Cuadernos de Estudios Empresariales ISSN: 1131-6985
2000, 10: 83-99

Decisiones Empresariales mediante Programación Estocástica por Metas

ANA GARCÍA AGUADO
Profesora Titular. Escuela Universitaria de Estudios Empresariales
Universidad Complutense de Madrid

RESUMEN

En este artículo se presenta una sencilla generalización de la Programación por Metas determinista, la Programación Estocástica por Metas, como una herramienta útil para resolver problemas de decisión empresariales. La formulación de la Programación Estocástica por Metas se ha obtenido utilizando las reglas típicas del Análisis de Decisión Bayesiano. Está relacionada con técnicas más generales de la Programación Estocástica ya que es un caso particular de la Programación Estocástica con Recursos. Además, es posible aproximar su solución mediante un algoritmo iterativo. Por último, se presenta una aplicación práctica a la planificación de la producción.

ABSTRACT

In this article we present a straightforward generalization of deterministic Goal Programming, the Stochastic Goal Programming, as a useful tool for solve management's decision problems. The Stochastic Goal Programming formulation has been obtained by using stander rules of Bayesian Decision Analysis. It is related with more general Stochastic Programming technique, since it can be also obtained as a particular case of Stochastic Programming with Recourse. Moreover, it is possible to approximate its solutions by means of an iterative algorithm. Finally we present a practical application to planning production.

1. INTRODUCCIÓN

La Programación por Metas es una de las técnicas más importantes para resolver problemas de Programación Multiobjetivo. El propósito de esta técnica es hallar una solución factible tan cercana como sea posible a una meta dada que, habitualmente, es inalcanzable. Si denotamos por $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_p) \in \Re^p$ la meta o nivel de aspiración que deseamos alcanzar, la formulación habitual del problema de Programación por Metas es el programa siguiente:

$$\begin{array}{ll} \underset{\overline{x},\overline{y}^+,\overline{y}^-}{Mín.} & \sum_{i=1}^{p}(w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-) \\ s.a. & f(\overline{x}) + \overline{y}^- - \overline{y}^+ = \overline{m} \\ & \overline{x} \in X \\ & \overline{y}^+ ,\ \overline{y}^- \geq \overline{0} \\ & \overline{w}^+ ,\ \overline{w}^- \geq \overline{0} \end{array} \qquad (1)$$

donde $X \subset \Re^n$ es el conjunto factible y f es la función objetivo,

$$f(\overline{x}) = \left(f_1(\overline{x}), \ldots, f_p(\overline{x})\right)$$

Supongamos que (1) es un programa lineal, es decir, que las funciones objetivo son lineales ($f(\overline{x}) = A\overline{x}$, donde A es una matriz de orden $n \times p$) y el conjunto factible, X, está definido por restricciones lineales.

Otra formulación equivalente puede ser la siguiente:

Para cada $\overline{x} \in X$ definimos

$$Q(\overline{x}) = \underset{\overline{y}^+,\ \overline{y}^-}{Min} \left\{ \sum_{i=1}^{p}\left(w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-\right),\ s.a.\ A\,\overline{x} + \overline{y}^- - \overline{y}^+ = \overline{m}\ ,\ \overline{y}^+,\ \overline{y}^- \geq \overline{0} \right\} \qquad (2)$$

Los valores óptimos de las variables y_i^+, y_i^- verifican que $y_i^+ \cdot y_i^- = 0$ para todo i y representan el exceso y el defecto del i-ésimo objetivo, respectivamente, asociado con la solución factible $\overline{x}$. Los pesos $\overline{w}^+$, $\overline{w}^-$ representan la relación de intercambio (trade-off) entre tal exceso y defecto, respectivamente, que se supone constante.

La solución óptima del problema de Programación por Metas es la solución factible que minimice la desviación global de los p objetivos, es decir, la solución del programa

$$\begin{array}{ll} Mín & Q(\overline{x}) \\ s.a. & \overline{x} \in X \end{array} \qquad (3)$$

Esta no es la formulación usual para la Programación por Metas porque, en lugar del programa lineal (1), se tienen dos programas, el (2) que también es un programa lineal, y el (3) que es un programa convexo. Pero incluimos aquí esta formulación alternativa porque es similar a la solución que propondremos, en el apartado siguiente, para resolver el problema de *Programación Estocástica por Metas* cuando la aleatoriedad está, únicamente, en los niveles de aspiración.

El origen de la metodología de la *Programación por Metas* se debe a Charnes, Cooper y Ferguson (1955). Entre las décadas de los 60 y de los 70 divulgan estas ideas Ijiri (1965), Lee (1972) e Ignizio (1976). A partir de entonces son numerosísimos los trabajos publicados desarrollando aspectos teóricos, aplicaciones prácticas y posibles extensiones de la Programación por Metas.

