuantía anual (estimada) de la prestación en la jubilación, y por equivalencia actuarial se calcula la cuantía de la pensión a partir del importe de dicha prestación. El coste total se distribuye a lo largo del período de servicio que resta hasta la jubilación. Así se determina un importe (contribución) que representa el coste anual que garantiza la pensión de jubilación futura.

Este coste, una vez calculado, se mantiene siempre que la experiencia obtenida no difiera significativamente de las hipótesis actuariales de trabajo aplicadas, no se produzcan cambios en la composición del colectivo o se reconozcan nuevas prestaciones.

El coste normal puede ser de cuantía constante durante todos los años, o variable en función de la evolución del salario o de otras magnitudes. Si es de cuantía constante es previsible que se produzcan fluctuaciones importantes en el Coste Normal, las cuales deberán ser cubiertas mediante contribuciones extraordinarias.

Los métodos de prestaciones proyectadas pueden agruparse en los siguientes tipos:

- *Métodos individuales.* El coste global del plan se obtiene sumando los costes correspondientes a cada partícipe del colectivo calculados independientemente, aplicando el sistema de capitalización individual.
- *Métodos agregados*¹. Suponen el tratamiento del colectivo de partícipes de forma conjunta o agrupada mediante valores promedio, aplicando el sistema actuarial de capitalización colectiva.
- *Métodos mixtos o combinados.* Consisten en una combinación de los dos anteriores.

Tanto en los métodos individuales como en los agregados, la determinación del coste se basa en:

- *La edad de entrada (x_e).* Si el plan es posterior a ésta, pueden reconocerse los servicios pasados explícitamente.
- *La edad alcanzada o actual (x).* No se consideran de forma explícita los servicios pasados (aún no financiados). El coste de la prestación final se distribuye entre la fecha de entrada del partícipe en el plan y la de su jubilación.

8. MÉTODOS INDIVIDUALES

A) Método individual basado en la edad actual (*Entry Age Normal - Non Frozen - EAN*)

Este método, desde el punto de vista actuarial, es equivalente al que se sigue para determinar la prima anual de los seguros de vida. Se basa en el principio de equivalencia actuarial entre todas las prestaciones futuras previstas en el plan para un determinado partícipe y el total de contribuciones anuales a realizar por el mismo. Se aplica, por tanto, la *capitalización individual*.

Este método estima un coste constante, bien en valor absoluto, o en términos relativos en forma de porcentaje del salario a la edad alcanzada.

Para determinar el *Coste Normal constante en valor absoluto* se parte de la equivalencia actuarial entre prestaciones y contribuciones:

¹ En los planes legales sólo se permitió en el sistema de empleo hasta la entrada en vigor del RICP, que sólo permite la capitalización individual.

$$CN_t^k a_{x:\overline{x}|} = B_{t_j}^k \cdot x_j \cdot \ddot{\partial}_x$$

por lo que el Coste Normal para el k -ésimo partícipe es:

$$CN_t^k = \frac{B_{t_j}^k \cdot x_j \cdot \ddot{\partial}_x}{\ddot{\partial}_{x:\overline{x}|}}$$

Si consideramos el *Coste Normal como un porcentaje constante del salario* ($CN_t - k \cdot s_t$), la equivalencia actuarial es:

$$k s_t (V\ddot{\partial})_{x:\overline{x}|}^\alpha = B_{t_j}^k \cdot x_j \cdot \ddot{\partial}_x$$

donde α es el incremento previsto de los salarios.

Por tanto, la cuota de contribución del k -ésimo partícipe es:

$$k = \frac{B_{t_j}^k \cdot x_j \cdot \ddot{\partial}_x}{s_t (V\ddot{\partial})_{x:\overline{x}|}^\alpha}$$

El *Coste Normal Total* del plan (para todo el colectivo) es el resultado de sumar los costes normales correspondientes a cada partícipe, es decir:

$$CN_t = \sum_{k=1}^m CN_t^k$$

El *Coste de los Servicios Pasados* en el momento actual t puede calcularse por los métodos retrospectivo y prospectivo, de la siguiente manera:

(Método Retrospectivo)

$$CSP_t = CN_t \cdot \ddot{\partial}_{x_0:\overline{x-x_0}|} \cdot \frac{1}{E_{x_0}}$$

(Método Prospectivo)

$$CSP_t^k = B_{t_j}^k \cdot x_j^{-x} / \partial_x - CN_t^k \cdot x_j^{-x_t} / \partial_{x_t}$$

En el momento t la parte del Coste de los Servicios Pasados no amortizado (CNA) se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$CNA_t = CSP_t - A_t$$

Es usual determinar $B_{t_j}^k$ como:

$$B_{t_j}^k = (t + f) \cdot \alpha \cdot s_k (1 + \beta)^{x_j - x}$$

en donde:

- t = años de servicios pasados del k -ésimo partícipe.
- t = años de servicios futuros. salario percibido.
- s_k = porcentaje previsto de incremento de los salarios.
- α = porcentaje del salario, en función de los años de servicio².

La principal *ventaja* de este método es que *no genera un Coste Suplementario*, ya que determina directamente un Coste Normal que cubre el total de prestaciones garantizadas (por servicios pasados y futuros).

$$CS_t = CSP_{t_0} = 0$$

Por tanto, el Coste No Amortizado a cualquier edad actual x es igual a cero.

$$CNA_t = 0$$

Este método, además de las limitaciones legales³, tiene dos *inconvenientes*:

² Suele oscilar entre el 1% y el 2%.

³ Artículo 5.3 Ley PyFP.

1. Para personas con edad próxima a 65 años, el coste puede ser demasiado alto, ya que cuanto más avanzada sea la edad del partícipe menor es el número de períodos que tiene para realizar sus contribuciones, y por lo tanto tendría que aportar una mayor cantidad importante en cada período.
2. La prestación (estimada) a la jubilación no debe permanecer constante cada año. Es necesario, por tanto, realizar ajustes al objeto de obtener cantidades reales, evitando en la medida de lo posible la pérdida de poder adquisitivo.

En consecuencia, el Actuario se verá en la obligación de revisar los cálculos periódicamente. Hay que tener en cuenta, además, que se parte de hipótesis actuariales inicialmente válidas, pero éstas deben ser verificadas y, en su caso, modificadas con el transcurso del tiempo para adecuar el plan a la nueva estructura real del colectivo.

B) Método individual basado en la edad de entrada

El *Coste Normal* se obtiene aplicando el principio de equivalencia actuarial a la edad de entrada x_e . El método determina la cuota que pagaría el partícipe si se asume la hipótesis de que éste hubiera empezado a realizar las contribuciones a la edad de entrada (considera conjuntamente las prestaciones por servicios pasados y futuros).

