INFORME PRESENTADO POR EL EQUIPO: F. CANO SEVILLA, R. INFANTE MACIAS, M. MARTIN DIAZ, R. MELENDRERAS GIMENO, BAJO LA DIRECCION DE I. YAÑEZ DE DIEGO

Estudio de un Algoritmo para la obtención de la clausura máxima de un Grafo

Es nuestro anteproyecto del "estudio de un algoritmo para la obtención de la clausura máxima de un grafo", el problema a estudiar era:

Se tiene un grafo (X,A) que carece de circuitos, se define por conjunto cerrado o clausura a todo conjunto de vértices tal que si un vértice pertenece al conjunto, también pertenecen todos los vértices posteriores. A cada vértice se le asocia un número y se desea obtener el conjunto cerrado C tal que la suma S C C) de los valores asociados a los vértices que pertenecen a él sea máxima.

Para ello haremos las siguientes puntualizaciones:

a) Al grafo de partida se le asocia un árbol con raiz (vértice distinguido) X_o quedando éste perfectamente determinado por un conjunto de vértices y un conjunto de arcos.

b) Si se suprime un arco del árbol, éste queda dividido en dos ramas, una que contiene a la raiz y otra no. En adelante cuando nos refiramos a rama entenderemos aquella que no contiene la raiz.

c) La suma de las masas asociadas a cada vértice de una rama es la masa que soporta la rama. Esta masa puede ser positiva ó no positiva y junto con la orientación del arco suprimido nos permite hacer una clasificación de la rama. Así si el vértice terminal del arco suprimido pertenece a la rama diremos p-rama y si la masa es estrictamente positiva diremos que la p-rama es fuerte. Si el vértice termina no pertenece a la rama diremos m-rama y si la masa es nula o negativa diremos que la m-rama es fuerte. Serán débiles en caso contrario.

d) Al igual que las ramas ~~las~~ aristas se dividen en fuertes y débiles.

e) Si todas las aristas fuertes de un árbol tienen un vértice común (la raíz) diremos que el árbol está normalizado.

f) Un vértice se dice fuerte si existe al menos una arista fuerte en la cadena que une la raiz con el vértice dado.

g) El conjunto de los vértices fuertes de un árbol es el conjunto cerrado de suma máxima.

ALGORITMO.

Sea $G = (X,A)$ el grafo dado. Puede representarse en el calculador mediante la matriz booleana asociada tal que $b_{ij} = 1$ si y solo si el arco (X_i, X_j) existe y o en caso contario. Aunque esto es fácil de poner en ordenador tiene el incoveniente de que ocupa bastante en la memoria.Por ello se usan dos tablas de las que una dará para cada vértice del grafo el número de arcos vistos desde este vértice y otra que da para cada arco su extremo terminal.

1º) Al grafo $G (X,A)$, se le envía un árbol de la forma: $(X'; A_o)$ donde X' es el conjunto de vértices del grafo y A_o es el conjunto de arcos $(x_o, x_i)\ \forall x_i \in X$.

A los vértices $x_i \in X$ le asociamos una masa $d_i \gtrless 0$ y al vértice X_o una masa negativa. Es obvio que x_o no pertenece al conjunto cerrado C por condiciones de construcción.

Por ser los arcos $\{x_o , x_i\}$ para todo $x_i \in X$ p-aristas, determinemos los vértices x_i de masa positiva. Sea C_o el conjunto de estos vértices.

Luego el árbol queda determinado por (X, A_o, C_o) y es desde luego normalizado pues todas las aristas fuertes tienen X_o común y lo designaremos por T_o.

2º) Sea $C_o = \{X_{o1}, X_{o2}, \ldots, X_{oi}\}$ de masa $S(C_o)$. Si existe un arco (X_{oh}, X_l) en G tal que $X_{oh} \in C_o$ y $X_l \in X - C_o$ no es el conjunto cerrado de masa máxima. En otro caso si $\forall X_{oh}$ resulta que su sucesor es de C_o. Entonces C_o es la máxima clausura.

