CONFERENCIAS

El día 11 de abril a las cinco de la tarde L.A. Arés Escolar pronunció una conferencia sobre "Análisis armónico en el sistema visual de los vertebrados (I), a continuación la transcribimos:

Nuestro intento consiste en la interpretación de ciertos fenómenos detectados en el sistema visual de los animales superiores (1), en orden a:

1) Determinar con más precisión el funcionamiento de las distintas estructuras que constituyen dicho sistema.

2) Extraer algunas consecuencias susceptibles de ser aplicadas a sistemas de tratamiento de información.

Bases neurofisiológicas

En la transmisión de las señales ópticas desde el objeto hasta la percepción, se encuentran varios elementos (parte óptica del ojo - mosaico de fotorreceptores - ganglionares - células geniculadas - corteza visual) que influyen en ella. En principio se puede considerar que el sistema global posee dos partes en serie perfectamente diferenciadas: sistema pre-retinal y sistema retina-cerebro.

Campbell y Green (2) han demostrado que la óptica del ojo es sorprendentemente buena. Por otra parte, las dimensiones finitas del mosaico foveal sólo producen la atenuación de las frecuencias espaciales muy elevadas. Así pues, podemos concluir que el sistema nervioso es el mayor responsable de las transformaciones de las señales espaciales en la transmisión. A él dedicaremos nuestra atención en concreto.

Las experiencias realizadas en los últimos años (3) nos permiten resumir las siguientes propiedades del sistema visual:

a) En la retina de algunos mamíferos (gato, mono, hombre) existen canales sintonizados a distintas frecuencias espaciales.

b) Esta selectividad es mayor en el hombre y en el mono que en el gato.

c) La anchura de banda de estos canales probablemente no es mayor de 1/8 de frecuencia espacial.

d) Esta selectividad se detecta a nivel de ganglionares o centros superiores del sistema visual.

e) Existen células corticales que responden selectivamente a una determinada orientación de un borde.

En resumen, se puede decir que en el gato, mono y hombre se codifican en el sistema visual dos importantes propiedades de una imagen:

1ª) La información acerca de la orientación de un borde.

2ª) La extracción del contenido en frecuencias espaciales de la imagen que se encuentra sobre la retina.

Planteamiento del problema

En principio, considerando una imagen $f(x, y)$, se puede hacer una representación de la misma en el dominio de frecuencias espaciales $F(W_x, W_y)$, mediante la transformada bidimensional de Fourier. Si la imagen está limitada en frecuencias, según el teorema del muestreo, bastan $4W_x^o W_y^o S$ muestras para su representación, donde W_x^o y W_y^o son las máximas frecuencias espaciales contenidas en la configuración. Con esta codificación poseemos una representación del objeto para su posterior tratamiento. Ahora bien, en el sistema retina-cerebro, se realiza la extracción del contenido de frecuencias de la imagen, es decir, hay un sustento real de la representación en frecuencias de la imagen, con lo que esta representación no sólo es un instrumento de cálculo sino que las operaciones sobre ella tendrán un cierto significado neurofisiológico.

Por otra parte, si existen en el sistema visual canales sintonizados a distintas frecuencias espaciales, se puede admitir que existen redes neuronales que resuenan a dichas frecuencias. Bajo las condiciones de linealidad e invariancia, la respuesta del sistema se expresa como una convolución de la entrada $f(x,y)$ con la respuesta $h(x,y)$ del sistema a la función impulso:

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x-\alpha, y-\beta)\, f(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta \qquad (*)$$

y cabe describir el sistema en el dominio de transformadas donde los enlaces operacionales son más sencillos. Así el proceso representado por la anterior ecuación se escribiría:

$$G(\omega_x \; \omega_y) = H(\omega_x, \; \omega_y) . F(\omega_x, \omega_y)$$

Dado que el sistema visual presenta plexos transversales, en principio cada uno de ellos quedaría caracterizado por $H(W_x , W_y)$ de tal forma que, en general, el tratamiento de la información se realiza según (*), significando que $h(x - \alpha, y - \beta)$ da cuenta de la interacción del elemento (α , β) con el (x, y).