Si consideramos el *Coste Normal constante*:

$$CN_{t_e}^k \ddot{\alpha}_{x_e:\overline{x_f-x_e}|} = B_{t_e}^k \cdot x_f \cdot \ddot{\alpha}_{x_e}$$

por lo que el Coste Normal para el k -ésimo partícipe es:

$$CN_{t_e}^k = \frac{B_{t_e}^k \cdot x_f \cdot \ddot{\alpha}_{x_e}}{\ddot{\alpha}_{x_e:\overline{x_f-x_e}|}}$$

Si consideramos el *Coste Normal como un porcentaje constante del salario* ($CN_{t_e} = k \cdot s_{t_e}$), la equivalencia actuarial es:

$$k \cdot s_{t_e} (V\ddot{\alpha})_{x_e:\overline{x_f-x_e}|}^\alpha = B_{t_e}^k \cdot x_f \cdot \ddot{\alpha}_{x_e}$$

donde α es el incremento medio previsto de los salarios.

Por tanto, la cuota de contribución del k -ésimo partícipe es:

$$k = \frac{B_{t, x_j-x_e}^k / \ddot{O}_{x_e}}{s_{t, (V\ddot{O})_{x_e: x_j-x_e}^\alpha}}$$

El *Coste Normal Total* del plan (para todo el colectivo) es el resultado de sumar los costes normales correspondientes a cada partícipe, es decir:

$$CN_t = \sum_{\forall k} CS_t^k$$

El *Coste de los Servicios Pasados* del k -ésimo partícipe a la edad x es el capital que se habría constituido en el año t si hubiera empezado a cotizar desde la edad de entrada x_e , es decir:

$$CSP_t^k = CN_{t, x_e}^k \ddot{O}_{x_e: x-x_e} \left(\frac{1}{s_{x-x_e} E_{x_e}} \right)$$

Por tanto, el Coste de los Servicios Pasados Total (valor actuarial de los compromisos adquiridos por el plan hasta ese momento) es:

$$CSP_t = \sum_{\forall k} CSP_t^k$$

El Coste de los Servicios Pasados No Amortizado a la edad x es:

$$CNA_t = CSP_t - A_t$$

El *Coste Suplementario* para el k -ésimo partícipe (por este método) es:

$$CS_t^k = CSP_{t_0}^k = CN_{t, x_0}^k \ddot{O}_{x_0: x_0-x_e} \left(\frac{1}{s_{x_0-x_e} E_{x_e}} \right)$$

El *Coste Suplementario del Plan* es:

$$CS_t = \sum_{\forall k} CS_t^k$$

9. MÉTODOS AGREGADOS

A) Método agregado basado en la edad

Si se considera el *Coste Normal constante en valor absoluto*, la equivalencia actuarial colectiva⁴ entre prestaciones y contribuciones (en base a las edades actuales x), es:

$$\sum_{\forall x} CN_c \ddot{\alpha}_{x:\overline{x_j-x}|} = \sum_{\forall x} B_{t_j}^k \cdot x_{j-x} \ddot{\alpha}_x$$

donde $B_{t_j}^k$ es la prestación adquirida por el k -ésimo partícipe a la edad de la jubilación en el total de años de servicio (anteriores y posteriores a la entrada en vigor del plan).

Por tanto, el *Coste Normal* es:

$$CN_c = \frac{\sum_{\forall x} B_{t_j}^k \cdot x_{j-x} \ddot{\alpha}_x}{\sum_{\forall x} \ddot{\alpha}_{x:\overline{x_j-x}|}}$$

Si consideramos el *Coste Normal como un porcentaje constante del salario* ($CN_c = r_c \cdot s_t$), la equivalencia actuarial es:

⁴ Artículo 8.2 Reglamento de PyFP.

La utilización de *sistemas de capitalización colectiva* únicamente era posible en Planes del Sistema de Empleo. Se ha prohibido su aplicación desde la entrada en vigor del RICP.

Era condición básica para la aplicación a sistemas de empleo que las reservas generadas no sean inferiores al 80 por 100 de las que resultarían por capitalización individual, garantizando, en todo caso, la cobertura total de las prestaciones causadas. Por lo que en todo caso era preciso realizar las valoraciones en base a capitalización individual y colectiva.

$$\sum_{\forall x} r_c s_t (V\ddot{d})_{x:x_j-x}^\alpha = \sum_{\forall x \forall k} B_{t_j, x_j-x}^k \ddot{d}_x$$

donde α es el incremento medio previsto de los salarios.

Por tanto, la cuota de contribución (idéntica para todos los partícipes) es:

$$r_c = \frac{\sum_{\forall x \forall k} B_{t_j, x_j-x}^k \ddot{d}_x}{\sum_{\forall x} s_t (V\ddot{d})_{x:x_j-x}^\alpha}$$

El Coste de los Servicios Pasados en el momento t es:

$$CSP_t = \sum_{\forall x} CN_c a_{x_0:x-x_0} \left(\frac{1}{x-x_0} E_x \right)$$

Este método se caracteriza porque el valor actuarial del coste por los servicios pasados en el momento t (CSP_t) es igual al valor actuarial de las contribuciones realizadas hasta ese momento:

$$CSP_t = A_t$$

Por tanto, el Coste No Amortizado en el momento actual t es nulo.

$$CNA_t = 0$$

B) Método agregado basado en la edad de entrada

Si se considera el *Coste Normal constante en valor absoluto*, la equivalencia actuarial colectiva entre prestaciones y contribuciones a las edades de entrada x_e , es:

$$\sum_{\forall x_e} CN_c \ddot{d}_{x_e:x_j-x_e} = \sum_{\forall x_e} B_{t_j, x_j-x_e}^k \ddot{d}_{x_e}$$

donde B_{ij}^k es la prestación adquirida por el k -ésimo partícipe a la edad de la jubilación, por todos los servicios prestados (anteriores y posteriores a la entrada en vigor del plan).

Por tanto, el Coste Normal es:

$$CN_c = \frac{\sum_{\forall x_e, \forall k} B_{ij}^k \cdot x_j - x_e / \ddot{d}_{x_e}}{\sum_{\forall x_e} \ddot{d}_{x_e : x_j - x_e}}$$

Si se considera el *Coste Normal como un porcentaje constante del salario* ($CN_c = r_c \cdot s_t$), la equivalencia actuarial queda:

$$\sum_{\forall x_e} r_N s_t (V\ddot{d})_{x_e : x_j - x_e}^\alpha = \sum_{\forall x_e, \forall k} B_{ij}^k \cdot x_j - x_e / \ddot{d}_{x_e}$$

donde α es el incremento medio previsto de los salarios.