La formulación de **problemas de decisión** en términos de «niveles de aspiración» es muy frecuente en la práctica. De hecho, el premio Nobel Herbert Simon ha desarrollado la noción de «paradigma satisfaciente», utilizado en muchos problemas de decisión del mundo real en lugar de utilizar el típico «paradigma optimizador» [véase Simon (1957)]. Por ejemplo, como bien se sabe, en las **decisiones empresariales** no se maximiza ningún valor explícito o función de utilidad; en su lugar los empresarios seleccionan ciertas variables que representan el estado de la empresa y definen unos «niveles de aspiración» para dichas variables. Alcanzar estos «niveles de aspiración» será el objetivo de la empresa durante el periodo planificado [ver Cyter y DeGroot (1987)].

La Programación por Metas trata de hallar las soluciones cercanas a los niveles de aspiración. Esta formulación matemática es capaz de representar a un gran número de problemas de decisión. Además, bajo ciertas condiciones, la Programación por Metas es compatible con la Teoría del Valor, por lo tanto parece apropiada para resolver tales problemas de decisión con niveles de aspiración.

Pero frecuentemente los problemas de decisión dependen de parámetros desconocidos, es decir, son de naturaleza estocástica. Por ejemplo, los objetivos en los procesos de planificación de las empresas habitualmente incluyen valores mínimos de variables aleatorias tales como beneficios, ventas, rendimientos de inversiones, etc. La Programación por Metas es una técnica de decisión determinista. ¿Es posible extender esta técnica a un ambiente estocástico? Por otro lado la Teoría de la Utilidad y el Análisis de Decisión Bayesiano constituyen el marco típico para problemas de decisión bajo incertidumbre. ¿Estará la Programación Estocástica por Metas en dicho marco? En la sección siguiente responderemos afirmativamente a estas cuestiones.

2. PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA POR METAS

Supongamos, ahora, que los niveles de aspiración, $\bar{m}$, son aleatorios, es decir, $\bar{m} = \bar{m}\xi$, siendo ξ un vector aleatorio del espacio probabilístico (Ξ, F, P) con $\Xi \subset \Re^p$, del que se conoce la distribución de probabilidad conjunta. (Como la aleatoriedad está únicamente en los niveles de aspiración, utilizamos, para simplificar, la notación $\bar{m} = \xi$ en lugar de $\bar{m} = \bar{m}(\xi)$).

Entonces, el problema planteado es

$$\begin{array}{ll} \underset{\bar{x},\bar{y}^+,\bar{y}^-}{\text{"}Min\text{"}} & \sum_{i=1}^{p}(w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-) \\ s.a. & f(\bar{x}) + \bar{y}^- - \bar{y}^+ = \bar{\xi} \\ & \bar{x} \in X \\ & \bar{y}^+ ,\ \bar{y}^- \geq \bar{0} \\ & \bar{w}^+ ,\ \bar{w}^- \geq \bar{0} \end{array} \tag{4}$$

que, evidentemente, es un problema de programación estocástica.

¿Podremos definir un determinista equivalente del programa estocástico (4)? El Análisis de Decisión Bayesiano nos puede ayudar. Como sabemos, si las preferencias del decisor sobre las posibles consecuencias de sus decisiones son consistentes con ciertos axiomas de racionalidad [ver, por ejemplo del capítulo 7 de DeGroot, M.H. (1970)], entonces, es posible definir una función sobre las consecuencias, denominada utilidad de las consecuencias, tal que una decisión factible será preferida a otra si, y solamente si, la utilidad esperada de las posibles consecuencias es mayor para la primera decisión que para la segunda. En problemas de decisión es frecuente utilizar la denominada función de pérdida (la función de utilidad cambiada de signo), en lugar de la función de utilidad. En este caso el decisor elegirá como óptima la decisión que minimice la pérdida esperada de sus consecuencias.

Concretamente el decisor procede del siguiente modo: en primer lugar define una consecuencia para cada decisión factible $\bar{x}$ y para cada posible realización del parámetro aleatorio ξ; a continuación especifica una pérdida numérica asociada con cada consecuencia; por último calcula la pérdida esperada de cada decisión factible y elige la decisión con mínima pérdida esperada.

Apliquemos este marco general a nuestro problema concreto: ¿Cuál será la consecuencia asociada a una decisión factible $\bar{x} \in X$ y a una realización del vector aleatorio $\xi \in \Xi$ en un problema del tipo (4)? Teniendo en cuenta que la *Programación Estocástica por Metas* es una generalización de la *Programación Determinista por Metas*, para un valor de ξ dado la consecuencia asociada con la elección de cualquier solución factible $\bar{x}$ coincidirá con la solución del *Programa Determinista por Metas* (2), y por lo tanto la consecuencia asociada con cualquier $\bar{x} \in X$ y $\xi \in \Xi$ vendrá dada por la solución del siguiente programa lineal

$$Q\left(\bar{x},\bar{\xi}\right) = \min_{\bar{y}^+,\ \bar{y}^-} \left\{ \sum_{i=1}^{p} \left(w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^- \right),\ s.a. f(\bar{x}) + \bar{y}^- - \bar{y}^+ = \bar{\xi}\ ,\ \bar{y}^+,\ \bar{y}^- \geq \bar{0} \right\} \tag{5}$$