La integral de convolución (*), desde el punto de vista de cálculo, puede considerarse como una ecuación integral o como una simple integral dependiendo de qué sea lo que conozcamos, la salida o la entrada.

Nuestro intento será, en principio, la aplicación de la teoría de los sistemas lineales al sistema visual que puede permitir el cálculo de funciones de transferencia y dar cuenta de procesos de filtraje especial, selección de información y reconocimiento de caracteres.

Para poder aplicar este tipo de análisis, hemos de considerar que el sistema procesador de datos es lineal e invariante en el espacio. En efecto, bajo ciertas condiciones, se cumplen estas propiedades. El considerar el sistema visual como lineal es la hipótesis de partida más fuerte; no obstante, las investigaciones de Maffei (4) y Enroth-Cugell y Robson (3) indican que esta hipótesis es válida dentro de ciertos límites. Por otra parte, despreciando efectos de bordes y considerando regiones homogéneas de la retina, cabe admitir la invariancia espacial.

Dado que nosotros planteamos el problema en un doble dominio, necesitamos el paso de uno a otro como primer instrumento. Nuestro primer problema en el aspecto de cálculo es pues pasar de uno a otro dominio, para lo cual necesitamos el cálculo de la transformada de Fourier.

Todas las operaciones que deben realizarse con calculadoras digitales exigen un muestreo de la señal, por lo que utilizaremos la transformada discreta de Fourier cuya relación con la transformada integral y cuyo cálculo indicamos a continuación.

RELACION ENTRE LA TRANSFORMADA INTEGRAL DE FOURIER Y LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER DE UNA SEÑAL (5)

Sean x(t) y a(f) una pareja de transformadas de Fourier:

$$a(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi ift}dt \qquad x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} a(f)e^{2\pi ift}df$$

Si muestreamos x(t) a intervalos de longitud Δt, en los puntos de muestreo $h\Delta t$, $h=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, se puede poner:

$$x(h\Delta t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{kF}^{(k+1)F} a(f)e^{2\pi ifh/F}df=\int_{o}^{F} a_p(f)e^{2\pi ifh/F}df$$

siendo

$$a_p(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(f+kF) \qquad (F=1/\Delta t)$$

ya que $e^{2\pi ifh/F}$ es una función periódica de período F.

Como $a_p(f)$ es una función periódica, admite un desarrollo en serie de Fourier cuyos coeficientes están dados por $x(h\Delta t)/F$. Así pues se puede poner:

$$a_p(f) = \frac{1}{F}\sum_{h=-\infty}^{\infty} x(h\Delta t)e^{-2\pi ifh/F}$$

Si consideramos ahora los valores de $a_p(f)$ en N puntos igualmente espaciados entre 0 y F, es decir, si muestreamos $a_p(f)$ a intervalos $\Delta f = F/N$, y teniendo en cuenta que $e^{-2\pi ihn/N}$ es una función periódica de período N, podemos escribir

$$a_p(n\Delta f)= \frac{1}{F}\sum_{h=o}^{N-1}\left\{\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(h\Delta t\div lN\Delta t)\right\} e^{-2\pi ihn/N}$$

es decir:

$$a_p(n\Delta f) = \frac{1}{N}\sum_{h=o}^{N-1} T.x_p(h\Delta t)e^{-2\pi ihn/N}$$

siendo

$$x_p(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(t+lT) \qquad (T=1/\Delta f)$$

es decir , $a_p(n\,\Delta f)$ es la transformada discreta de Fourier de $T.x_p\,(h\Delta t)$.

Así pues, si $x(t)$ y $a(f)$ son una pareja de transformadas integrales de Fourier, entonces $T.x_p(h\Delta t)$, $h = 0, 1, \ldots, N-1$ y $a_p(n\Delta f)$, $n = 0,1, \ldots N-1$ son una pareja de transformadas discretas de Fourier.