Determinar en la segunda tabla:

CONTINUE

IMAGE $(X_{o1}) = X_{o1}1$ ¿$\in C_o$? Si / no Ir etapa 3

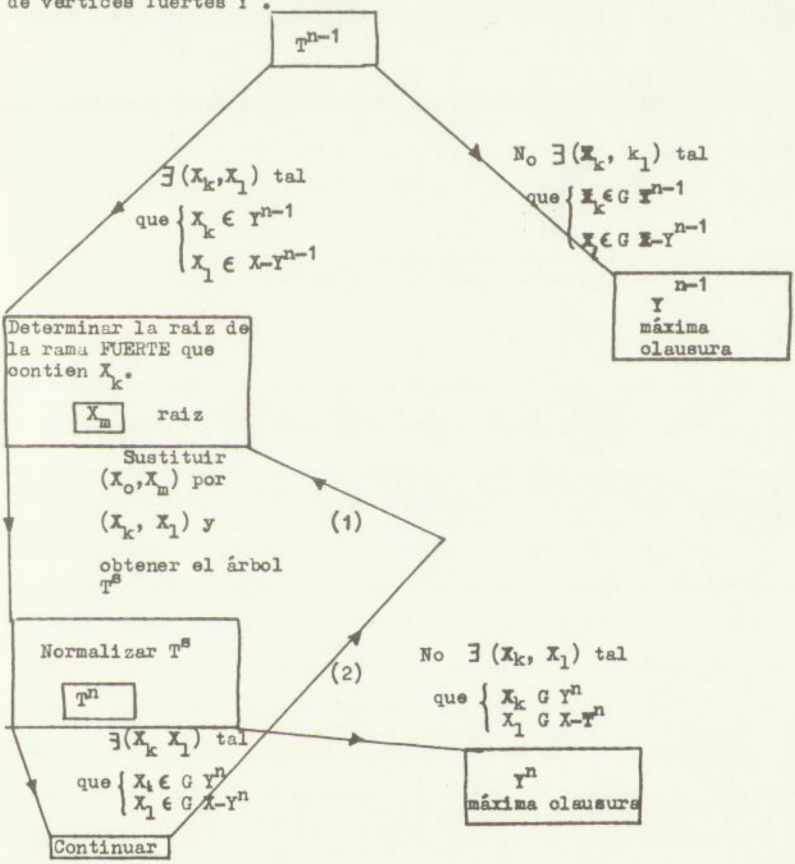
IMAGE $(X_{o1}) = X_{o1}2$ ¿$\in C_o$? si / no

IMAGE $(X_{o1}) = X_{o1}m$ ¿$\in C_o$? si / no

IMAGE $(X_{o2}) = X_{o2}1$

IMAGE $(X_{o2}) = X_{o2}$

3º) Se entra en el proceso iterativo. La iteración n transforma el árbol normalizado T^{n-1} en un árbol normalizado T^n. Cada árbol $T^n = (X, A^n)$ se caracteriza por su conjunto de arcos A^n y su conjunto de vértices fuertes Y^n.



El algoritmo converge en un nº finito de iteraciones por ser el número de árboles parciales finito.

Actualmente nos hayamos construyendo el organigrama correspondiente para pasarlo al lenguaje del ordenador.

Una vez obtenido el diseño óptimo mediante la clausura máxima del grafo asociado, si lo aplicamos a problemas reales, como puede ser el diseño óptimo de una mina a cielo abierto, se nos presenta la dificultad de que si la capacidad de extracción es limitada, ¿cuáles serían los perfiles intermedios? Para resolverlo se le asocia a cada vértice una masa $m_i' = m_i - c$, y entonces la función que tenemos que maximizar es:

$$P = M(c) - c\ V(c)$$

cuando $c = o$, el problema de maximizar P coincide con el problema original.