Por tanto, el Coste Normal (idéntico para todos los partícipes), en forma de porcentaje sobre el salario, es:

$$r_N = \frac{\sum_{\forall x_e} B_{ij}^k \cdot x_j - x_e / \ddot{d}_{x_e}}{\sum_{\forall x_e} s_t (V\ddot{d})_{x_e : x_j - x_e}^\alpha}$$

El Coste de los Servicios Pasados se determina por la expresión:

$$CSP_t = \sum_{\forall x} CN_c \ddot{d}_{x_e : x - x_e} \frac{1}{x - x_e} E_x$$

El Coste No Amortizado es:

$$CNA_t = CSP_{x_t} - A_t$$

El Coste Suplementario es igual al Coste de los Servicios Pasados en el momento inicial, es decir:

$$CS_t = CSP_{t_0} = \sum_{\forall x_0} CN_c \ddot{a}_{x_r: x_0 - x_e} \frac{1}{E_{x_0}}$$

La diferencia entre los tipos de cotización de los dos métodos agregados (r_s) es la fracción del salario destinada a la amortización del Coste Suplementario:

$$r_s = r_c - r_N$$

10. MÉTODOS MIXTOS O COMBINADOS

A) Método de la edad de entrada congelada (*Entry Age Normal (Frozen) - EAF*)

El cálculo del coste de la financiación del plan, en este método, se determina de forma agregada y no para cada partícipe por separado. Lo que caracteriza a este procedimiento es la absorción del impacto correspondiente al Coste de los Servicios Pasados en el Coste Normal. El Coste de los Servicios Pasados queda congelado en su valor inicial (de ahí el nombre) y se amortiza normalmente después de un cierto número de años con un pago único.

El objetivo del método es determinar el Coste Normal Total en el momento t . El Coste No Amortizado en el momento de la entrada en vigor del Plan es:

$$CNA_0 = CSP_0 - A_0$$

siendo en el momento inicial el capital constituido igual a cero, el Coste No Amortizado es el coste de las prestaciones por servicios pasados reconocidas en el momento del inicio del plan, es decir, el Coste de los Servicios Pasados Inicial:

$$CNA_0 = CSP_0 > 0$$

Esta cantidad variará sucesivamente en función de la tasa de amortización convenida cada año:

$$CNA_t = CNA_{t-1}(1+i) - R_t$$

R = tasa de amortización satisfecha en el momento t .

Otra posibilidad es que el pago del Coste Normal (calculado mediante el método *EAF*) se realice de modo que no se incremente el Coste No Amortizado.

A partir de la expresión general del Coste No Amortizado,

$$CNA_t = CSP_t - A_t$$

se obtiene el Coste de los Servicios Pasados:

$$CSP_t = CNA_t + A_t$$

Este coste, siguiendo el método *EAN*, puede calcularse por la diferencia entre el valor actuarial de las prestaciones futuras y el valor actuarial de las contribuciones futuras (método prospectivo), es decir:

$$CNA_t + A_t = \sum_{k=1}^m B^k \cdot {}_{x_j-x'}\ddot{\partial}_x - \sum_{k=1}^m CN_t^k (V\ddot{\partial})_{x:x_j-x'}$$

En esta expresión, la incógnita es la suma de los Costes Normales de cada partícipe (Coste Normal Total), que se evalúan mediante el método *EAF*.

Para calcularlo, se parte de la hipótesis de que la suma de los valores actuariales de los Costes Normales presentes y futuros de todos los partícipes es igual al valor actuarial de una renta media (referida al período de financiación medio de los partícipes del Plan) por el Coste Normal Total calculado por el Método individual (*EAN*); es decir:

$$\sum_{k=1}^m CN_t^k (V\ddot{\partial})_{x:x_j-x'} = \ddot{\partial} \sum_{k=1}^m CN_t^k$$

donde CN^k son los Costes Normales por el método *EAN*.

Despejando la renta media tenemos:

$$\bar{\partial}_x = \frac{\sum_{k=1}^m CN_t^{k'} (V\bar{\partial})_{x:x_j-x}^{\beta}}{\sum_{k=1}^m CN_t^{k'}}$$

Por tanto, la renta media es igual al cociente entre el valor actuarial de todos los costes normales futuros y el total de los costes normales (obtenidos mediante el método individual basado en la edad actual (*EAN*)).

Sustituyendo en la expresión del Coste de los Servicios Pasados, se obtiene el Coste Normal:

$$CN_t = \frac{\sum_{k=1}^m B_k \cdot {}_{x_j-x} \bar{\partial}_x t - (CNA_t + A_t)}{\bar{\partial}_x}$$

El Coste de los Servicios Pasados en este método se congela a la fecha de efecto del plan.

Si comparamos el Coste Normal Total obtenido por este método con el del método individual, tenemos:

$$CNA_0 + A_t = \sum_{k=1}^m B_k \cdot {}_{x_j-x} / \bar{\partial}_x - CN_t \bar{\partial}_x$$

$$CNP = \sum_{k=1}^m B_k \cdot {}_{x_j-x} / \bar{\partial}_x - CN_t \bar{\partial}_x$$

Restando se obtiene:

$$CNA_0 + A_t - CSP_t = (CN'_t - CN_T) \bar{\partial}_x$$

por lo que:

$$(CN'_t - CN_t) = \frac{(CNA_0 + A_t) - CSP_t}{\bar{\partial}_x}$$

Se puede observar que la variación en el Coste Normal está en función de la variación del Coste de los Servicios Pasados, mientras que el Coste No Amor-

tizado se considera como una constante, independiente del valor del Coste de los Servicios Pasados.

El coste para un solo partícipe se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$CN_t = \frac{\sum_{k=1}^m B_k \cdot x_{j-x} \cdot \ddot{\partial}_x - (CSP_0 + A_t)}{m \cdot \ddot{\partial}_x}$$

donde m es el número de partícipes.

En el primer año se tiene:

$$CN_0^{(NF)} - \frac{CN_0^{(F)} - CSP_0 - CNA_0}{\ddot{\partial}}$$

siendo $x=0$ el $CSP=CNA$, por lo que:

$$CN_0^{(NF)} = CN_0^{(F)}$$

B) Método del coste agregado («Aggregate Cost» - AGC)

Este método parte de la condición inicial de que en el momento actual x el Coste de los Servicios Pasados es igual al valor de los Activos constituidos por el Fondo:

$$CSA_t = A_t$$

Por tanto, el coste de los servicios pasados debe ser igual al valor de los activos y , a su vez, igual al fondo constituido por las contribuciones realizadas, por lo que:

$$CNA_t = 0$$

El Coste Normal es:

$$CN_t = \frac{\sum_{k=1}^m B_k \cdot x_j^{-x} / \partial_x - A_t}{\bar{\partial}_x}$$

siendo $\bar{\partial}_x$ la renta media calculada por el método *EAN*.

El inconveniente de este método es la escasa flexibilidad del importe de la contribución necesaria, debido a la no existencia de Coste No Amortizado. El equilibrio actuarial viene por tanto reflejado directamente en el Coste Normal.

El Coste Agregado es susceptible de aplicarse a un plan en el que no se reconozcan prestaciones por servicios pasados en la fecha de efecto del plan, por lo que se aplica a planes con partícipes jóvenes.