Para que $a_p(n\,\Delta f)$ aproxime $a(f)$ con un error despreciable en el rango de frecuencias que nos interesa, Δt ha de ser suficientemente pequeño para que $F = 1/\Delta t$ abarque todo el rango donde $a(f)$ no es nula o casi nula. El intervalo $\Delta f = 1/(N\,\Delta t)$ se determina fijando N, la cual debe de ser suficientemente grande para que Δf dé un espaciado suficientemente fino, no siendo necesario que $N\,\Delta t$ abarque la región no nula de $x(h\,\Delta t)$.

Transformada rápida de Fourier (6)

Supongamos una serie de $N(=2^n)$ muestras, x_k, $k = 0, 1 \ldots, N-1$. A falta de un factor de escala, la transformada discreta de Fourier está dada por:

$$a_r = \sum_{k=o}^{N-1} x_k W^{rk} \qquad (r=0,1,\ldots N-1)$$

siendo

$$W = e^{-2\pi i/N}$$

Dividamos x_k en dos series, y_k y z_k, definidas por:

$$y_k = x_{2k} \qquad z_k = x_{2k+1} \qquad (k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1)$$

cuyas transformadas discretas están dadas por:

$$b_r = \sum_{k=o}^{\frac{N}{2}-1} y_k\, e^{-2\pi irk/N/2} = \sum_{k=o}^{\frac{N}{2}-1} y_k\, W^{r2k}$$

$$c_r = \sum_{k=o}^{\frac{N}{2}-1} z_k\, e^{-2\pi irk/N/2} = \sum_{k=o}^{\frac{N}{2}-1} z_k\, W^{r2k} \qquad (r=0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1)$$

Podemos expresar a_r en función de b_r y c_r en la forma:

$$a_r = \sum_{k=o}^{\frac{N}{2}-1} (y_k W^{r2k} + z_k W^{r(2k+1)}) = b_r + W^r c_r \qquad (r=0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1)$$

Para valores de r mayores de $\frac{N}{2} - 1$, las transformadas b_r y c_r repiten periódicamente los valores tomados para

$$r \leq (N/2)-1$$

Así pues:

$$a_{r+\frac{N}{2}} = b_r + W^{r+\frac{N}{2}} C_r = b_r - W^r c_r \qquad (r = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta estas dos últimas expresiones, los primeros N/2 puntos y los últimos N/2 de la transformada discreta a_r de x_k pueden expresarse a partir de las transformadas discretas de y_k y z_k.

Como el tiempo de cálculo de la transformada discreta de Fourier es proporcional al cuadrado del número de muestras, este algoritmo nos reduce el tiempo de cálculo. El cálculo directo de a_r exige N^2 multiplicaciones complejas e igual número de sumas, mientras que según este algoritmo, a_r puede calcularse con $2(n/2)^2$ multiplicaciones y otras tantas sumas, con N+ N operaciones adicionales. A su vez, el cálculo de b_r y c_r puede reducirse al cálculo de N/4 muestras y si $N = 2^n$, se pueden realizar n reducciones hasta llegar a una serie de dos muestras. La transformada discreta de una muestra es la misma muestra. Teniendo en cuenta que $W^n = -W^{n-N/2}$ y que, finalmente, la mitad de las multiplicaciones se realizan con la unidad y, por tanto, pueden omitirse, resulta que sólo son necesarias $N\lg_2 N$ adiciones complejas y $(1/2)N\lg_2 N$ multiplicaciones.

Si N no es potencia de dos, pero admite una descomposición en factores primos N = p.q. ..., el desarrollo sería análogo, pero ahora habría que formar p series de N/p muestras; después, en cada serie, otras q de N/q muestras y así sucesivamente.

