CONDICION DE LA RUTA CRITICA MINIMA

Por Laureano Escudero Bueno

A) Introducción

En este trabajo se pretende exponer un método para conseguir la disminución de la duración de un proyecto, con un aumento mínimo del coste del mismo. A nuestro modo de ver, la originalidad del trabajo está en la facilidad de poder utilizar el nuevo algoritmo que proponemos en ordenadores de capacidad no muy grande, en los cuales era sumamente difícil, si no imposible, su consecución por los algoritmos empleados actualmente (*).

Aunque este algoritmo propiamente está concebido para el caso determinístico, o sea para un proyecto estudiado por medio del C.P.M. sin embargo, con el fin de darle una mayor generalidad y posibilidad de aplicaciones, hemos hecho los cálculos mediante una simulación, obteniendo por tanto resultados probabilísticos, no sólo acerca de la duración total del proyecto, sino también sobre el grado de criticidad de cada una de las tareas.

B) Consideraciones Generales

Nuestro algoritmo pretende utilizar la técnica de los grafos a partir, no del grafo original, sino que procede de este otro modo:

A partir del grafo original se obtiene un nuevo grafo en el que se han agregado unas tareas ficticias correspondientes a las holguras y tanto en las tareas originales como en las de las holguras se toman en consideración los dos elementos siguientes: Tiempo que se puede reducir en cada tarea y Coste unitario al que se puede reducir este tiempo. Naturalmente en las tareas ficticias, el tiempo es la holgura y el coste cero.

(*) Entre los métodos que hemos tenido presentes al proponer el nuestro, están en especial el de Ford y Fulkerson, que es quizás el más conocido mediante un proceso de señalizaciones y cambios de flujo; el de Kelley, cuyos fundamentos no difieren mucho de los anteriores, pero cuya aplicación detallada ha sido aplicada por la G.E. 225; el método de programación paramétrica, del cual hablaremos algo por creer que queda simplificada su aplicación aprovechando parte del algoritmo que vamos a exponer y el método de William Prager expuesto bajo el nombre de "A Structural Method of Computing Project Cost Polygons, expuesto también por Campays, bajo el nombre de "Método de Analogía elástica del MCX".

A partir de este grafo, podemos construir un nuevo grafo que contenga como caminos del mismo todos los cortes posibles del grafo planario no dirigido, el grafo que corta todos los caminos es el grafo dual.

Prescindiremos de esta propiedad porque pretendemos aplicar nuestra teoría a grafos orientados, planarios y no planarios. En esta primera exposición nos ocuparemos únicamente del grafo planario, que después extenderemos al caso no planario.

Como lo que se pretende es obtener todos los cortes posibles para cada disminución de una unidad de tiempo en las tareas de cada corte y elegir cual de estas disminuciones es más económica, nos ha parecido mejor hacer este estudio cada vez que se pretenda disminuir en una unidad la duración total del proyecto con un costo total mínimo, considerando un grafo en que cada corte se convierta en un camino y en este nuevo grafo elegir cada vez el camino más económico aplicando ya la programación económica, ya el método de Dantzig. Al terminar cada acortamiento se estudian los datos del nuevo grafo resultantes de este acortamiento y se vuele a repetir la operación, hasta que se obtenga el acortamiento deseado o no sea posible un acortamiento mayor.

Veamos ahora cómo preparamos el grafo original, y el de los cortes que de ahora en adelante denominaremos grafo "dual".

Como lo que se trata de minimizar es el coste de la disminución de una unidad de tiempo en cada actividad, aquí vemos que un corte que divida el grafo en dos, es decir, que disminuya en una unidad de tiempo-días, semanas, meses- todas las tareas que corta, hace que todos los caminos disminuyan, al menos en una unidad de tiempo, porque todos ellos han sido cortados al menos una vez. Se trata por tanto de hallar el corte que disminuyendo en una unidad la duración total del proyecto, lo efectúe por aquel camino cuyo coste total de reducción sea mínimo.

Como el grafo "dual" estos cortes del "primal" son caminos del dual, bastará hallar el camino más corto (es decir más económico), a base naturalmente de cortar todos los caminos una sola vez.

Por tanto lo importante aquí es, 1º) la obtención de este grafo "dual"; y 2º) en este grafo, hallar el camino más económico, en los supuestos de disminución unitaria de todos los caminos.

Indiquemos el modo de obtener este grafo dual:

Se comienza por el vértice (1) y se cortan todas las tareas que parten de él, tomando una dirección elegida a voluntad y que conservaremos hasta el fin, siendo indiferente la elección de una u otra dirección. En los ejemplos hemos elegido la dirección que orientando la tarea en el sentido i-j, corte de la parte izquierda a la derecha de la citada línea (figura 1)

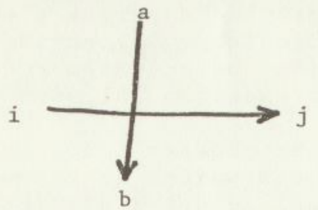


Figura 1

Una vez cortadas de este modo las tareas que parten de 1, se procederá como sigue para obtener los cortes restantes:

Al llegar a un vértice (i) tenemos cortadas las tareas que inciden en él. Se sustituye el camino formado por los cortes de estas tareas, por el camino formado por los cortes de las tareas que salen de i, de modo que tengan el mismo origen y el mismo fin, con lo cual queda cortado todo lo que entraba en i, a la salida, en vez de la entrada, y si en cada nudo se efectúa el corte de este modo, no quedará ninguna combinación de caminos sin cortar, y además se conservará el sentido original si efectuamos el corte de cada tarea como se ha hecho a partir del nudo 1.