La interpretación de este programa es la misma que la del programa (2), esto es, $Q(\bar{x}, \xi)$ mide la desviación global entre $f(\bar{x})$ y ξ. Si las ponderaciones $\bar{w}^+, \bar{w}^-$ se identifican con los costes monetarios del exceso y el defecto del cumplimiento de las metas, la solución del problema (5) mide el coste global de todas las desviaciones en unidades monetarias. Además, si el rango de variación de tales costes no es demasiado grande, o si se debe tomar un número grande de decisiones similares a lo largo del tiempo, entonces se puede suponer indiferencia al riesgo y, por lo tanto, una función de pérdida lineal.

Luego, bajo tales condiciones, la solución (bayesiana) de nuestro problema de *Programación Estocástica por Metas*, será la solución óptima del programa

$$\begin{array}{ll} Min. & E_{\bar{\xi}}\left[Q\left(\bar{x},\bar{\xi}\right)\right] \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array} \tag{6}$$

El programa (6) es una formulación determinista para problemas de Programación por Metas con niveles de aspiración aleatorios. Los programas (5) y (6) son una clara generalización de la formulación en dos pasos de la Programación por Metas Determinista en los programas (2) y (3).

Por otro lado, teniendo en cuenta cómo hemos llegado al problema (6), es evidente que dicho problema es compatible, bajo ciertas condiciones, con el enfoque Bayesiano de la Teoría de la Decisión. Luego se puede formular mediante la representación habitual de dichos problemas del siguiente modo:

$$\begin{array}{c|c}
 & \cdots\ \ \cdots\ \ \zeta\cdots\ \ \ \cdots \\
X \diagdown \Xi & \cdots\ \ \cdots\ \ \bar{\xi}\ \ \ \cdots\ \ \cdots \\
\hline
\vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots \\
\bar{x} & \cdots\ \ \cdots Q(\bar{x},\bar{\xi})\cdots\ \ \cdots \\
\vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

A cada fila o decisión $\bar{x}$ se le asocian los correspondientes costes esperados $E_{\xi}\left[Q(x,\xi)\right]$ y la decisión óptima o de Bayes es aquella decisión que minimice estos valores esperados, es decir, aquella decisión que verifique que

$$E_{\bar{\xi}}\left[Q\left(\bar{x}_0,\bar{\xi}\right)\right]=\min_{\bar{x}} E_{\bar{\xi}}\left[Q\left(\bar{x},\bar{\xi}\right)\right]$$

Por lo tanto, se pueden aplicar a los problemas de *Programación Estocástica por Metas* cuando la aleatoriedad está únicamente en los niveles de aspiración, y se resuelven mediante el modelo (6), conceptos bayesianos relacionados con el valor de la información acerca de ξ, tales como *Valor Esperado de la Información Perfecta*, *Valor Esperado de la Información Muestral,* etc.

3. LA PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA POR METAS COMO UN CASO PARTICULAR DE LA PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA LINEAL CON RECURSOS

Es evidente que los problemas de Programación Estocástica por Metas se puede considerar como programas lineales con coeficientes estocásticos y, por lo tanto, se pueden resolver aplicando algunas de las técnicas de Programación Estocástica [ver, por ejemplo, Kall (1976), Kall y Wallace (1994), Sengupta (1972), Vajda (1972)]. En concreto se puede ver fácilmente que los programas (5) y (6) se pueden obtener también aplicando una de dichas técnicas, la denominada Programación Lineal Estocástica con Recursos.

Por un Programa Lineal Estocástico habitualmente se entiende un programa lineal con coeficientes aleatorios, es decir, un programa de la forma

$$\begin{array}{ll} \text{"}Mín\text{"} & \bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x} \\ s.a. & A(\bar{\xi})\bar{x} = \bar{b}(\bar{\xi}) \\ & \bar{x} \in X \end{array} \tag{7}$$

donde $A(\xi)$ es una matriz aleatoria y $c(\xi)$ y $b(\xi)$ son vectores aleatorios. En Programación Estocástica hay varios significados de la «minimización» de tales programas. En este contexto es claro que buscamos óptimos «aquí y ahora» («here and now») ya que tenemos que tomar la decisión, $\bar{x}$, antes de conocer el valor del parámetro ξ. Una de las técnicas para resolver tales problemas es la conocida como Programación Lineal Estocástica con Recursos.

