Asimismo, el día 18 a las 6,30 de la tarde pronunció una conferencia D. Javier Rodríguez López-Cañizares sobre "El método de las direcciones alternantes para la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales parabólicas. A continuación transcribimos la misma:

Sea la ecuación $\mathcal{L}u = f$ donde $\mathcal{L}$ es un operador parabólico en derivadas parciales, $u = u(x_1, \ldots, x_p; t)$, $(x_1, \ldots, x_p; t) \in M \times (0, T]$; M subespacio acotado del espacio euclídeo de p dimensiones R^p; t es la variable tiempo y su campo de variabilidad $(0, T]$. Sea un problema "bien puesto" (en inglés "properly posed") para dicha ecuación:

condición inicial	$u(x_1, \ldots, x_p; 0) = \varphi(x_1, \ldots, x_p)$	
condición de contorno	$u(x_1, \ldots, x_p; t) = 0$	$(x_1, \ldots, x_p) \in \delta M$ (frontera de M)

Para aproximar este problema mediante una ecuación en diferencias finitas se establece en M una red de puntos. Sea el espaciamiento máximo entre la proyección de dos puntos de la red (en M) en la coordenada x_i, h_i. Sea $h = (h_1, h_2, \ldots h_p)$ y N_h el número de puntos de la red.

Sea F_{N_h} el espacio Prehilbertiano de dimensión N_h de las funciones complejas que toman valores en los N_h puntos de la red. Resolviendo una ecuación en diferencias finitas consistente y estable con el problema propuesto podemos obtener la solución aproximada del problema propuesto (para un tiempo $t = n\Delta t$, $0 \leq n\Delta t \leq T$) en cada uno de los N_h puntos. Es decir, las soluciones de las aproximaciones numéricas son vectores del espacio F_{N_h}.

La norma en F_{N_h} va a ser

$$\|w\| = \left(h_1 \ldots h_p \sum_{i=1}^{N_h} |W_i|^2\right)^{1/2} \qquad \text{siendo } W = (W_1, W_2, \ldots, W_{N_h})$$

vector de F_{N_h}

El vector de F_{N_h} asociado al tiempo $t = n\Delta t$ lo representaremos con el subíndice n.

($\Delta t = T K^{-1}$, es la amplitud de cada una de las K partes en que se divide el intervalo $(0, T]$).

La norma para los operadores lineales que operen sobre F_{N_h} será

$$\|A\| = \sup_{W \in \mathcal{F}_{N_h}} \|AW\|$$

sea la ecuación en diferencias finitas

(1) $(I+A)\,W_{n+1} + BW_n = g_n$ consistente y estable con la ecuación en derivadas parciales de partida. A y B pueden ser operadores lineales, o bien sus matrices respecto a una base cualquiera sobre F_{N_h} .

La aproximación de la condición inicial será

$$W_o = \varphi\,(i_1h_1,\ i_2h_2,\ \ldots,\ i_ph_p)$$

y la aproximación de la condición de contorno se expresará diciendo que las componentes del vector W_n en los puntos de la frontera de la red son nulas.

La resolución de (1) supone el resolver un sistema de N_h ecuaciones lineales con N_h incógnitas. Expresando (1) de la forma

$$W_{n+1} = -\,(I+A)^{-1}\,BW_n + (I+A)^{-1}\ g_n\ ,$$

se observa que el obtener el vector solución W_{n+1} en función del vector W_n (conocido) implica el invertir la matriz $I+A$ que es de dimensión N_h . Si para invertir esta matriz se usa la subrutina del Centro de Cálculo SPINV, sólo se puede resolver el problema si N_h es no superior a 125.

El método de las direcciones alternantes consiste en sustituir el problema de invertir la matriz $I+A$, por otro más sencillo de modo que las soluciones obtenidas sean suficientemente próximas a las que se obtendrían invirtiendo $I+A$. Esta "proximidad" se enuncia en términos matemáticos diciendo que si la ecuación (1) es estable y consistente con la ecuación en derivadas parciales, también es estable y consistente con dicha ecuación la ecuación del método de las direcciones alternantes obtenido a partir de (1).

Para fijar ideas supongamos que $p = 2$ y que se tiene la descomposición --

$A = A_1 + A_2$ de modo que los sistemas de ecuaciones $A_i w = z$ $(i = 1,2)$ se resuelvan fácilmente. Pues bien el método de las direcciones alternantes (al que me referiré como método D.A.) llega a la solución β_{n+1} a partir de β_n (conocida por intermedio de $\beta_{n+1/2}$ mediante los dos sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} (I + A_1)\,\beta_{n+1/2} + A_2\,\beta_n + B\beta_n &= g_n \\ (I + A_2)\,\beta_{n+1} + A_1\,\beta_{n+1/2}\quad B\beta_n &= g_n \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Eliminando en (2) $\beta_{n+1/2}$ se llega a

$$(I + A)\,\beta_{n+1} + B\beta_n + A_1 A_2\,(\beta_{n+1} - \beta_n) = g_n \qquad (3)$$