Este método presenta una cuantía inicial importante de Coste Normal, por la falta de la contribución necesaria para financiar los servicios pasados (por lo que toda la financiación es asumida por el Coste Normal).

11. PLANES CONTRIBUTIVOS

Un *Plan Contributivo* es aquel en que las prestaciones se financian no sólo por el promotor del Plan, sino también por los partícipes.

Los planes contributivos deben mantener un tratamiento equitativo a las distintas generaciones de partícipes.

Los planes contributivos suelen tener alguna de las *características* siguientes:

- a) Reembolso de las contribuciones pagadas por el partícipe (con o sin intereses) en caso de muerte o cese de la actividad en la empresa promotora del plan que dé lugar a la prestación.
- b) Prestaciones también en caso de muerte del partícipe, generalmente en forma de renta vitalicia cierta durante un número de años, o en forma de capital.

Una característica importante es que las contribuciones del partícipe deben mantenerse separadamente y no dentro de los activos del promotor, y además que el promotor no efectúe una cesión de estos activos en caso de cese o sali-

da de los partícipes. Esta separación de las dos contribuciones en algunos países se debe más bien a motivos legales que financieros.

Por tanto, la contribución del partícipe, que se invierte a un determinado interés especificado en el contrato, vendrá acumulada en un fondo «asignado» al mismo.

Una hipótesis de estimación simplificada de la contribución es aquella que consiste en no considerar las contribuciones futuras de los partícipes en el cálculo del Coste Normal.

En el caso de que se consideren también las contribuciones futuras de los partícipes, se aplicarían los métodos de financiación descritos anteriormente con ligeras modificaciones.

12. MODIFICACIÓN DEL MÉTODO DE LAS PRESTACIONES ACUMULADAS

Indicaremos con CN'' y CSP'' , respectivamente, el Coste Normal y el Coste de los Servicios Pasados correspondiente al promotor del Plan.

Vamos a considerar que la contribución del k -ésimo partícipe es estable en el tiempo (puede considerarse también como porcentaje del salario), y llamamos C_x^k a las contribuciones acumuladas por los servicios pasados hasta la edad actual x .

El Coste Normal se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$${}_k CN_t^c = b_t \cdot {}_{x_j-x} \ddot{O}_x + c_t^k \left(1 - \frac{l_{x_j}}{l_x} \right) - c_t^k$$

Una vez que se determine la contribución del k -ésimo partícipe C_t^k (también puede considerarse como un porcentaje del salario), la acumulación de las contribuciones anteriores (como en el Coste de los Servicios Pasados del método del *Crédito Unitario*), a la fecha de la estipulación del contrato, es la suma de las contribuciones de los servicios pasados C_t^k . El Coste Normal y el Coste de los Servicios Pasados se obtiene:

$${}_k CN_t^c = \underbrace{b_t \cdot {}_{x_j-x} \ddot{O}_x}_{(1)} + \underbrace{C_t^k \left(1 - \frac{l_{x_j}}{l_x} \right)}_{(2)} - \underbrace{C_t^k}_{(3)}$$

El primer sumando (1) de esta expresión, calculado con el método del *Unit Credit Cost*, también puede modificarse si se le considera como una renta vitalicia garantizada un cierto número de años.

El segundo sumando (2) representa el coste por la prestación en caso de muerte o jubilación anticipada ocurrida entre x y x_j .

Por tanto, estos dos sumandos significan que el Coste Normal está constituido por las prestaciones posteriores a la jubilación, también en caso de muerte del partícipe K , normalmente distribuidas como una renta vitalicia garantizada durante un número conveniente de años, más el eventual reembolso de las contribuciones del partícipe en caso de muerte o de cesación de las actividades en la empresa antes de la jubilación.

A este importe se debe restar la contribución del partícipe a la edad t —sumando (3)— considerada en el sumando (1), ya que los beneficiarios sólo tendrán derecho a la renta o al capital.

Esta contribución no vendrá incluida en el fondo constituido por las inversiones de los promotores para el pago del Coste Normal y el Coste de los Servicios Pasados, sino que irá a constituir un fondo separado vinculado al anterior.

Simplificando la fórmula anterior obtenemos:

$${}_k CN_t^c = b_t \cdot {}_{x_j-x} \ddot{a}_x - C_t \frac{l_{x_j}}{l_x}$$

por lo que:

$$b_t \cdot {}_{x_j-x} \ddot{a}_x = {}_k CN_t^c + C_t \frac{l_{x_j}}{l_x}$$

De esta expresión se deduce que el valor actuarial de la prestación anual b_x estará financiado en parte por el promotor, a través del coste normal, y en parte por el partícipe, con C_x , siempre que éste sobreviva en la fecha de la jubilación.

Para el cálculo del Coste de los Servicios Pasados se deben tomar las contribuciones acumuladas del k -ésimo partícipe a la edad actual x , C_x^k :

$${}_k PA_x^c = B_x \cdot {}_{x_j-x} \ddot{a}_x + C_x^k \left(1 - \frac{l_{x_j}}{l_x}\right) - C_x^k = B_x \cdot {}_{x_j-x} \ddot{a}_x - c_x^k \frac{l_{x_j}}{l_x}$$

donde C_t^k son las contribuciones acumuladas.

13. MODIFICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS BENEFICIOS PROYECTADOS

Para determinar el coste que el promotor debe cubrir en el plan contributivo, es necesario calcular la parte de la prestación garantizada por las contribuciones de los partícipes, de forma similar a la prima de seguro de vida para cada partícipe individual; la parte de la prestación adquirida por el partícipe la denominamos ${}_t B_k^c$.

Esta parte se calcula para determinar la parte de renta que se obtendrá por las contribuciones del promotor.

$${}_t B_k^c = {}_t B_k - {}_t B_k^c$$

Una vez determinado por este método el Coste Normal y el Coste de los Servicios Pasados, se sustituye la prestación total por la prestación financiada únicamente con las contribuciones del promotor ${}_x B_k^c$.

Indicamos con C_x^k la cuantía de la contribución del k -ésimo partícipe acumulada entre la edad de ingreso x_e y el momento actual x , y con c_x^k la contribución anual en forma de porcentaje del salario.