En la programación Estocástica Lineal con Recursos se supone que, dada una decisión factible $\bar{x} \in X$, la realización de $\bar{\xi}$ puede, posiblemente, implicar una violación de las restricciones del programa (7), cuyo resultado es una función de penalización tal como:

$$Q(\bar{x},\bar{\xi}) = \min_{\bar{y}} \left\{ \bar{w}\,\bar{y} \,/\, W(\bar{\xi})\bar{y} = \bar{b}(\bar{\xi}) - A(\bar{\xi})\bar{x} \,,\, \bar{y} \geq \bar{0} \right\} \tag{8}$$

La solución óptima será la solución factible que minimice el total del coste esperado, es decir, la solución del programa:

$$\begin{array}{ll} Mín & E_{\bar{\xi}}\left[\bar{c}'(\bar{\xi})\bar{x} + Q\left(\bar{x},\bar{\xi}\right)\right] \\ s.a. & \bar{x} \in X \end{array} \tag{9}$$

Nuestra formulación de la Programación Estocástica por Metas es un caso particular de la Programación Estocástica Lineal con Recursos. En efecto, si en los programas (8) y (9) hacemos $\bar{y} = (\bar{y}^-,\bar{y}^+)$, $W(\xi) = (I,-I)$, $\forall\xi$, donde I es la matriz identidad (situación conocida como Programación Estocástica con Recursos Simples), y $\bar{c}(\xi) = \bar{0}$, $\forall\xi$, entonces obtenemos los programas (5) y (6). Por lo tanto las propiedades del modelo de Programación Estocástica con Recursos se pueden deducir de las propiedades de los Programas Estocásticos con Recursos Simples. Por ejemplo, si la distribución de probabilidad ξ de es discreta, entonces el programa (9) es un programa lineal [véase, por ejemplo, Vajda (1972)].

En el caso general de distribuciones continuas o mixtas, si es ξ integrable, se puede demostrar que la función objetivo del programa (9) es una función convexa y separable [ver Kall (1976)]. Por lo tanto el problema (6) también se podrá resolver como un programa convexo separable. Pero los algoritmos propios de la resolución de dichos problemas presentan notables dificultades de cálculo por lo que, en la práctica, es habitual obtener únicamente soluciones aproximadas.

En la sección siguiente vamos a discutir un tipo de solución alternativo para la Programación Estocástica por metas, la solución del tipo «espera y ve» («wait and see»).

4. SOLUCIÓN DEL TIPO «ESPERA Y VE»

En este tipo de solución se trata de lo siguiente, para todo posible valor del parámetro $\bar{\xi}$ se calcula la solución óptima $\bar{x}(\bar{\xi})$ y, posteriormente, el criterio de solución se basa en algún estadístico (el valor medio, la varianza, la moda,...) asociado a la variable aleatoria $\bar{x}(\bar{\xi})$.

En el contexto que nos ocupa, y suponiendo el caso discreto, podría parecer razonable plantear el programa

$$\begin{array}{ll} Máx. & P\left\{\bar{x}=\bar{\xi}\right\} \\ s.a. & \bar{x}\in X \end{array} \qquad (10)$$

Consideremos como ejemplo concreto un problema de estimación donde tenemos que estimar el valor de una cierta variable aleatoria $\bar{\xi}$, cuyos posibles valores son

$$\bar{\xi}=\xi_1=0,\ \bar{\xi}=\xi_2=2\ y\ \bar{\xi}=\xi_3=4$$

con probabilidades

$$p_1=\frac{3}{5}, p_2=\frac{1}{5}\ y\ p_3=\frac{1}{5}$$

Entonces, tendríamos que: si se realiza $\xi_1 = 0$, elijo $x_1 = 0$, si se realiza ξ_2, elijo $x_2 = 2$, elijo y si se realiza $\xi_3 = 4$, elijo $x_3 = 4$.

En consecuencia, la solución óptima a priori es $x_1 = 0$ ya que es la más probable, pues

$$P\left\{\overline{\xi} = \xi_1\right\} = p_1 = \frac{3}{5} \text{ y } P\left\{\overline{\xi} = \xi_2\right\} = P\left\{\overline{\xi} = \xi_3\right\} = \frac{1}{5}$$

Esta aproximación es compatible, también, con la teoría de la Utilidad Bayesiana, ya que para obtener la tabla de consecuencias asociadas con las posibles decisiones, bastaría con asociar a las decisiones más probables los menores costes.

En nuestro ejemplo se podría asociar a la decisión más probable, $x_1 = 0$, los costes (0,0,0), y a las otras dos decisiones, $x_2 = 2$ y $x_3 = 4$, los costes (1,1,1), obteniéndose la siguiente tabla de consecuencias:

	$p_1 = 3/5$	$p_2 = 1/5$	$p_3 = 1/5$
	$\xi_1 = 0$	$\xi_2 = 2$	$\xi_3 = 4$
$x_1 = 0$	0	0	0
$x_2 = 2$	1	1	1
$x_3 = 4$	1	1	1

Sin embargo, este método de solución adolece de graves defectos:

- Desprecia información, ya que al construir la tabla de consecuencias, no se tiene en cuenta los costes asociados a cada decisión x_i y a cada realización ξ_i, $Q(x_i,\xi_i), i = 1,2,3$.
- El criterio de decisión utilizado en la aproximación

$$\underset{\overline{x}}{Máx.} \qquad P\left\{\overline{x} = \overline{\xi}\right\}$$

no decide si todas las alternativas son equiprobables, y podría darse el caso de que fuesen equiprobables y, por lo tanto, indiferentes, siendo, a la vez, alguna de ellas mucho más costosa que el resto.