Comparando (1) y (3) se observa que difieren en el término $A_1 A_2\,(\beta_{n+1} - \beta_n)$. Por tanto partiendo de la consistencia de (1) respecto a la ecuación en derivadas parciales, (3) será consistente con dicha ecuación si $A_1 A_2\,(\beta_{n+1} - \beta_n)$ cumple determinadas condiciones. Estas condiciones vienen expresadas en el trabajo de Douglas y Gunn -- (Numerische Mathematik 6,428-453 (1964)) en el teorema 2.1., pág. 432.:

(3) será consistente si (1) lo es siempre que se cumpla

$$\lim_{h,k\to 0} k^{-3}\, A_1 A_2\,(u_{n+1} - u_n) = M_1 M_2 \frac{\delta}{\delta t}(u)$$

siendo M_1 y M_2 operadores diferenciales.

El problema de si (3) es estable partiendo de la estabilidad de (1) lo resuelve el teorema 2.2. (pág. 432) para el caso en que los operadores A_1 y A_2 conmuten con B. Las condiciones de dicho teorema son:

a) A_1 , A_2 operadores positivos semidefinidos
b) B operador hermitiano
c) $A_i B = B A_i$ $\quad i = 1,2$

Me he fijado especialmente en el caso conmutativo por ser el que he tratado con ejemplos numéricos en mi trabajo de Licenciatura.

Históricamente el primer esquema en diferencias finitas en D.A. fué ideado por Peaceman y Rachford en 1955. Dicho esquema es de la forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta_{n+1/2} - \beta_n}{\Delta t} &= \frac{1}{2h^2} \left(\delta_x^2 \beta_n + \delta_y^2 \beta_{n+1/2}\right) \\ \frac{\beta_{n+1} - \beta_{n+1/2}}{\Delta t} &= \frac{1}{2h^2} \left(\delta_x^2 \beta_n + \delta_y^2 \beta_{n+1/2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

donde δ_x^2 y δ_y^2 son los usuales operadores en diferencias 2^{as} centrados en x e y respectivamente.

Pues bien si en (4) se hace

$$A_1 = -\frac{k}{2h^2}\,\delta_x^2 \;,\; A_2 = \cdot\frac{k}{2h^2}\,\delta_y^2 \qquad y \quad A = A_1 + A_2$$

y se elimina en (4) $\beta_{n+1/2}$, se llega a la ecuación

$$(i+A)\,\beta_{n+1} + (-i+A)\,\beta_n + A_1 A_2 \left(\beta_{n+1} - \beta_n\right) = 0 \qquad (5)$$

Por otra parte, si aplicamos a la ecuación de Crank-Nicholson

$$\frac{w_{n+1} - w_n}{\Delta t} = \frac{1}{2h^2}\left[\left[(\delta_x^2 + \delta_y^2)\,w_{n+1}\right] + \left[(\delta_x^2 + \delta_y^2)\,w_n\right]\right]$$

el método D.A. con A_1 y A_2 como antes, se llega también a (5). Esta relación entre los métodos de Peaceman - Rachford y el de Crank-Nicholson no fué notada al principio y contribuyó grandemente a hacer posible el desarrollo general de estos métodos de Douglas y Gunn.

Es de notar que se cumplen los teoremas de consistencia y estabilidad a que me he referido antes por ser

$$\lim_{h,k \to o} k^{-3} A_1 A_2 (u_{n+1} - u_n) = \lim_{h,k \to o} k^{-2} \frac{-k}{2h^2} \cdot \frac{-k}{2h^2} \delta_x^2 \delta_y^2 \frac{u_{n+1} - u_n}{k}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial t} (u)$$

y A_i simétrica y estrictamente diagonalmente dominante es por tanto definida positiva (varga, Matrix Iterative Analysis, teorema 1.8).

En mi trabajo me he referido también a la relación entre los métodos de Douglas -Rachford (otro "pionero" de las D.A.) y el de las diferencias regresivas.

He calculado los errores de truncamiento teóricos de los métodos de Crank-Nicholson y Peaceman Rachford y con estos métodos he resuelto la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

en el cuadrado de lado unidad

Condiciones iniciales $u(x, y, 0) = \text{Sen}\, \pi x \,\text{sen}\, \pi y$

Condiciones de contorno $u(x, y, t) =$ para (x, y) en los lados del cuadrado

Para este problema la solución exacta es

$$u(x,y,t) = e^{-2\pi^2 t} \quad \text{sen}\, \pi x \quad \text{sen}\, \pi y$$

Los resultados se obtienen en el tiempo $t = 1$, y en el cálculo se procede con $h = 1/4$ y con $h = 1/3$. Los resultados son bastante próximos a la solución exacta como se puede observar en mi trabajo.

He observado la estabilidad y convergencia de estos métodos haciendo cálculos con $\Delta t \longrightarrow 0$.

También el 11 de abril D. Ricardo García Rosa pronunció una conferencia sobre "Ayuda a la síntesis con calculadora; y D. Nemesio Juan de Lucas Martín sobre "Aplicación de la Investigación Operativa a los Problemas de los Transportes Urbanos".