Supongamos que la capacidad de extracción es v, elegiremos los parámetros c_i de tal forma:

$$v(c_1) = V_1 = v$$
$$v(c_2) = V_2 = 2\ v$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v(c_n) = V_n = n\ v$$

que nos proporcionarán las calusuras $M(c_1)$ .... $M(c_n)$ respectivamente; pero como la extracción en una etapa depende de la anterior, en realidad, si introducimos el factor de actualización, lo que tendremos que maximizar será:

$$\alpha^{n-1}\ M(c_1) + \alpha^{n-2}\left[M(c_2)-M(c_1)\right] + \ldots + \left[M(c_n) - M(c_{n-1})\right]$$

Cuestión que estamos estudiando en la actualidad, suponiendo dos casos:

a) Si es, por ejemplo c_1 el contorno correspondiente a la extracción v_1 del primer año, y c_2 el contorno correspondiente a la extracción v_2 del segundo año supuesto que en el primer año no se ha extraido nada pero se ha acumulado la capacidad de extracción, entonces $c_1 \subset c_2$, análogo para la etapa i-ésima.

Este caso no es el real ya que la extracción en una etapa dependerá de la anterior, y este caso b) puede o no coincidir con el anterior.

Así pues, tenemos que el caso que se ajusta a la realidad es el b) pero el más factible de realizar en la práctica es el a). Lo que tratamos de ver es el grado de aproximación de ambos modelos.

(1). Este paso nos afecta a la distribución de masas.

El arco (X_o, X_m) soporte en T^{n-1} una rama T_m^{n-1} con masa $M_m^{n-1} > 0$.

Sea $| X_m, \ldots, X_k, X_l, \ldots, X_p, X_o |$ la cadena de X_m a X_o.

Salvo para esta cadena las demás masas permanecen invariables con la construcción de T^s.

Para una arista (arco) e_i de

$$| X_m \cdots X_k | \Rightarrow M_i^s = M_m^{n-1} - M_i^{n-1}$$

Para la arista (arco) (X_k, X_l)

$$M_k^s = M_m^{n-1}$$

Para una arista (arco) e_j de :

$$| X_l, \ldots, X_p, X_o | \Rightarrow M_j^s = M_m^{n-1} + M_j^{n-1}$$

En resumen: una p-arista de $T^{n-1} \Rightarrow$ m-arista en T^s y viceversa.

Abreviadamente en T^s

	m-arista	p-arista
arista e_k de $| X_m, - , X_k |$	$M_i^s \geqslant M_m^{n-1}$	$M_i^s < M_m^{n-1}$
arista $[X_k, X_l]$	$M_k^s = M_m^{n-1}$	
arista e_j de $| X_l, - , X_p, X_o |$	$M_j^s > M_m$	$M_j^s \leqslant M_m^{n-1}$

(2). Como T^{n-1} era normalizado, todas las aristas fuertes deben estar sobre $[X_m, - , X_o]$. Consideramos las aristas fuertes una por una partiendo de la primera encontrada en la cadena. Sea esta arista e_n, (X_n, X_h), debe ser p-arista (pues todas las m-aristas son débiles). Reemplazamos e_n por una arista fuerte "muda" (X_o, X_n). Entonces, consideramos una p-ramita de la rama T_n^s y quitamos su masa de todas las aristas de la cadena $| X_h , - , X_o |$. A causa de que todas las m-aristas son debiles también es cierto para esta cadena. Consideremos la primera p-arista fuerte de la cadena $| X_n , - , X_o |$, repetimos el proceso hasta finalizar totalmente.

Estas dos observaciones se pueden realizar conjuntamente, pero nos ponen así de evidencia la convergencia del proceso.

BIBLIOGRAFIA

1.- C.Berge: "The Theory of Graphs and its Applications", Wiley, 1962.

2.- Fulkerson, D.R.: "A Network Flow Computation for Project Cost Curves," Management Science, Vol. 7 nº 2, January 1961, pag.167.

3.- Grossman, I.F., and Lerchs, H: "An Alforithm for Directed Graphs with Application to the Project Cost Curve and In-Process Inventory, Proceedings of the Third Annual Conference of the Canadian Operational Research Society, Ottawa, May 4-5, 1961.

4.- Kelly, J.E., Jr., "Critical Path Planning and Scheduling: Mathematical Basis", Operations Research (U.S.), Vol.9 (1961),Nº 3, (May-June).

5.- Prager,William: "A Structural Method of Computing Project Cost Polygons", Management Science, April, 1963.