- La alternativa más probable podría ser la más arriesgada. Veámoslo con un ejemplo. Consideremos un problema de estimación en el que deseamos estimar el valor de una cierta variable aleatoria ξ, cuyos posibles valores son:

$$\xi_1 = 0,\ \xi_2 = \frac{\varepsilon}{n},\ \xi_3 = \frac{2\,\varepsilon}{n},\dots,\xi_{n-1} = \frac{(n-2)\,\varepsilon}{n},\ \xi_n = \frac{(n-2)\,\varepsilon}{n} + n$$

con probabilidades, $p_1 = p_2 = \cdots = p_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n-1},\ p_n = \frac{1}{n} + \varepsilon$ siendo ε un valor muy pequeño de forma que los valores ξ_1, ..., ξ_{n-1} están muy cerca unos de otros.

La solución óptima es la decisión $x_n = \frac{(n-2)\,\varepsilon}{n} + n$ ya que es la alternativa más probable.

La tabla de los costes asociados a las decisiones sería, aproximadamente (despreciando ε por ser un infinitésimo):

	$\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n-1}$	$\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n-1}$	...	$\frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n-1}$	$\frac{1}{n} + \varepsilon$
	$\xi_1 = 0$	$\xi_2 = \frac{\varepsilon}{n}$	...	$\xi_{n-1} = \frac{(n-2)\,\varepsilon}{n}$	$\xi_n = \frac{(n-2)\,\varepsilon}{n} + n$
$x_1 = 0$	0	0	...	0	n
$x_2 = \frac{\varepsilon}{n}$	0	0	...	0	n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$x_{n-1} = \frac{(n-2)\,\varepsilon}{n}$	0	0	...	0	n
$x_n = \frac{(n-2)\,\varepsilon}{n} + n$	n	n	...	n	0

Luego el coste esperado asociado con cada decisión es

- para $x_1 = 0, E_{\bar{\xi}}\left[Q\left(x_1, \bar{\xi}\right)\right] = n\left(\frac{1}{n} + \varepsilon\right) = 1 + \varepsilon n \approx 1$
- para $x_2 = \frac{\varepsilon}{n}, E_{\bar{\xi}}\left[Q\left(x_2, \bar{\xi}\right)\right] = n\left(\frac{1}{n} + \varepsilon\right) = 1 + \varepsilon n \approx 1$
- ...
- para $x_{n-1} = \frac{(n-2)\,\varepsilon}{n}, E_{\bar{\xi}}\left[Q\left(x_{n-1}, \bar{\xi}\right)\right] = n\left(\frac{1}{n} + \varepsilon\right) = 1 + \varepsilon n \approx 1$
- para $x_n = \frac{(n-2)\,\varepsilon}{n} + n, E_{\bar{\xi}}\left[Q\left(x_n, \bar{\xi}\right)\right] = (n-1)\left(1 - \frac{n}{n-1}\varepsilon\right) \approx (n-1)$

Con lo que, en la medida en que n aumenta, el coste esperado asociado con la decisión $x_n = \frac{(n-2)\,\varepsilon}{n} + n$, que sería la solución óptima según el método que discutimos, es mucho mayor que el coste asociado con cualquiera de las otras decisiones, siendo muchísimo mayor cuando n tiende a ∞.

Por tanto, podemos concluir que para resolver el problema de Programación Estocástica por Metas planteado en (4) es más adecuada la solución del tipo «aquí y ahora» que la solución del tipo «espera y ve».

5. ALGORITMO DE SOLUCIÓN

Hemos dicho anteriormente que a la hora de resolver problemas del tipo planteado en el programa (6), debido a las dificultades de cálculo, en la práctica, frecuentemente se obtienen, únicamente, soluciones aproximadas. En el capítulo 3 de Kall y Wallace (1994) se encuentra un eficiente algoritmo que aproxima la solución óptima de cualquier Programa Estocástico con Recursos. Este algoritmo se simplifica notablemente al aplicarlo a nuestro problema de Programación por Metas. Es inmediato demostrar que aplicado a nuestro problema (6) dicho algoritmo consta de los siguientes pasos:

1. Se minimiza el llamado límite inferior de Jensen, $\underset{\bar{x}}{Min} \quad Q\left(\bar{x}, E\left[\bar{\xi}\right]\right)$.

   Sea $\bar{x}^*$ la solución óptima de este programa de Programación por Metas determinista.