${}_t M_{x_j}^k$ indica el montante financiero relativo al k -ésimo partícipe a la edad de la jubilación x_j , que se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$${}_t M_{x_j}^k = C_t^k (1+i)^{x_j-x} + c_t^k S_{x_j-x}$$

En el caso de que el salario aumente, la fórmula se modificaría de la siguiente manera:

$${}_t M_{x_j}^k = C_t^k (1+i)^{x_j-x} + \sum_{t=x}^{x_j-1} c_t^k (1+i)^{x_j-t-1}$$

Una vez determinado el montante, la prestación anual que se obtendrá a la jubilación del k -ésimo partícipe se calcula de la siguiente forma:

$${}_t B_k^c = \frac{{}_t M_{x_j}^k}{a_{x_j}}$$

La otra parte de renta que se obtiene de las contribuciones del promotor es:

$${}_t B_k' = {}_t B_k - {}_t B_k^c$$

14. SISTEMAS DE AMORTIZACIÓN DEL COSTE SUPLEMENTARIO

Con carácter general, la anualidad de amortización del Coste Suplementario (δ) que se genera en algunos de los métodos actuariales que vimos anteriormente debe satisfacer las siguientes *condiciones*:

1. Debe cubrir como mínimo los intereses generados en el ejercicio, es decir:

$$\delta \geq CS \cdot i \cdot V$$

2. El período de amortización (n_a) debe ser menor o igual a la diferencia entre la edad de jubilación y la edad media *actuarial* del colectivo.

$$n_a \leq x_j - \bar{x}$$

obtenida a partir de:

$$q_x = \frac{\sum_x q_x l_x}{\sum_x l_x}$$

3. Las provisiones matemáticas en cualquier momento de vigencia del plan (V_t) deben cubrir al menos el valor actuarial de las pensiones causadas, es decir:

$$V_t \geq \sum_{\forall x_j} B_{t,j} \partial_{x_j}$$

4. El grado de capitalización del sistema debe ser como mínimo el que exija la legislación vigente para la capitalización colectiva (G_L). Por tanto:

$$G_t = \frac{{}_tV_c}{\sum_{\forall x} {}_tV_x} \geq G_L$$

Existen tres *enfoques generales* para determinar el Coste Suplementario amortizable para un año concreto en un Plan de Pensiones:

a) Amortización del interés generado por el Coste Suplementario

Éste es el método más sencillo y normalmente el menos costoso durante los primeros años.

La intención no es amortizar el Coste Suplementario, sino únicamente el interés que éste genera.

El principal inconveniente de este método es que el plan nunca está completamente financiado, por lo que, en el supuesto de conclusión del plan, las prestaciones devengadas por los partícipes no podrían ser completamente satisfechas⁵.

b) Amortización constante del Coste Suplementario

Es el método que más se utiliza en la práctica. Consiste en determinar la cantidad anual constante necesaria para amortizar completamente la obligación adicional por el Coste Suplementario en un número determinado de años, tratando este montante como un valor descontado y, por ello, generador de un tipo de interés.

⁵ Por este motivo, la normativa americana ERISA prohibió el empleo de este sistema de amortización, pudiendo ser utilizado únicamente para planes realizados por el Estado, por la Iglesia y otros planes no sujetos a la normativa ERISA.

El cuadro de amortización es análogo al de devolución de un préstamo. Es decir, cada entrega anual se compone de una parte de principal y una parte de interés, siendo más importante el componente de interés en los primeros años. La parte de cuota anual que representa la devolución del principal aumenta cada año.

c) Amortización del Coste Suplementario mediante un porcentaje del salario

Consiste determinar el porcentaje del salario necesario para amortizar el Coste Suplementario durante un determinado número de años.

Para ello hay que determinar el valor actual de los salarios futuros que se espera pagar durante el período de amortización.

Pueden efectuarse estimaciones sobre los ingresos y salidas del colectivo en el caso de que se considere abierto.

Para determinar el porcentaje del salario necesario para financiar el Coste Suplementario basta dividir éste entre el valor actual de los salarios futuros esperados durante el período de amortización.

Si los salarios reales fueran menores que los previstos, el Coste Suplementario nunca podría ser completamente amortizado sin un ajuste al alza del porcentaje del salario destinado a dicha amortización. Por el contrario, si los salarios reales crecieran más de lo previsto, el Coste Suplementario se amortizaría en un período más corto que el inicialmente previsto.

Dado que los salarios se incrementarán a lo largo del tiempo, la anualidad de amortización del Coste Suplementario que resulta mediante este método será menor que la obtenida mediante el método de amortización constante durante los primeros años del período de amortización, y mayor durante los últimos años.

Una vez calculada la anualidad de amortización del Coste Suplementario (δ), surge el problema de su asignación a cada uno de los partícipes del colectivo.

Una fórmula general de asignación es:

$$\delta^k = \omega_1 \frac{\alpha}{N} + \omega_2 \frac{C^k}{\sum_{\forall k} C^k} \delta$$

$$\omega_1 + \omega_2 = 1$$

$$\omega_1 + \omega_2 \in [0, 1]$$

donde:

- ∂^k = Asignación al k -ésimo partícipe.
 N = Número de miembros del subcolectivo de activos.
 C^k = Coste del partícipe que sirve de base para la asignación (Coste Normal, Coste Suplementario, una combinación entre ambos, etc.).
 $\sum_{\forall k} C^k$ = Coste Total del colectivo.

15. BENEFICIOS O PÉRDIDAS SOBRE LAS INVERSIONES

Si definimos A_t como el activo promedio del ejercicio en que están invertidas las provisiones matemáticas del Fondo⁶, el primer paso de este análisis es determinar el posible beneficio o pérdida (B_t^o) por la rentabilidad de los activos del fondo. Este valor se determina por comparación entre la rentabilidad de los activos estimada en el momento t y la real.

$$B_t^o = (R_t - i) A_t = r_t A_t$$

siendo:

- R_t = Rentabilidad Neta Real de los activos, igual a los rendimientos (netos de gastos) generados por el activo D_t (dividendos, plusvalías netas, intereses, etc.) dividido por el activo promedio del ejercicio A_t .

$$R_t = \frac{D_t}{A_t}$$

- i = Tipo de interés técnico.
 r_t = Exceso de rentabilidad de las reservas matemáticas con respecto al interés previsto.

⁶ Este activo promedio A_t se compone de:

- Tesorería (efectivo en caja, depósitos en efectivo en bancos y otras instituciones de crédito, inversiones en activos financieros del mercado monetario, Pagarés del Tesoro, participaciones en Fondos de Inversión de activos del mercado monetario).
- Valores Mobiliarios y Fondos de Inversión Mobiliaria (Deuda Pública, valores de Renta fija, valores de Renta Variable, participaciones en Fondos de Inversión Mobiliaria).
- Créditos (por contratos de préstamos hipotecarios, letras de cambio y pagarés a la orden, cédulas, bonos y participaciones hipotecarias, depósitos a plazo en bancos).
- Inmuebles.

Esta cantidad no puede definirse como un beneficio por mortalidad, sino esencialmente como un beneficio financiero, que se debe a la aplicación del principio de prudencia sobre el tipo de interés técnico « i ».

Este principio de prudencia tiene el objetivo de garantizar un cierto margen de seguridad por las oscilaciones financieras que podrían existir durante la vida del fondo. Por lo que se debe crear una «Reserva de Estabilización de Activos» con la función de atenuar las posibles fluctuaciones entre los valores de los activos del Fondo estimados y los reales.

16. BENEFICIO O PÉRDIDA SOBRE LAS PROVISIONES MATEMÁTICAS

El objetivo de este análisis es poner en relación los costes de adquisición previstos con los reales.