Este grafo que, como hemos visto, representa la solución del problema, es el que vamos a utilizar para hallar el corte más económico. Para la obtención de este corte más económico pueden suceder los siguientes casos:

1.- El corte más económico corta de una vez, y una sola, a cada uno de los caminos del grafo primal. En este caso basta hallar en el grafo dual el camino más corto, porque como en este grafo están todos los cortes posibles, resultantes de sustituir cada combinación de llegadas a un vértice por el de salidas, el camino más corto corresponderá al corte de todos los caminos y por tanto a la disminución de una unidad en la duración de todos ellos, y por tanto del proyecto.

2.- Puede suceder que el corte más económico resulte de cortar de tal modo el grafo primal, que alguno o algunos de los caminos queden cortados dos o más veces como sucede en el siguiente caso: (Figura 2)

Si $C_3 < C_4$

y $C_1 < C_5$ se tiene que

$$C_1 + C_3 < C_1 + C_4$$
$$C_1 + C_3 < C_5 + C_3$$
$$C_1 + C_3 < C_2 + C_5 + C_4$$

resultando que el corte de C_1 y C_3 es el más económico quedando cortados todos los caminos, pues el camino "a-c" se corta una vez, el "d-e" se corta otra vez, y el "a-b-c" queda cortado dos veces, es decir, disminuido en dos unidades, lo cual permite alargar la línea "b" en una unidad, pudiendo redundar en muchos casos en una disminución de costo (aunque la línea "b" no se podría incrementar si anteriormente no se ha reducido) (Figura 2).

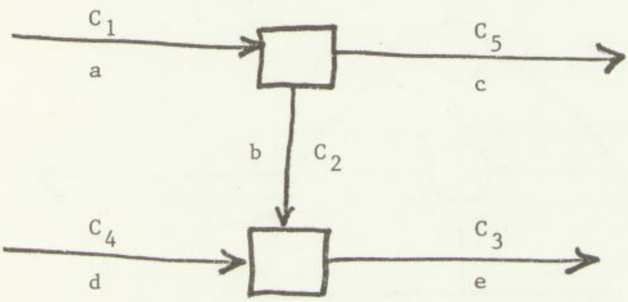


Figura 2

3.- De igual modo si habiéndose ya reducido en alguna anterior programación, la holgura o la duración de la actividad "b"; y si el costo de reducción de la actividad "a" $-C_1-$ menos el de la actividad "b"- cero en el caso de que habiéndose ya reducido la holgura todavía se pudiera disminuir ésta, y c_2 y se redujo anteriormente en alguna unidad su duración -es menor que el de la actividad "e" $-c_5-$, es decir

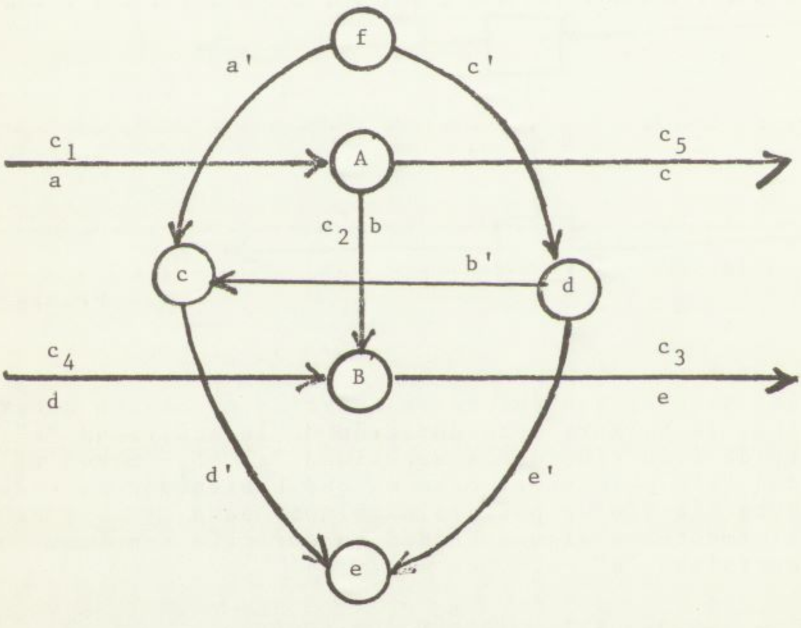
si $c_1 - c_2 < c_5$, o si $c_1 < c_5$ (según los casos) y si se tendría que

$c_1-c_2+c_3<c_5+c_3$; o $c_1+c_3<c_5+c_3$ (según los casos)

y sería por tanto más económico la reducción en las actividades "a" y "e" porque se puede alargar en una unidad la duración de la tarea "b" con un ahorro de c_2 si ya se había reducido al menos en una unidad, o sin ningún ahorro si no se había reducido en ninguna unidad esta actividad pero si tuvo anteriormente holgura, incrementándose en este caso la holgura de esta actividad. De todas formas, aunque tampoco se haya reducido previamente la holgura, también se podría utilizar esta posibilidad, incrementando su holgura, ya que este parámetro no tiene límite máximo.

Veamos entonces cómo mediante el grafo "dual" se puede obtener el costo más económico aplicando el método de RAY SAUER acomodado a este caso.

En el grado dual a cada entrada y salida de un vértice corresponde un polígono con un origen y un fin con doble camino, el correspondiente a las actividades de salida; así en el grafo tendríamos (figura 3):



o sea que a' corta por un lado y c'-b' por otro.

Figura 3