2. Se calcula $Q\left(\bar{x}^*\right)=E_{\bar{\xi}}\left[Q\left(\bar{x}^*,\bar{\xi}\right)\right]$.

   Si definimos, para $i=1,\cdots,p,\ Q_i\left(\bar{x}^*\right)=E_{\xi_i}\left[Q\left(A_i\bar{x}^*,\xi_i\right)\right]$ donde, como es habitual

$$Q\left(A_i\bar{x}^*,\xi_i\right)=\min_{y_i^+,\ y_i^-}\left\{w_i^+y_i^+ + w_i^-y_i^-\ ,\ s.a.\, A_i\bar{x}^* + y_i^- - y_i^+ = \xi_i\ ,\ y_i^+, y_i^- \geq 0\right\}$$

   Siendo A_i la *i-ésima* fila de la matriz A, entonces se puede demostrar que $Q\left(\bar{x}^*\right)=\sum_{i=1}^{p}Q_i\left(\bar{x}^*\right)$

   Por otro lado, si $[\alpha_i,\beta_i]$ es el rango de definición de la variable aleatoria ξ_i, en Kall y Wallace (1994) se demuestra que, si $A_i\bar{x}^* < \alpha_i$ ó $A_i\bar{x}^* > \beta_i$, entonces $Q_i(\bar{x}^*) = Q_i[A_i\bar{x}^*, E(\xi_i)]$; y si $\alpha_i < A_i\bar{x}^* < \beta_i$, entonces

$$Q_i\left(\bar{x}^*\right)=p_i^1Q\left(A_i\bar{x}^*,E_1\left(\xi_i\right)\right)+p_i^2Q\left(A_i\bar{x}^*,E_2\left(\xi_i\right)\right)$$

   donde,

$$p_i^1=P\left[\xi_i\in\left[\alpha_i,A_i\bar{x}^*\right]\right],\ p_i^2=P\left[\xi_i\in\left(A_i\bar{x}^*,\beta_i\right]\right]$$

$$E_1\left[\xi_i\right]=E\left[\xi_i/\xi_i\in\left[\alpha_i,A_i\bar{x}^*\right]\right],\ E_2\left[\xi_i\right]=E\left[\xi_i/\xi_i\in\left(A_i\bar{x}^*,\beta_i\right]\right].$$

3. Por la desigualdad de Jensen, la solución óptima, $\bar{x}^{**}$, del programa (6) debe verificar que

$$E\left[Q\left(\bar{x}^{**},\bar{\xi}\right)\right]\leq E\left[Q\left(\bar{x}^*,\bar{\xi}\right)\right]\leq E\left[Q\left(\bar{x}^{**},\bar{\xi}\right)\right]\leq E\left[Q\left(\bar{x}^*,\bar{\xi}\right)\right]$$

   Por lo tanto, si se acepta como solución del problema $\bar{x}^*$ en lugar de $\bar{x}^{**}$, la diferencia $E[Q(\bar{x}^*,\xi)] - E[Q(\bar{x}^{**},\xi)]$ será un límite superior del error cometido al aceptar $\bar{x}^*$ como solución.

4. Si el error es muy grande, se dividen los intervalos $I_i = [\alpha_i,\beta_i]$ en particiones I_{ij}, $j = 1,\ldots,N_i$ y se resuelve el programa

$$\begin{aligned} &Min \quad \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{N_i}p_{ij}\,Q_i\left(A_i\bar{x},\,E_j\left[\xi_i\right]\right) \\ &s.a. \quad \bar{x}\in X \end{aligned} \qquad (11)$$

con $p_{ij} = P\{\xi_i \in I_{ij}\}$ y $E_j[\xi_i] = E[\xi_i / \xi_i \in I_{ij}]$, y se reinicia el proceso desde el paso 2. El algoritmo se repite hasta obtener un límite de error superior aceptable.

Como se puede ver este algoritmo es un buen instrumento para resolver problemas de Programación Estocástica por Metas puesto que en cada paso se resuelve únicamente un programa lineal.

6. APLICACIÓN A LA PLANIFICACIÓN DE LA PRODUCCIÓN

Consideremos una empresa que produce p bienes a partir de n factores.

Supongamos que los objetivos de la empresa son satisfacer la demanda y no sobrepasar unos determinados costes. Bajo estas circunstancias, el centro decisor de la empresa tratará de encontrar un vector de factores («inputs»), $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$, que sea solución del programa:

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}) &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = m_1 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ f_p(\bar{x}) &= a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n = m_p \\ f_{p+1}(\bar{x}) &= c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \leq C \\ x_1, \cdots, x_n &\geq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

donde, como siempre, $f(\bar{x}) = \bar{m}$ (siendo $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}),..., f_p(\bar{x}))$ y $\bar{m} = (m_1,...,m_p)$) es el objetivo o la meta consistente en satisfacer las demandas.

Esto es, $\bar{m}$ es el vector de los niveles de aspiración que, en este caso, son las demandas y a_{ij} son las unidades del bien i producidas por unidad del factor j. (Suponemos rendimientos constantes a escala).