Para los partícipes activos, por el principio de equivalencia obtenemos la ecuación del coste de adquisición esperado, que será:

$$CSP_{t-1}(1+i) + NC_{t-1}(1+i) = CSP_t - CSP_t \cdot q_{x-1}$$

En esta expresión observamos que el Coste de los Servicios Pasados esperado en el momento t se obtiene de la suma de los costes valorados en $t-1$ capitalizados en t . De este Coste de los Servicios Pasados esperado en t debemos quitar una parte de ello debido a los presuntos fallecimientos que se sucederán durante el período $(t-1, t)$ en la población activa y que por lo tanto no inciden más sobre este coste. En otros términos, el equilibrio se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$PS_t - 1(1+i) + NC_{t-1}(1+i) + PS_t q_{t-1} = PS_t$$

Para la población pasiva las prestaciones acumuladas en el momento t serán:

$$B_t, \ddot{\delta}_{t-1}(1+i) - b_t(1+i) = B_t, \ddot{\delta}_t - q_{t-1} B_t, \ddot{\delta}_t$$

A la prestación total acumulada en $t-1$ y valorada en t , se debe restar la prestación anual anticipada b_{tj} , cobrada por el jubilado. En este punto, a la prestación total esperada en t evaluada sobre los sobrevivientes en $t-1$, debemos res-

tar la parte estimada de prestación correspondiente al fallecimiento del jubilado y que por tanto no tiene más derecho a cobrarla.

Por tanto, la prestación total acumulada en t será:

$$B_{t,j} \ddot{\partial}_{x-t}(1+i) - b_{t,j}(1+i) + q_{t-1} \cdot B_{t,j} \cdot \ddot{\partial}_x = B_{t,j} \ddot{\partial}_x$$

que representa las prestaciones acumuladas a la edad de la jubilación x_j . Haciendo la hipótesis de que las prestaciones $b_{t,j}$ se cobran por el partícipe anualmente, deberemos sustraer de la prima única el montante de las prestaciones cobradas el año $t-1$.

Considerando esta ecuación sobre toda la población activa y pasiva obtenemos:

$$CSP'_{t-1}(1+i) + CN_{t-1}(1+i) + M - B(1+i) = CSP_t + B_{x_j} \ddot{\partial}_x$$

$$CSP'_{t-1} = B_{x_j} \ddot{\partial}_{x-1} + CSP_{t-1} ; M = [CSP_t + B_{x_j} \ddot{\partial}_{t-1}] q_{x-1}$$

Con $PS'_{t,j}$ indicamos los pasivos acumulados en el momento $t-1$ sea por los activos o por los jubilados, mientras que M indica la mortalidad esperada en términos de prestaciones en la población, sea activa o jubilada, durante la época $t-1$, y representa una estima de aquellos que no conseguirán llegar a la edad t .

El Coste de los Servicios Pasados en el momento t , obtenido de esta ecuación, será un valor estimado que deberá compararse con el Coste de los Servicios Pasados «valorado» con los métodos de financiación utilizados.

Para la determinación más analítica de las ganancias o de las pérdidas actuariales, desglosamos el Coste de los Servicios Pasados «valorado» en el momento t , en los diversos estados en los cuales se encuentran los partícipes durante el período $(t-1, t)$. Utilizamos los siguientes superíndices para indicar los distintos estados: A activo, R retirado por otras causas, M fallecido, J jubilado.

Obviamente, podemos tomar en consideración otras causas de salida como invalidez, o bien el ingreso de nuevos dependientes en el plan de pensiones.

En la evaluación del beneficio o pérdida sobre los activos evaluaremos el Pasivo Actuarial del año en curso t sobre todos los partícipes también para aquellos en los cuales se ha verificado uno de los estados arriba mencionados. Por tanto el Coste de los Servicios Pasados en el momento t estará dividido en diversos estados:

$$CSP_{t-1}(1+i) + CN_{t-1}(1+i) + M - B(1+i) = (CSP)_t^A + (CSP)_t^R + (CSP)_t^M + (CSP)_t^J$$

Consideremos además los nuevos partícipes *NE*, y compararemos el valor estimado del Coste de los Servicios Pasados con el efectivamente realizado:

$$\begin{aligned} &CSP_{t-1}(1+i) + CN_{t-1}(1+i) - [(CSP)_t^A + (CSP)_t^J + (CSP)_t^{NE}] = \\ &= [(CSP)_t^M - M] + (CSP)_t^R + B(1+i) - (CSP)_t^{NE} \end{aligned}$$

Analizando esta ecuación observamos:

a) $CSP_{t-1}(1+i) + CN_{t-1}(1+i)$	representa el Coste de los Servicios Pasados estimado en el momento <i>t</i> .
b) $-[(CSP)_t^A + (CSP)_t^J + (CSP)_t^{NE}]$	representa el Coste de los Servicios Pasados realizado en el momento <i>t</i> según el método de financiación empleado.
c) $[(CSP)_t^M - M]$	representa el beneficio o la pérdida debida a la mortalidad.
d) $(CSP)_t^R + B(1+i) - (CSP)_t^{NE}$	representa el beneficio por el cese de actividad, más los pagos de las prestaciones calculadas a un cierto porcentaje, más los pasivos acumulados debidos a nuevas entradas.

Conociendo el porcentaje de rotación de la población activa, podremos determinar el beneficio o la pérdida debida al retiro como diferencia entre el valor estimado y el cobrado.

$$[(CSP)_t^R - R]$$

donde:

$$R = q_{x-1}^r \cdot CSP$$

siendo q_{x-1}^r el porcentaje de rotación de la población activa.

17. MÉTODOS PRÁCTICOS PARA EL CÁLCULO DEL BENEFICIO O PÉRDIDA ACTUARIAL

El beneficio actuarial se determina comparando el beneficio o la pérdida de los pasivos con los de los activos:

$$[CNA_{t-1} + CN_{t-1}(1+i)^{-1}C] - CNA_t \stackrel{?}{\leq} 0$$

Tendremos una ganancia actuarial si la expresión anterior es mayor que cero, y una pérdida si es menor que cero.

La expresión entre los corchetes presenta el Coste No Amortizado esperado en el momento *t*, mientras *CNA* es el realizado (o cobrado).

Esta expresión representa un método directo para calcular la ganancia (o la pérdida) actuarial, pero ésta se puede determinar con mayor exactitud considerando la diferencia entre la pérdida o ganancia de los activos y pasivos. En la práctica se aconseja desarrollar por separado ambos métodos y confrontarlos.

Para este tipo de análisis se pueden utilizar distintos métodos; el primero determina inmediatamente la ganancia (o la pérdida actuarial), mientras que el segundo lo calcula indirectamente por medio de la confrontación entre la ganancia y la pérdida de los activos con los pasivos.