Para aplicar el algoritmo al caso bidimensional:

$$a_{qr} = \sum_{k=o}^{N_2-1} \sum_{h=o}^{N_1-1} x_{hk} W^{hq+kr} \qquad \begin{matrix}(q=0,1,\ldots,N_1-1)\\ (r=0,1,\ldots,N_2-1)\end{matrix}$$

basta considerar las muestras agrupadas para cada una de las variables separadamente, considerando la otra variable como un parámetro, es decir:

$$a_{qr} = \sum_{h=0}^{N_1-1} W^{hq} \sum_{k=0}^{N_2-1} x_{hk} W^{kr} = \sum_{h=0}^{N_1-1} u_{hr} W^{hq}$$

siendo:

$$U_{hr} = \sum_{k=0}^{N_2-1} x_{hk} W^{kr}$$

Es decir, que en una señal bidimensional muestreada, representada en una matriz de dimensiones $N_1 \times N_2$, basta aplicar el algoritmo monodimensional $N_1 + N_2$ veces, primeramente N_1 veces para las filas y a continuación N_2 para las columnas.

REFERENCIAS

(1) CAMPBELL, F.W. (1968) "Trends in physiological optics" Lecture delivered at the International School of Physics "Enrico Fermi". Varenna (Italia).

(2) CAMPBELL, F.W. & GREEN, D.G. (1965) "Optical and retinal factors affecting visual resolution", J. Physiol. 181, 576-593.

(3) ENROTH-CUGELL, C. & ROBSON, J.G. (1966) "The Contract Sensitivity of Retinal Ganglion Cells of the Cat", J. Physiol. 187, 517-552.

- HUBEL, D.H. & WIESEL, T.N. (1962) "Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex" J. Physiol. 160, 106-154.

- HUBEL, D.H. & WIESEL, T.N. (1968) "Receptive fields and functional architecture of monkey striate cortex", J. Physiol. 195, 215-243.

- CAMPELL, F.W. et al. (1968) "The angular selectivity of visual cortical cells to moving gratings", J.Physiol. 198, 237-250.

- CAMPBELL, F.W. & KULIKOWSKY (1966) "Orientational selectivity of the human visual system", J. Physiol. 187, 437-445.

(4) MAFFEI, L. (1968) "Electrical activity at the different layers of the vertebrate retina" Lecture delivered at the International School of Physics "E.Fermi", Varenna (Italia).

(5) RAGAZZINI, J.R. & FRANKLIN, G.F. "Sampled-data control systems", McGraw-Hill, 1958.

(6) COOLEY, J.W. & TUKEY, J.W. (1965) "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series", Math. of Comput., vol. 19, 297-301.

El día 18 a las 5 de la tarde Javier Alberdi Alonso pronunció una conferencia sobre "Presentación de un nuevo coeficiente de correlación entre variables nominales", a continuación damos un resumen de la misma:

El objetivo de este coeficiente de correlación es hacer posible el realizar una matriz de coeficientes de correlación entre n variables nominales donde el elemento ij es el coeficiente de correlación entre la variable i y la variable j, y que sobre está matriz de correlación se pueda aplicar el análisis factorial.

Lo que se ha buscado es que el coeficiente cumpla las cualidades necesarias y si no cumple alguna que tenga una estructura muy manejable, de modo que se pueda conseguir con facilidad realizar un coeficiente transformado que las cumpla realmente.

La experimentación realizada con el computador nos ha permitido estudiar por el método de Montecarlo la distribución en el muestreo de este coeficiente en distintas circunstancias. Al mismo tiempo se ha estudiado también por el método de Montecarlo la distribución en el muestreo de otros dos coeficientes ya conocidos, para poder conocer mejor por comparación la situación en que se encuentra el nuevo coeficiente.

Actualmente se tienen los datos necesarios para saber que este nuevo coeficiente tiene algunas restricciones para ser usado, pues cumple las condiciones necesarias para poder usarse a continuación el análisis factorial, solo bajo ciertas condiciones. Al mismo tiempo, tenemos los datos necesarios para saber con exactitud el tipo fijo y los objetivos de cada una de las transformaciones que hay que realizar sobre este coeficiente para que cumpla el fín para el que fué diseñado.

Dada la estructura especialmente manejable de este coeficiente parece perfectamente factible el conseguir realizar estas transformaciones, aunque no se han llevado a cabo.

En su situación actual es útil para muestras grandes (1.500 elementos o más) caso en el que con frecuencia nos encontramos en estudios sociológicos.