Y $f_{p+1}(\bar{x}) \leq C$ es el objetivo consistente en no sobrepasar unos determinados costes. Luego, c_i es el coste unitario del factor i y C es el coste máximo admisible.

Planteado así el problema, es mucho más realista suponer que el vector de demandas, $\bar{m}$, es aleatorio, ya que, de hecho, nadie conoce de antemano con certidumbre la demanda de un determinado bien. Si representamos estas demandas aleatorias mediante el vector $\xi = (\xi_1,...,\xi_p)$, la empresa tratará de encontrar un vector de factores, $\bar{x} = (x_1,...,x_n)$, que sea solución del problema:

$$
\begin{aligned}
f_1(\bar{x}) &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = \xi_1 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
f_p(\bar{x}) &= a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n = \xi_p \\
f_{p+1}(\bar{x}) &= c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \le C \\
x_1, \cdots, x_n &\ge 0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

que, claramente, es un problema de *Programación Estocástica por Metas*, en el que la aleatoriedad está únicamente en los niveles de aspiración y el conjunto factible, *X*, es

$$X = \left\{ \bar{x} = \left(x_1, \cdots, x_n\right) / \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le C, x_1, \cdots, x_n \ge 0 \right\}$$

Por lo tanto, se puede resolver mediante el Programa Lineal Estocástico (4):

$$
\begin{aligned}
&\underset{x, y^+, y^-}{\text{"}Mín\text{"}} && \sum_{i=1}^{p} (w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-) \\
&s.a. && f(x) + y^- - y^+ = \xi \\
& && x \in X \\
& && y^+, \; y^- \ge 0 \\
& && w^+, \; w^- \ge 0
\end{aligned}
\tag{14}
$$

siendo $w_i^+ \ge 0$ el coste del exceso de producción del *i*-ésimo bien (fundamentalmente un coste de inventario) y $w_i^- \ge 0$ el coste de no satisfacción de la *i*-ésima demanda (un coste de oportunidad).

Problema que se puede resolver mediante el programa:

$$
\begin{aligned}
&Min && E_{\bar{\xi}}\left[Q\left(\bar{x}, \bar{\xi}\right)\right] \\
&s.a. && \bar{x} \in X
\end{aligned}
$$

donde $Q\left(x, \xi\right) = \min_{y^+, \, y^-} \left\{ \sum_{i=1}^{p} \left(w_i^+ y_i^+ + w_i^- y_i^-\right), \; s.a. \; f(x) + y^- - y^+ = \xi, y^+, \, y^- \ge 0 \right\}$

Vamos a resolver el problema (14) poniendo un ejemplo numérico muy sencillo, con el fin de simplificar los cálculos. Supongamos que la empresa dispone de dos factores de producción, x_1,x_2, produce dos bienes, es decir $p = 2$, los valores a_{ij} de las unidades del bien i producidas por unidad del factor j son $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 1$, por lo tanto las metas correspondientes a la satisfacción de la demanda de los dos bienes son $f_1(\bar{x}) = x_1 - y_1^+ + y_1^- = \xi_1$ y $f_2(\bar{x}) = x_2 - y_2^+ + y_2^- = \xi_2$.

Si los costes unitarios del factor j son $c_1 = c_2 = 1$ y el coste máximo admisible es $C = 2$, la restricción de no sobrepasar los costes es $x_1 + x_2 \leq 2$.

Supongamos que las distribuciones de probabilidad de las demandas aleatorias son Uniformes en los intervalos ξ_l : $U[0,1]$ y ξ_2 : $U[0,2]$ y que satisfacer las demandas de ambos productos es igualmente importante para la empresa, y, a la vez, el coste de una producción insuficiente es igual al coste de la sobreproducción de cualquiera de los dos productos. Por la tanto, $w_i^+ = w_i^- = 1\,,\ i = 1, 2$.

En estas circunstancias, el problema (14), en nuestro ejemplo es:

$$\begin{aligned}
Min \quad & y_1^+ + y_2^+ + y_1^- + y_2^- \\
s.a. \quad & x_1 - y_1^+ + y_1^- = \xi_1 \\
& x_2 - y_2^+ + y_2^- = \xi_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_i \geq 0\,,\ i = 1, 2 \\
& y_i^+\,,\ y_i^- \geq 0\,,\ i = 1, 2
\end{aligned} \tag{15}$$

La solución óptima es $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $y_1^+ = y_1^- = y_2^+ = y_1^- = 0$

El valor de $E\left[Q\left(\bar{x}^*, \bar{\xi}\right)\right]$ es =0.75 y el valor $E\left[Q\left(\bar{x}^{**}, \bar{\xi}\right)\right]$ es $E\left[Q\left(\bar{x}^{**}, \bar{\xi}\right)\right] = 0$

por lo tanto el límite de error asociado con la solución $\bar{x}^* = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ es 0.75.