El primer método será:

1. Coste de los servicios pasados al inicio del período precedente.....	CSP _{t-1}	
2. Fondo al inicio del período.....	A _{t-1}	
3. Coste No Amortizado al inicio del período precedente ..		CNA _{t-1}
4. Coste Normal al inicio del período precedente.....		CN _{t-1}
5. Contribuciones pagadas durante el año.....		C _t
6. Intereses devengados al final del período al tipo de interés «i»:		
a) Coste No Amortizado (3).....	I(CNA _{t-1})	
b) Coste Normal (4).....	I(CN _{t-1})	
c) Contribuciones (5).....	I(C _t)	
d) Saldo de intereses en el año <i>t</i>		I _t
7. Coste No Amortizado estimado en <i>t</i> (3)+(4)-(5)+(6d).....		CNA _t
8. Coste de los Servicios Pasados valorados en <i>t</i>	CSP _t	
9. Valor del fondo en el momento <i>t</i>	A _t	
10. Coste No Amortizado valorado en <i>t</i>		CNA _t
11. Beneficio actuarial (7)-(10).....		B ^o

El segundo método más analítico se caracteriza por dos esquemas: el primero por la determinación del saldo sobre el pasivo y el segundo sobre el saldo del activo:

El primer esquema es:

1. Coste de los Servicios Pasados en t-1	CSP_{t-1}	
2. Coste Normal en t-1	CN_{t-1}	
3. Intereses valorados en t. (1) y (2).....	I_t	
4. Prestaciones estimadas en t.....	$^A B_t$	
5. Coste de los Servicios Pasados estimado en t (1)+(2)+(3)-(4)		$^A CSP_t$
6. Coste de los Servicios Pasados valorado en t.....	CSP_t	
7. Saldo del Pasivo (6)-(5).....		S_{PASS}
8. Jubilados:		
Valor estimado.....	$q^r_{x-1} CSP_t$	
Valor realizado.....	CSP_t^R	
Saldo.....		S_{RIT}
9. Mortalidad:		
Valor estimado.....	M	
Valor realizado.....	CSP_t^M	
Saldo.....		S_{MOR}
10. Saldo del pasivo (8)+(9).....		S_{PASS}

Los valores obtenidos en los apartados 7 y 10 deberían ser iguales o tener una diferencia mínima debida al redondeo.

El segundo esquema es el siguiente:

1. Valor del fondo en t-1.....	A_{t-1}	
2. <u>Contribuciones pagadas durante el año</u>	C_t	
3. Intereses <u>valorados entre (1) y (2)</u>	I_t	
4. Valor fondo esperado en t (1)+(2)+(3)		$^A A_t$
5. Valor del fondo en t.....		A_t
6. Saldo de los activos (6)-(5)		S_{ATT}
7. Prestaciones estimadas en t.....	$^A B_t$	
8. Beneficio o pérdida realizada (6)-(7)		—

Por lo que el beneficio actuarial vendrá dado por:

1. Saldo de los activos (6)	S_{ATT}
2. Saldo de los pasivos (7)	S_{PASS}
3. Prestaciones finales pagadas durante el año y capitalizadas en t	B_t
4. Beneficio o pérdida actuarial	B^o

18. LA DISTRIBUCIÓN DEL BENEFICIO

En caso de que exista Beneficio ($B_t^o > 0$), una parte de éste puede distribuirse entre los partícipes, a través de la conocida cláusula de *participación en beneficios (PB)*.

La *participación en beneficios (PB)* o beneficio a distribuir se fija como una fracción k del beneficio total obtenido, es decir:

$$\text{Si } B_t > 0 \quad _ \quad PB = k B, 0 < k < 1.$$

Un criterio para asignar la parte del beneficio que corresponde a cada partícipe es determinar ésta en proporción a la provisión matemática de cada partícipe, es decir:

$$\frac{a_1}{V_1} = \frac{a_2}{V_2} = \frac{a_3}{V_3} = \dots = \frac{A_N}{V_N} = \frac{\sum_{i=1}^N a_i}{\sum_{i=1}^N V_i} = \frac{k B}{\sum_{i=1}^N V_i}$$

siendo:

V_i = Reserva matemática del i -ésimo partícipe (se suele emplear la reserva matemática a fin del ejercicio, aunque sería más lógico tomar la reserva promedio de la anualidad)

a_i = Beneficio que le corresponde al i -ésimo partícipe,

por lo que, igualando cada fracción con la última, queda:

$$a_1 = \frac{k B}{\sum_{i=1}^N V_i} V_1, \quad a_2 = \frac{k B}{\sum_{i=1}^N V_i} V_2, \dots, \quad a_N = \frac{k B}{\sum_{i=1}^N V_i} V_N$$

La instrumentación de la participación en beneficios en las prestaciones definidas puede realizarse de las siguientes formas:

- 1.º Reducción de la contribución de la anualidad siguiente:

$$C_{t+1} = C_t - P b_t$$

siendo $P b_t$ la parte del beneficio total asignada al partícipe.

- 2.º Aplicación del importe $P b_t$ como contribución (única) que permite aumentar la cuantía de la prestación (ecuación de equivalencia actuarial).
- 3.º Amortizar el Coste Suplementario.
- 4.º Constituir un fondo dotado con las contribuciones por las participaciones en beneficios asignadas.

19. EL EQUILIBRIO FINANCIERO ACTUARIAL DEL PLAN EN UN MOMENTO DADO

La comparación entre el montante de las inversiones y de los compromisos adquiridos por el Plan en un momento dado, permite determinar el equilibrio financiero-actuarial estático y la suficiencia de las inversiones respecto a las obligaciones del Plan.

Inversiones tesorería	Provisiones matemáticas
1. Valor de mercado de los bienes de inversión	1. Valoración actuarial de las obligaciones 1.1. Pensiones en disfrute 1.2. Pensiones futuras (en formación) 1.3. Expectativas de pensiones (viudedad y orfandad)
	2. Valoración actuarial de las <u>contribuciones futuras</u>
Total B.I. = 1=BI	Total P.M. = 1-2=PM

Para obtener el necesario equilibrio es preciso que la rentabilidad neta obtenida de las inversiones sea mayor a al menos igual que la rentabilidad teórica considerada en las hipótesis de valoración (tipo de interés técnico).

$$TIR(BI) \geq i(PM)$$

El equilibrio estático, que debe darse en cualquier momento, viene establecido por:

$$BI(pm) \geq PM(i)$$

Teniendo en cuenta la restricción indicada de la rentabilidad neta.

Si el valor de los bienes invertidos a precios de mercado es superior al monto de las provisiones matemáticas (Valoración actuarial de las prestaciones menos valoración actuarial de las contribuciones futuras), entonces se produce un excedente actuarial, que procede mantener para endurecer las hipótesis de cálculo de las valoraciones.

Si, por el contrario, el valor de los bienes es inferior, entonces procede modificar la política de inversiones y realizar aportaciones adicionales para cubrir el déficit.

$$BI(pm) < PM(i)$$

BIBLIOGRAFÍA

- ANFOSSO BORRELL, Saturnino: *Valoración cuantitativa de los fondos de pensiones en España*, UIMP, 1988.
- BERIN, B.N.: *The Fundamentals of Pension Mathematics*, Ed. William M. Mercer, N. Y., 1978.
- BETZUEN ZALBIDEGOITIA, A.: *Análisis de la sensibilidad de algunos modelos de distribución en Planes de Pensiones. Un ensayo para una población activa del País Vasco*, Bilbao, 1985. Tesis doctoral.
- BETZUEN, Amancio, y BLANCO, Felipe: *Planes y fondos de pensiones. Su cálculo y valoración*, Ediciones Deusto, Bilbao, 1989.

- BLANCO, IBARRA, F.: *Costes y pasivos derivados de los planes de pensiones*, Ed. de la Universidad del País Vasco, 1987.
- BOWERS, GERBER, HICKMAN, JONES y NESBITT: *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, 1986.
- FERNÁNDEZ PEDREIRA, L.; OLEA DíEZ, J., y COLLANTES NÚÑEZ, J.: *Estadística aplicada al trabajo social*, UPCM, Madrid, 1987.
- FERNÁNDEZ RUIZ, Antonio José: *Apuntes de Introducción a la Matemática Actuarial*, Departamento de Economía Financiera y Actuarial, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Complutense de Madrid.
- FERNÁNDEZ RUIZ, Antonio José: *Apuntes de Empresa Financiera y Seguros*, Departamento de Economía Financiera de la Universidad Complutense de Madrid.
- FISCHER, D., y JORDAN, R.: *Security Analysis and Portfolio Management*, 6.ª edición, 1995.
- GERBER, Hans U.: *Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag (1997), Swiss Association of Actuaries.
- GIL FANA: *Matemática de los seguros de vida*, Fundación Mapfre Estudios, (1999).
- GIMÉNEZ ZUERA, F. J.: «Contabilidad de los planes de pensiones. Una visión general», *Cuadernos Aragoneses de Economía*, n.º 11, 1987, pp. 87-101.
- GONZÁLEZ NAVARRO, Elena: *Propuesta de normalización contable de los planes y fondos de pensiones*, Instituto de Contabilidad y Auditoría de Cuentas, Ministerio de Economía y Hacienda.
- GUIJARRO MALAGÓN, Javier: *El aseguramiento de los planes de previsión*.
- IZQUIERDO LLANES, Gregorio, y CUEVAS TELLO, Ana: «La financiación de la prestación social y la competitividad», *Revista del Instituto de Estudios Económicos*, núms. 1 y 2, 1994.
- JURGENS, Ulrich: *The Regulation of European Pension Funds*, Comité Europeo del Assurances Documentation, DC 062 (04.92).
- KAISER, E.: *Equations Fonctionnelles des Mathématiques Sociales*, Asociación Internacional de la Seguridad Social, Madrid, 1962.
- LÓPEZ GARCÍA, M. A.: *La economía del sistema de pensiones de la Seguridad Social*, Ministerio de Trabajo y Seguridad Social. Madrid.1987.
- LECINA GRACIA, Jose María: *Los planes de previsión. Un tratamiento actuarial*, Caja de Cataluña, Barcelona, 1990.
- LEE, M.: *An Introduction to Pension Funds*, Oxford, 1973.
- LEVY, H., y SARNAT, M.: *Portfolio and Investment Selection: Theory and Practice*, Prentice-Hall, 1984.
- LÓPEZ ALDEA, Javier: *Fundamentos básicos de auditoría de cuentas*, Editorial True and Fair, S.A. (1992).
- MAESTRO MUÑOZ, María Luisa: *Estudio económico actuarial de la previsión social complementaria a través de los fondos de pensiones*. Tesis doctoral 103/87, Universidad Complutense de Madrid.
- MANSILLA, F.: *Fondos de pensiones y seguros*, UIMP, 1988.

- McGILL, D.: *Fundamentals of Private Pensions*, Pennsylvania, 1984, Richard D. Irwin, Inc.
- MARTÍNEZ AGUADO, Juliana: *La Seguridad Social: elementos, propiedades y relaciones*. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, 1992.
- MARTÍNEZ LAFUENTE, A., y otros: *Estudios sobre planes y fondos de pensiones*, Ed. Ariel, Barcelona, 1989.
- MORENO ROYES, F., y SANTIDRIÁN ALEGRE, J.: *Los planes y fondos de pensiones en su empresa. La aplicación de la Ley de Regulación de Planes y Fondos de Pensiones*, Ed. Gestión y Planificación Integral, S.A., Barcelona, 1987.
- MORENO ROYES, F., y SANTIDRIÁN ALEGRE, J.: *Los planes y fondos de pensiones (Comentarios al Reglamento)*, Ed. OGS, Madrid, 1988.
- MULLER, N. E.: *Introducción en las matemáticas de pensiones*, Munich, 1973.
- NAVAS OLORIZ, J., y otros: *Los planes y fondos de pensiones*, Economistas Libros, Madrid, 1989, pp. 25-42, 115-132.
- NEILL, Alistair: *Life Contingencies*, Ed. Heinemann, 1989.
- NEWBOLD, P.: *Statistics for Business and Economics*, Ed. Prentice-Hall, New Jersey, 1988.
- OCOPEN. Informe: *Los fondos de pensiones*, Ed. Inversión y Finanzas, Madrid, 1988.
- PEREDA SIGÜENZA, J. M.: *Manual de auditoría y cuentas anuales*, Centro de Estudios Ramón Areces, S.A. (1991).
- PÉREZ TORREGROSA, Ángel: «Auditoría de entidades de seguros», *Previsión y Seguro*, n.º 18, agosto 1992.
- PHILLIPS y DREW: *Pension Fund Indicators*, 1987.
- PICCINI, P.: *Un software per la gestione di un piano pensioni del tipo «Deposit Administration»*. Tesis doctoral, Universidad de Trieste, 1987.
- PRIETO PÉREZ, Eugenio: *La administración de la cartera de valores en un fondo de pensiones*.
- SOLER BORDETAS, F. J.: *Fondos de pensiones*, Ed. Deusto, Bilbao, 1985.
- TORRE AURTENECHEA, J. L.: *Planes y fondos de pensiones privados*, Ed. Caser, Madrid, 1988.
- VEGAS ASENSIO, J.: «Grado de capitalización de los diversos sistemas actuariales aplicados a los regímenes de pensiones», Congreso Internacional de Fondos de Pensiones, 1984.
- VEGAS ASENSIO, Jesús, y NIETO DE ALBA, Ubaldo: *Matemática Actuarial*, Fundación Mapfre.
- WINKLEVOSS, Howard E.: *Pension Mathematics with Numerical Illustrations*, Pension Research Council, Pennsylvania, 1977.