Si el decisor desea reducir el error puede, por ejemplo, hacer una partición en el rango de definición de las variables ξ_l y ξ_2 en los puntos 1/2 y 1, respectivamente, (naturalmente, el decisor podría elegir otros puntos) y el nuevo programa lineal a resolver es:

$$
\begin{aligned}
Mín.\quad & \frac{1}{2}\left(y_{11}^{+}+y_{11}^{-}+y_{12}^{+}+y_{12}^{-}+y_{21}^{+}+y_{21}^{-}+y_{22}^{+}+y_{22}^{-}\right)\\
s.a.\quad & x_1+y_{11}^{-}-y_{11}^{+}=\frac{1}{4}\\
& x_1+y_{12}^{-}-y_{12}^{+}=\frac{3}{4}\\
& x_2+y_{21}^{-}-y_{21}^{+}=\frac{1}{2}\\
& x_2+y_{22}^{-}-y_{22}^{+}=\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

cuya solución óptima es:

$$x^*=\left(x_1^*,x_2^*\right)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\ y_{11}^{+}=y_{11}^{-}=y_{12}^{+}=y_{21}^{+}=y_{21}^{-}=y_{22}^{+}=0,\ y_{12}^{-}=\frac{1}{2},\ y_{22}^{-}=1$$

En este caso el límite superior del error es

$$E\left[Q\left(\bar{x}^*,\bar{\xi}\right)\right]-E\left[Q\left(\bar{x}^{**},\bar{\xi}\right)\right]=\frac{9}{8}-\frac{3}{4}=\frac{3}{8}=0.375$$

que es notablemente menor que el previamente obtenido.

Si fuese necesario el decisor continua este proceso hasta obtener un límite del error aceptable.

7. CONCLUSIONES

En las páginas anteriores hemos demostrado la importancia de la generalización de la técnica de Programación por Metas a un ambiente estocástico, como un medio adecuado para la **toma de decisiones empresariales**.

La generalización de la Programación por Metas determinista que presentamos se ha obtenido bajo las hipótesis de la Teoría de la decisión Bayesiana. Esta compatibilidad implica que las preferencias del decisor están de acuerdo con la racionalidad de la Teoría de la Utilidad.

Además, nuestra formulación de la Programación Estocástica por Metas está relacionada con técnicas más generales de la Programación Estocástica, en concreto se puede obtener como un caso particular de la Programación Estocástica con Recursos.

Se presenta un modelo de solución alternativo, pero dicho modelo presenta notables fallos.

Se muestra cómo un buen algoritmo de solución para la aproximación iterativa de las soluciones óptimas de Programación Estocástica con recursos queda notablemente simplificado en este caso particular ya que sólo se necesita resolver un programa lineal en cada paso del algoritmo.

Finalmente se presenta una aplicación a la planificación de la producción y se resuelve un ejemplo numérico.

BIBLIOGRAFÍA

CHARNES, A.; COOPER, W.W. y FERGUSON, R.O. (1955). *«Optimal Estimation of executive compensation by Linear Programming». Management Science*, vol. 1, n.º 2, pp. 138-151.

CYERT, R.M. y DE GROOT, M. H. (1987). *«Bayesian Analysis and Uncertainty in Economic Theory»*, New Jersey, Rowman & Littlefield.

DE GROOT, M.H. (1970). *«Optimal Statistical Decisions»*, New York, McGraw-Hill.

FRENCH, S. (1993). *«Decision Theory: an Introduction to the Mathematics of Rationality»*, New York, Ellis Horwood Limited.

HERAS MARTÍNEZ, A. y GARCÍA AGUADO, A. (1998). *«Stochastic Goal Programming with recourse». Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, vol. 92, n.º 4, pp. 409-4014.

HERAS MARTÍNEZ, A. y GARCÍA AGUADO, A. (1999). *«Stochastic Goal Programming». Central European Journal of Operational Research*, vol. 7, n.º 3, pp.139-158.

IGNIZIO, J.P. (1976). *«Goal Programming and extensions»*, Massachusetts, Lexington Books.

IJIRI, Y. (1965). *«Management Goals an Accounting for Control»*, Amsterdam, North-Holland.

KALL, P. (1976). *«Stochastic Linear Programming»*, New York, Springer-Verlag.

KALL, P. y WALLACE, S.W. (1995). *«Stochastic Programming»*, New York, John Wiley & Sons LTD.

LEE, S.M. (1972). *«Decision Analysis»*, Finland, Auerbach Publishers.

SENGUPTA, J. K. (1982). *«Decision Models in Stochastic Programming. Operational Methods of Decision Making under Uncertainty»*, New York, Elsevier Science Publishing Co. Inc.

SIMON, H.A. (1957). *«Models of Man, Part IV: Rationality and Administrative Decision Making»*, New York, Weley.

STANCU-MINASIAN, I. M. (1984). *«Stochastic Programming with Multiple Objective Functions»*, Bucarest, D. Reidel Publishing Company.

VAJDA, S. (1972). *«Probabilistic Programming»*, New York, Academic. Press.